Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Prof. Dr. Alexander Bobenko

Stand: 18. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

Kurven in $\mathbb{R}^n$

1 Parametrisierte Kurven

Definition 1.1 (Parametrisierte Kurven) *Eine* parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^n$ *ist eine glatte Abbildung*

$$\gamma : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

eines Intervalls M in den $\mathbb{R}^n$. Die Variable $t \mapsto \gamma(t)$ heißt Parameter *der Kurve, das Bild $\gamma(M) \subset \mathbb{R}^n$ nennt man* Spur, *$Sp(\gamma)$.*

Bemerkung

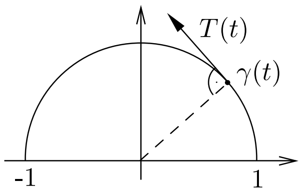
- Eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt *glatt*, falls $\gamma_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ für alle $i = 1 \dots n$.
- Man kann $t \mapsto \gamma(t)$ als Bewegung eines Punktes im $\mathbb{R}^n$ interpretieren. Dann ist $\frac{d\gamma}{dt}(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$ die Geschwindigkeit der Bewegung und man nennt γ eine *Trajektorie.*

Definition 1.2 (Tangentialvektor & reguläre Kurven)

- *Der Vektor $T(t) := \gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ heißt* Tangentialvektor
- *Ein Punkt mit $\gamma'(t) = 0$ heißt* singulärer Punkt
- *Eine parametrisierte Kurve heißt* regulär*, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in M$.*

Beispiel 1.1 (Einheitskreis)

1. Die Kurve
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad , M = [0, \pi]$$
parametrisiert den oberen Einheitshalbkreis. Ausserdem ist $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0, 0)$ für alle $t \in M$, also ist γ regulär.

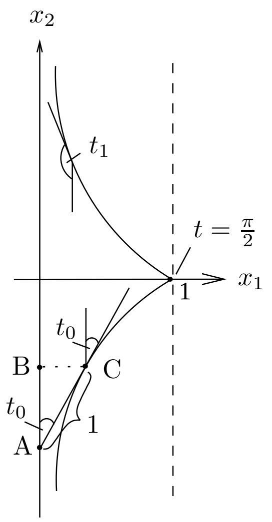


2. Die Kurve
$$\widetilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad , M = [-1, 1]$$
ist eine andere Parametrisierung der selben Menge.

Beispiel 1.2 (Traktrix) Betrachte die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \end{pmatrix} \quad , M = \ (0, \pi).$$

Die Spur von $\gamma(t)$ heißt *Traktrix*.



$$
\begin{aligned}
\gamma_1'(t) &= \cos t \\
\gamma_2'(t) &= -\sin t + \frac{1}{2\tan(\frac{t}{2})\cos^2(\frac{t}{2})} \\
&= -\sin t + \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})} \\
&= -\sin t + \frac{1}{\sin t} \\
&= \frac{\cos^2 t}{\sin t}.
\end{aligned}
$$

Proposition 1.1 (Eigenschaften der Traktrix) *Sei $\gamma(t)$ die in Beispiel 1.2 definierte parametrisierte Kurve. Dann gilt:*

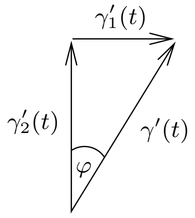
- *γ ist regulär für alle $t \neq \frac{\pi}{2}$.*
- *Der Parameter t ist der Winkel zwischen der y-Achse und dem Tangentialvektor in $\gamma(t)$.*
- *Die Länge der Strecke vom Berührungspunkt der Tangente zum Schnittpunkt mit der y-Achse ist konstant 1.*

Beweis Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\cos^2 t}{\sin t} \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos t = 0 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Also ist γ nur in $t = \frac{\pi}{2}$ singulär.
Weiter gilt:

$$
\tan\varphi = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan
$$



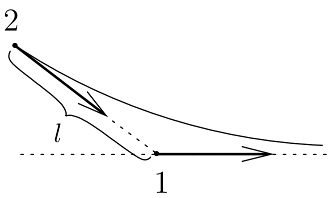
also ist $t = \varphi$.

