# Zirkel 12b, Hausaufgaben vom 16.12.2009

## (zum 06.01.2010)

# Erzeugende Funktionen IV

1. Das Pascalsche Dreieck (Abbildung links) wird nach der bekannten Regel fortgesetzt, und zwar so, dass jede Zahl gleich der Summe ihres linken und ihres oberen Nachbarn ist.

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{0-te Zeile} & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\text{1-te Zeile} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\text{2-te Zeile} & 1 & 3 & 6 & 10 \\
\text{3-te Zeile} & 1 & 4 & 10 & 20
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 3 & 6 & 10 \\
1 & 4 & 10 & 20
\end{array}
$$

   Zeige, dass die $l$-te Zahl (man beginnt mit Null zu zählen) in der $k$-ten Zeile auch bei $k < 0$ gleich $\binom{k+l}{l}$ ist, wobei

$$\binom{k+l}{l} = \frac{(k+l)(k+l-1)\cdots(k+1)}{l!}.$$

2. Unter der Annahme, dass die folgenden Reihen konvergieren, und dass die Operationen mit formalen Potenzreihen den Operationen mit Zahlen entsprechen, berechne:

   (a)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots$$

   (b)
$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{2}{9}\right)^k = 1 + 1\left(\frac{2}{9}\right) + 2\left(\frac{2}{9}\right)^2 + 5\left(\frac{2}{9}\right)^3 + 14\left(\frac{2}{9}\right)^4 + \cdots$$

3. Sei
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}[[x]].$$

   Zeige, dass $a_k$ die Anzahl der Möglichkeiten ist, den $n$-Cents Betrag in 1–, 2– und 5–Cent Münzen zu wechseln.