

# Zirkel 12b, Hausaufgaben vom 03.03.2010

(zum 10.03.2010)

## Diophantische Approximation I

1. Sei  $\alpha = \sqrt{2} - 1 = 0,41421\dots$ . Für jeden  $q$  von 2 bis 9 finde die jeweils beste rationale Approximation  $\frac{p}{q}$  an  $\alpha$ .
2. Hier beweisen wir den Satz von Dirichlet:

**Satz.** Sei  $\alpha \in [0, 1)$ , und sei  $Q$  eine ganze Zahl größer als 1. Dann gibt es  $p, q \in \mathbb{Z}$ , sodass  $1 \leq q < Q$  und

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

(Insbesondere  $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ .)

Beweisskizze:

- Man definiere den *gebrochenen Teil* einer Zahl  $x$  als die Zahl  $\{x\} \in [0, 1)$ , für welche  $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$ . Nun betrachte die Zahlen

$$0, 1, \alpha, \{2\alpha\}, \dots, \{(Q-1)\alpha\}.$$

- Zeige, dass irgend zwei von diesen Zahlen im Abstand weniger oder gleich  $\frac{1}{Q}$  voneinander liegen.
  - Nun folgere daraus den Satz.
3. Setze  $\alpha = \sqrt{2} - 1$  und  $Q = 10$ . Laut dem Dirichlet-Satz gibt es ganze Zahlen  $q \leq 9$  und  $p$ , für welche gilt:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{10q}.$$

Anhand der Ergebnisse der Aufgabe 1 bestimme alle solche  $q$ .