Bleibt zu zeigen: $|\overline{AC}|$=1.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|\overline{BC}| = &\quad \gamma_1(t) = \sin t \\
\Rightarrow \quad |\overline{AC}| = &\quad \frac{|\overline{BC}|}{\sin t} \\
\Rightarrow \quad |\overline{AC}| = &\quad 1.
\end{aligned}
$$

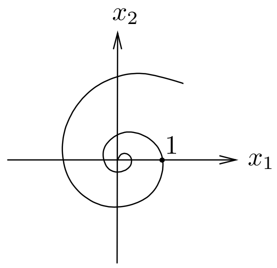
□

Bemerkung Eine Traktrix ensteht wenn ein Objekt von einem Anderen bei konstanten Abstand gezogen wird, deswegen nennt man sie oft auch *Schleppkurve*.



Beispiel 1.3 (Logarithmische Spirale)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos pt \\ e^{-t}\sin pt \end{pmatrix}, M = [t_0, \infty)$$



Die Spur von γ heißt *logarithmische Spirale*. Offensichtlich gilt

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$$

und

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(-p\sin pt - \cos pt) \\ e^{-t}(p\cos pt - \sin pt) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung Kurven in $\mathbb{R}^2$ kann man auch als Abbildung $\gamma(t) : M \to \mathbb{C}$ betrachten:

$$\begin{array}{l} t \mapsto z(t) := \gamma_1(t) + i\gamma_2(t) \text{ mit} \\ \gamma : M \to \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Für die logarithmische Spirale aus Beispiel 1.3 bekommt man so:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-t}(\cos pt + i\sin pt) \\ &= e^{-t}e^{ipt} \\ &= e^{t(-1+ip)}. \end{aligned}$$

1.1 Drehung und Streckung in der komplexen Zahlenebene

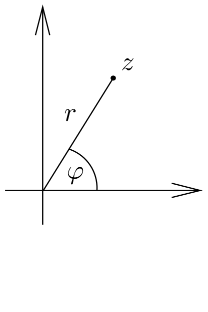
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy = re^{i\varphi}$. Für $a, \alpha \in \mathbb{R}, a > 0$ ist

$$z \mapsto az \quad \Leftrightarrow \quad r \mapsto ar \text{ und } \varphi \mapsto \varphi$$

eine *Streckung* (Verlängerung für $a > 1$ bzw. Verkürzung für $a < 1$) und

$$z \mapsto e^{i\alpha}z \quad \Leftrightarrow \quad r \mapsto r \text{ und } \varphi \mapsto \varphi + \alpha$$

eine *Drehung* um den Winkel α.



Was passiert nun mit der logarithmischen Spirale?

$$\begin{aligned} z(t) = e^{t(-1+ip)} \quad \underset{a\text{-Streckung}}{\longrightarrow} \quad & az(t) \overset{a=e^A}{=} e^{A+t(-1+ip)} \\ = \quad & e^{(t-A)(-1+ip)} e^{ipA} \\ = \quad & z(t-A)e^{ipA} \\ \underset{-pA\text{-Drehung}}{\longrightarrow} \quad & z(t-A). \end{aligned}$$

Man erhält also wieder die ursprüngliche Spirale (mit verschobenem Anfangspunkt).

