# Zirkel 12b, Hausaufgaben vom 10.03.2010

## (zum 17.03.2010)

# Diophantische Approximation II

1. Sei
$$\sqrt[3]{2} = 1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$
die reguläre Kettenbruchzerlegung der Zahl $\sqrt[3]{2}$. Berechne die Zahlen $a_1$, $a_2$, …, $a_{11}$.

2. Zeige, dass die Ungleichung
$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{3q^2}$$
keine Lösungen in ganzen Zahlen $p$ und $q$ hat.

3. Zeige, dass die Zahl $\sqrt{5}$ "doppelt so gut" approximierbar ist wie der goldene Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Das heißt, es gibt unendlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$, sodass
$$\left|\sqrt{5} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2\sqrt{5}q^2}.$$
*Hinweis:* die Ungleichung
$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$
wird für die Brüche $\frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{13}{8}, \ldots$ erfüllt.