Zirkel 11b, Hausaufgaben vom 11.02.2009

(zum 04.03.2009)

Summen zweier Quadrate III

1. Betrachte die Menge

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

   (a) Zeichne die Elemente von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ auf der komplexen Zahlenebene.

   (b) Sei die *Norm* einer Zahl aus $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ definiert als

$$N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2.$$

   Zeige, dass

$$N(zw) = N(z)N(w)$$

   gilt.

   (c) Zeige, dass die Zahlen 2 und 3 irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.

   (d) Zeige, dass die Zahl 6 mindestens zwei unterschiedliche Zerlegungen in irreduzible Faktoren in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ besitzt.

   (e) Erkläre anhand Deiner Zeichnung aus Punkt (a), warum in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ Division mit Rest nicht immer möglich ist.

2. Sei

$$A = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^N a_N,$$

   wobei $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_N$ gilt. Beweise die folgenden Abschätzungen für die partiellen Summen $A_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^n a_n$.

   (a)

$$\begin{aligned} A_n &\leq A \qquad \text{für } n \equiv 0 \pmod 2; \\ A_n &\geq A \qquad \text{für } n \equiv 1 \pmod 2; \end{aligned}$$

   (b)

$$|A - A_n| \leq a_{n+1}.$$

3. Im Unterricht haben wir bewiesen, dass für die Anzahl $f(r)$ der Gitterpunkte im Viertelkreis $\{x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ die folgende Gleichung gilt.

$$f(r) - 1 = \lfloor r^2 \rfloor - \left\lfloor \frac{r^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r^2}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r^2}{7} \right\rfloor + \cdots$$

bitte wenden

(a) Mit Hilfe der Aufgabe 2(b) zeige, dass die Zahl $f(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, von der Summe

$$\left\lfloor (2k+1)^2 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(2k+1)^2}{3} \right\rfloor + \cdots + (-1)^k \left\lfloor \frac{(2k+1)^2}{2k+1} \right\rfloor$$

um nicht mehr als $2k+1$ unterscheidet.

(b) Vervollständige den Beweis der Leibniz-Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$