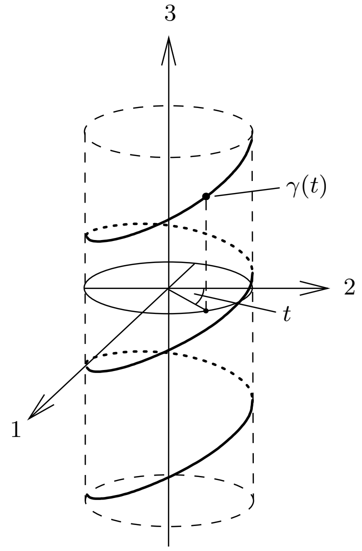
Proposition 1.2 *Die logarithmische Spirale ist für $M = \mathbb{R}$ invariant bezüglich der Drehstreckung*

$$z \mapsto e^A \cdot e^{-ipA} = e^{A(1-ip)}.$$

Beispiel 1.4 (Helix) Betrachte

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad , M = \mathbb{R}.$$

- Die Kurve liegt auf dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$.
- Der Parameter t entspricht dem Winkel zwischen der x-Achse und der Projektion von $\gamma(t)$ auf die xy-Ebene.



1.2 Immersierte Kurven

Wir haben in Beispiel 1.1 bereits zwei unterschiedlich parametrisierte Kurven gesehen, deren Spuren identisch waren. Diese "Gleichheit" beschreiben wir jetzt mathematisch:

Definition 1.3 (Diffeomorphismus & Äquivalenz von Kurven)

a) Seien $M, \widetilde{M}$ Intervalle. Dann heißt $\varphi : M \to \widetilde{M}$ Diffeomorphismus *falls:*

i) φ *ist bijektiv*

ii) $\varphi \in C^\infty$

iii) $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in M.$

b) Seien $\gamma : M \to \mathbb{R}^n$ *und* $\widetilde{\gamma} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^n$ *parametrisierte Kurven. Dann heißen* γ *und* $\widetilde{\gamma}$ äquivalent ($\gamma \sim \widetilde{\gamma}$)*, wenn es einen Diffeomorphismus* $\varphi : \widetilde{M} \to M$ *gibt, so dass* $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$*. Sie heißen* orientiert äquivalent ($\gamma \overset{\circ}{\sim} \widetilde{\gamma}$)*, wenn* $\varphi' > 0$*.*

c) Eine (orientierte) immersierte Kurve in $\mathbb{R}^n$ *ist eine Äquivalenzklasse von regulären (orientierten) Kurven.*

Bemerkung

- Man überlege sich, dass $\sim$ wirklich eine Äquivalenzrelation ist.
- γ regulär, φ Diffeomorphismus $\Rightarrow \widetilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ ist regulär und
  $\widetilde{\gamma}' = \gamma' \circ \varphi \cdot \varphi' \Rightarrow |\widetilde{\gamma}'| = |\gamma'| \cdot |\varphi'|$.

Die beiden Kurven aus Beispiel 1.1 sind also dieselbe immersierte Kurve.

1.3 Längen von Kurven

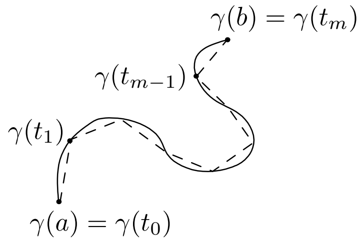
Definition 1.4 (Länge) *Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *eine parametrisierte Kurve. Dann ist die* Länge von γ *definiert durch:*

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Dabei ist $\|\gamma'(t)\|$ *die Länge des Tangentialvektors.*

Motivation: Für $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ gilt

$$\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \underset{(t_{k+1}-t_k)\to 0}{\longrightarrow} (t_{k+1} - t_k) \cdot \|\gamma'(t_k)\|.$$



Sei $\varepsilon := \max_k \|t_{k+1} - t_k\|$, dann gilt

$$\sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Lemma 1.3 *Seien* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *und* $\widetilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *zwei äquivalente Kurven,* $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$*. Dann gilt:*

$$L(\gamma) = L(\widetilde{\gamma}).$$

Beweis $\gamma \sim \widetilde{\gamma} \Leftrightarrow$ Es existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ mit

$$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$$

und $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [c,d]$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} L(\widetilde{\gamma}) &= \int_c^d \|\widetilde{\gamma}'(t)\|\, dt, \quad \text{wobei} \\ \widetilde{\gamma}'(t) &= (\gamma(\varphi(t)))' \\ &\overset{s=\varphi(t)}{=} \gamma'(s) \cdot \varphi'(t) \\ \Rightarrow \quad \|\widetilde{\gamma}(t)\| &= \|\widetilde{\gamma}'(s)\| \cdot |\varphi'(t)|. \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} L(\widetilde{\gamma}) &= \int_c^d \|\widetilde{\gamma}'(t)\| \cdot |\varphi'(t)|\, dt \\ &\overset{Trafo.}{=} \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \\ &= L(\gamma). \end{aligned}$$

