

Zirkel 11b, Hausaufgaben vom 25.03.2009

(zum 22.04.2009)

Binet-Formel

1. Sei die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ definiert durch

- $a_0 = 0, a_1 = 1;$
- $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$ für alle $n \geq 0$.

Finde eine Formel für a_n .

2. Erkläre mithilfe des Binomischen Lehrsatzes warum die Binet-Formel immer ein ganzzahlige Werte herausgibt.
3. Wir können nun eine explizite Formel für jede Folge (a_n) , die durch zwei Anfangswerte und Rekurrenz

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad (*)$$

gegeben wird, finden. Ausnahme bilden diejenige Folgen, wo die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0 \quad (**)$$

nur eine (zweifache) Nullstelle besitzt.

Sei λ die zweifache Nullstelle der Gleichung (**). Zeige, dass außer der geometrischen Folge (λ^n) auch noch die Folge $(n\lambda^n)$ die Rekurrenz (*) erfüllt.