Zirkel 12b, Hausaufgaben vom 17.02.2010

(zum 03.03.2010)

Mengenlehre 5

1. Numeriere alle rationallen Punkte $r_1, r_2, \dots$ des Intervalls $[0, 1]$. Betrachte die Vereinigungsmenge

$$M = [r_1 - \frac{1}{4}, r_1 + \frac{1}{4}] \cup \dots [r_n - \frac{1}{2^{n+1}}, r_n + \frac{1}{2^{n+1}}] \cup \dots .$$

   deckt M das ganze Interall $[0, 1]$ ab?

2. Konstruiere eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die
   (a) unedlich viele Maxima und Minima hat,
   (b) auf jedem Teilintervall unedlich viele Maxima und Minima hat.

3. a) Sei $\alpha \in [0, 1]$. Zeige: Für jede natürliche Zahl q gibt es ein $p \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$, so dass

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{2q}.$$

   b) Erinnerung:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \cdots .$$

   Zeige: für jede natürliche Zahl q gibt es eine natürliche Zahl p, sodass

$$|e - \frac{p}{q!}| < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

   c) Sei

$$\alpha = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots .$$

   Zeige: für manche q kann man α durch ein $\frac{p}{q}$ "gut" approximieren, für manche andere q sind alle Approximationen der Form $\frac{p}{q}$ "schlecht".