Das heißt $L(\gamma)$ ist die Länge der immersierten Kurve. □

Zu Beispiel 1.1:

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $M = [0, \pi]$, $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, $\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in M$.

$$\Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_0^\pi \|\gamma'(t)\|_2\, dt = \int_0^\pi dt = \pi.$$

Manchmal sind Längen auch für unendliche Intervalle definiert. Betrachte zum Beispiel die logarithmische Spirale:

Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} z : [t_0, \infty) &\to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto z(t) = e^{t(-1+ip)} \quad , p \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^2$ haben wir dann

$$\gamma(t) = (Re(z(t)), Im(z(t))) = (\gamma_1, \gamma_2)$$

mit

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= |z'(t)|, \text{ da} \\ |z'(t)| &= \sqrt{Re^2(z'(t)) + Im^2(z'(t))} \\ &= \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} \\ &= \|\gamma'(t)\|. \end{aligned}$$

Für die Länge gilt also

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \lim_{R\to\infty} \int_{t_0}^{R} \|\gamma'(t)\|\, dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} \|\gamma'(t)\|\, dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} |z'(t)|\, dt. \end{aligned}$$

Dabei ist $z'(t) = (-1+ip)e^{t(-1+ip)}$ also

$$|z'(t)| = \sqrt{1+p^2} \cdot |e^{-t}| \cdot |e^{ipt}| = \sqrt{1+p^2} \cdot e^{-t}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} |z'(t)|\, dt &= \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{1+p^2}\; e^{-t}\, dt \\ &= \sqrt{1+p^2} \int_{t_0}^{\infty} e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

Letztlich ist $L(\gamma) = \sqrt{1+p^2}\; e^{-t_0}$, also hat die logarithmische Spirale endliche Länge, obwohl das Intervall unendlich ist.

1.4 Parametrisierung nach der Bogenlänge

Definition 1.5 (Bogenlängenparametrisierung) *Eine parametrisierte Kurve $\gamma : M \to \mathbb{R}^n$ heißt* parametrisiert nach der Bogenlänge, *falls*

$$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in M.$$

Bemerkung Wenn man die Kurve als Trajektorie betrachtet, bedeutet dies, dass man die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft.

Satz 1.4 *Jede reguläre parametrisierte Kurve ist äquivalent zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve. Das bedeutet, jede immersierte Kurve lässt sich nach der Bogenlänge parametrisieren.*

Beweis Sei $\gamma : M \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve und $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}$. O.B.d.A. $M = [0, m]$. Definiere:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : M &\to \widetilde{M} \\ \varphi^{-1}(t) &:= \int_0^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau. \end{aligned}$$

φ^{-1} ist streng monoton wachsend, also bijektiv und somit invertierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned}\|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| &\overset{t=\varphi(s)}{=} \|\gamma'(t) \cdot \varphi'(s)\| \\ &= \|\gamma'(t) \cdot \frac{1}{(\varphi^{-1}(t))'}\| \\ &= \|\frac{\gamma'(t)}{\gamma'(t)}\| \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

2 Ebene Kurven

Definition 2.1 (Ebene Kurven) *Eine Kurve* $\gamma : M \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ *heißt* ebene Kurve.

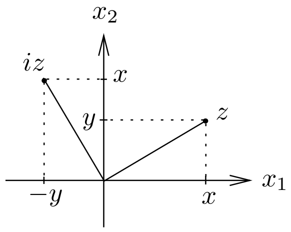
2.1 Krümmung ebener Kurven

Betrachte die Abbildung $(x, y) \mapsto (-y, x)$. Sie ist eine Drehung um 90° in positiver Richtung. Diese lineare Abbildung wird in $\mathbb{R}^2$ dargestellt als

$$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

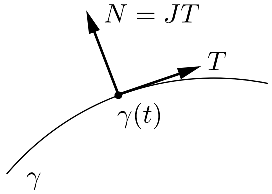
In der komplexen Ebene beschreibt man dies durch Multiplikation mit $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Dann ist

$$i \cdot z = i \cdot (x + iy) = ix - y = -y + ix.$$



Sei nun $\gamma : M \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, also $\|T(t)\| = 1 \ \forall t \in M$. Definiere:

$$N := JT$$



Dann ist $\|N\| = 1$ und $\langle N, T\rangle = 0$. Ausserdem ist

$$\begin{aligned} \langle T, T\rangle = 1 \quad &\Rightarrow \quad 2\langle T, T'\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad T \perp T' \\ &\Leftrightarrow \quad T' \| N \\ &\Leftrightarrow \quad T' = \kappa N, \text{ mit } \kappa : M \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Weiter hat man:

$$\begin{aligned} N' = (JT)' &= JT' \\ &= J\kappa N = \kappa JJT \\ &= -\kappa T. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende

Definition 2.2 (Frenetgleichungen & Krümmung) *Sei* $M \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $\gamma : M \to \mathbb{R}^2$ *nach der Bogenlänge parametrisiert. Weiter bezeichne* $T := \gamma'$ *und* $N := JT$*. Das System von Gleichungen:*

$$\gamma' = T, \quad T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T$$

nennt man die Frenet Gleichungen *der Kurve* γ*. Die Funktion* $\kappa : M \to \mathbb{R}$ *heißt* Krümmung *von* γ*.*

Bemerkung Im Gegensatz zum Tangentialvektor, dessen Länge ja von der Parametrisierung abhängt, ist es hilfreich den Normalenvektor immer auf Länge 1 zu normieren. Also allgemein

$$N := \frac{JT}{||JT||}.$$

2.1.1 Geometrische Bedeutung der Krümmung

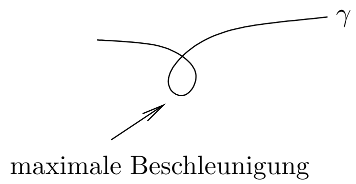
In der physikalischen Interpretation entspricht

$$\left.\begin{aligned} \gamma(t) &\leftrightarrow \text{dem Ort} \\ \gamma'(t) &\leftrightarrow \text{der Geschwindigkeit} \\ \gamma''(t) &\leftrightarrow \text{der Beschleunigung} \end{aligned}\right\} \text{ zum Zeitpunkt } t.$$

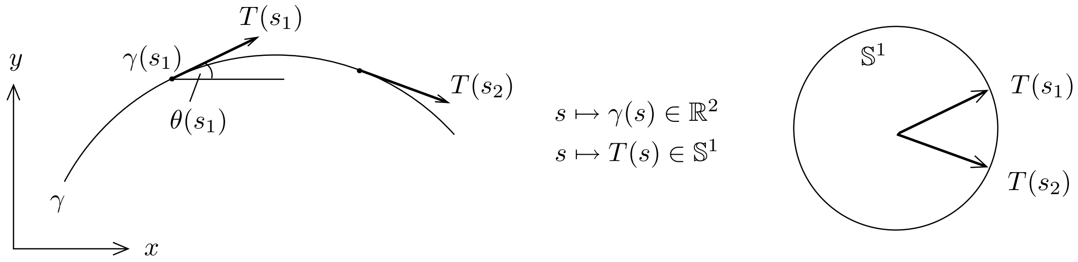
Im Falle nach der Bogenlänge parametrisierter Kurven gelten die Frenet-Gleichungen, also gibt es keine Änderung des Betrages der Geschwindigkeit, sondern nur eine Richtungsänderung von T, d.h. es handelt sich nur um eine seitliche Beschleunigung,

$$T' = \kappa N \Rightarrow \|T'\| = |\kappa|.$$

Zu erwarten:



Berechnung der Krümmung:



Wir stellen T wie folgt dar:

- im Reellen
$$T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$$
- im Komplexen
$$T(s) = e^{i\theta(s)}, \text{ mit } N(s) = iT(s) = ie^{i\theta(s)}.$$

Dabei ist $\theta(s)$ der Winkel zwischen T und $x-$Achse bzw. reeller Achse.

Nun ist

$$\begin{aligned} T'(s) &= (e^{i\theta(s)})' \\ &= i\theta'(s)e^{i\theta(s)}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach den Frenet-Gleichungen

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa N \\ &= \kappa(s)ie^{i\theta(s)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\kappa(s) = \theta'(s)}$$

Die Krümmung ist also die Winkelgeschwindigkeit von T.

Bemerkung Geometrisch ist θ nur bis auf $2\pi N$, $N \in \mathbb{Z}$ definiert. Für jede Kurve kann man aber $\theta : M \to \mathbb{R}$ als glatte Funktion wählen.

Proposition 2.1 (Eindeutigkeit von θ) *Sei $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $T : M \to \mathbb{S}^1$ eine C^1-Abbildung. Dann gibt es eine C^1-Funktion $\theta : M \to \mathbb{R}$, mit $T(s) = e^{i\theta(s)}$. Dabei ist $\theta(s)$ auf M eindeutig bestimmt bis auf $\theta \to \theta + 2\pi N$, $N \in \mathbb{Z}$.*

Beweis Wähle s_0 und $\theta_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $T(s_0) = e^{i\theta_0}$ ist. (Nach der Bemerkung ist θ_0 nur bis auf Vielfaches von 2π eindeutig).
Sei

$$\theta(s) := \theta_0 + \int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt.$$

Zu zeigen: $T(s) = e^{i\theta(s)}$.
Dazu betrachten wir

$$C(s) := e^{-i\theta(s)}T(s) \in \mathbb{S}^1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} C(s_0) &= e^{-i\theta_0}T(s_0) = 1 \\ C'(s) &= -i\theta'(s)e^{-i\theta(s)}T(s) + e^{-i\theta(s)}T'(s) \\ &\overset{\theta'=\kappa}{=} e^{-i\theta(s)}(-i\kappa(s)T(s) + T'(s)) \\ &\overset{Frenet,\, N=iT}{=} e^{-i\theta(s)}(-\kappa(s)N(s) + \kappa(s)N(s)) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C(s) \equiv 1.$$

□

2.1.2 Krümmung nicht nach der Bogenlänge parametrisierter Kurven

Seien

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{C} & & \text{nach der Bogenlänge parametrisiert } (\widetilde{\gamma}'' = \widetilde{T}' = \widetilde{\kappa}\widetilde{N}), \text{ und} \\ \varphi : [a, b] \to [0, L] & & \text{ein Diffeomorphismus mit } \varphi'(t) > 0. \end{array}$$

Dann ist $\gamma(t) := \widetilde{\gamma}(\varphi(t))$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t)$ zwar noch regulär, jedoch im Allgemeinen *nicht* mehr nach der Bogenlänge parametrisiert.

Wir haben Krümmung für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven definiert und führen nun die Krümmung allgemeiner Kurven darauf zurück. Dementsprechend ist die Krümmung in einem Punkt von γ definiert als die Krümmung von $\widetilde{\gamma}$ in diesem Punkt. Diese Größe leiten wir jetzt aus dem Normalenanteil von $\gamma'' = T'$ in Richtung $N = \widetilde{N}$ ab:

$$\gamma'(t) \overset{s=\varphi(t)}{=} \frac{d\widetilde{\gamma}}{ds} \cdot \varphi'(t) \overset{v=\varphi'(t)}{=} \widetilde{\gamma}'v = \widetilde{T}v \Rightarrow v = ||\gamma'||.$$

Da

$$\frac{d\widetilde{T}}{dt} = \frac{d\widetilde{T}}{ds} \cdot \varphi'(t) \overset{Frenet}{=} \widetilde{\kappa}v\widetilde{N},$$

gilt

$$\gamma''(t) = \frac{d}{dt}(\widetilde{T}v) = \frac{d\widetilde{T}}{dt}v + \widetilde{T}\frac{dv}{dt} = \widetilde{\kappa}v^2\widetilde{N} + \widetilde{T}v'.$$

Also

$$\langle\gamma'', N\rangle = \langle\gamma'', \widetilde{N}\rangle = \widetilde{\kappa}v^2 = \langle\gamma'', J\widetilde{T}\rangle = \langle\gamma'', J\frac{\gamma'}{v}\rangle$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{\kappa} = \frac{1}{v^3}\langle\gamma'', J\gamma'\rangle.$$

Wegen $\langle A, JB\rangle = \langle\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{smallmatrix}\right)\rangle = -a_1b_2 + a_2b_1 = -det(A, B)$ haben wir also bewiesen:

Satz 2.2 (Krümmung einer ebenen Kurve) *Sei $\gamma : M \to \mathbb{C}$ regulär und $\in C^2$. Dann ist die Krümmung gegeben durch*

$$\kappa = -\frac{det(\gamma'', \gamma')}{||\gamma'||^3}.$$

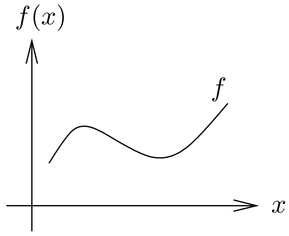
Beispiel 2.1 (Graph als Kurve) Wir können den Graphen einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ als Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ interpretieren.
Dann gilt:

$$\gamma(x) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix}\right), \ \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}, \ \gamma''(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(x) \end{pmatrix}$$

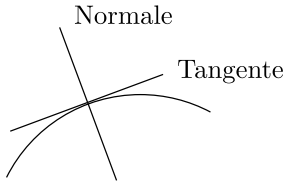
$$||\gamma'(x)|| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

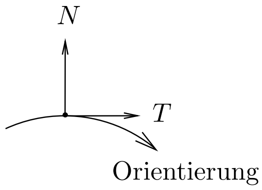
$$\det(\gamma'', \gamma') = \det\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ f'' \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ f' \end{smallmatrix}\right) = -f''$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{f''}{(1 + (f')^2)^{3/2}}.$$



2.2 Lokale Eigenschaften ebener Kurven

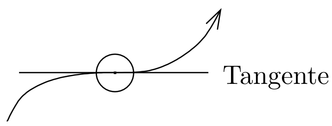




Die Orientierung ist für das Vorzeichen der Krümmung bedeutsam.

Proposition 2.3 (Wendepunkte) *Sei $\gamma : M \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve. Dann gilt:*

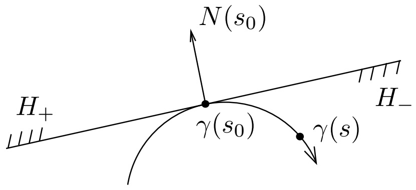
- $\kappa(t_0) \{ \lesseqgtr \} 0$ $\Leftrightarrow$ *Für ein $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{\gamma(t) \mid t \in (t_o - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\} \setminus \{\gamma(t_0)\}$ vollständig in der offenen Halbebene $\{\gamma(t_0) + x \mid x \in \mathbb{R}^2, \langle N(t_0), x\rangle\{\lesseqgtr\}0\}$ enthalten.*
- $\kappa(t_0) = 0$ *und* $\kappa'(t_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ *γ hat in $\gamma(t_0)$ einen* Wendepunkt*, d. h. für jede bliebig kleine Umgbung U_{t_0} von t_0 liegen auf jeder Seite der der Tangente an $\gamma(t_0)$ Punkte aus $\{\gamma(t) \mid t \in U_{t_0}\}$.*



Beweis Sei $\gamma(s)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Definiere

$$h(s) := \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), N(s_0) \rangle, \text{ und } H_\pm := \left\{ \gamma(s_0) + x \mid x \in \mathbb{R}^2, \langle x, N(s_0) \rangle \left\{ \substack{> \\ <} \right\} 0 \right\}.$$

Es gilt: $h(s) \begin{cases} > 0 & \Leftrightarrow \quad \gamma(s) \in H_+ \\ < 0 & \Leftrightarrow \quad \gamma(s) \in H_- \end{cases}$



Taylorentwicklung von h um die Stelle s_0:

$$\begin{aligned}
h(s_0) &= 0. \\
h'(s) &= \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), N(s_0) \rangle' = \langle \gamma'(s), N(s_0) \rangle = \langle T(s), N(s_0) \rangle \\
\Rightarrow \ h'(s_0) &\overset{T(s_0) \perp N(s_0)}{=} 0. \\
h''(s) &= \langle T(s), N(s_0) \rangle' = \langle T'(s), N(s_0) \rangle \overset{Frenet}{=} \langle \kappa(s) N(s), N(s_0) \rangle \\
\Rightarrow \ h''(s_0) &= \kappa(s_0). \\
h'''(s) &= \langle \kappa(s) N(s), N(s_0) \rangle' = \langle \kappa'(s) N(s) + \kappa(s) N'(s), N(s_0) \rangle \\
\Rightarrow \ h'''(s_0) &\overset{N'(s_0) \perp N(s_0)}{=} \kappa'(s_0).
\end{aligned}$$

Also ist

$$h(s) = \frac{1}{2} \kappa(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6} \kappa'(s_0)(s - s_0)^3 + o|(s - s_0)^3|.$$

Für $\kappa(s_0) \left\{ \substack{< \\ >} \right\} 0$ gibt es also eine ε-Umgebung U_ε um s_0, so dass für alle $s \in U_\varepsilon$ gilt: $h(s) \left\{ \substack{< \\ >} \right\} 0$. Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

Wenn $\kappa(s_0) = 0$ und $\kappa'(s_0) \neq 0$ ist, dann gilt $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ s_1, s_2 \in U_\varepsilon \ : \ h(s_1) > 0, h(s_2) < 0$, also die zweite Aussage. □

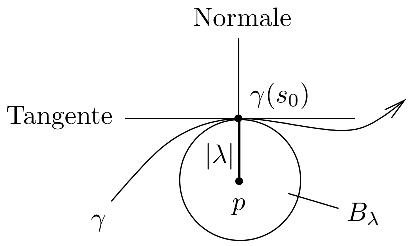
2.2.1 Schmiegekreise

Sei γ eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $s_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\kappa(s_0) \neq 0$. Betrachte alle Kreise, die γ in $\gamma(s_0)$ berühren, d.h. deren Tangente an diesem Punkt mit der Tangente an die Kurve übereinstimmt.

Für jeden solchen Kreis gilt: Der Mittelpunkt p liegt auf der Normalen, also

$$p = \gamma(s_0) + \lambda N(s_0), \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Wir zeigen zunächst, dass sich die Kurve auch wirklich an die genannten Kreise "anschmiegt" und definieren anschließend den Begriff.



Proposition 2.4 *Seien γ und λ wie oben mit $\kappa(s_0) \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt:*

$$\lambda\kappa(s_0)\ \left\{\begin{smallmatrix}<\\>\end{smallmatrix}\right\} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\textit{Für ein } s \in U_\varepsilon(s_0) \textit{ liegt } \gamma(s) \left\{\begin{smallmatrix}\textit{ausserhalb}\\ \textit{innerhalb}\end{smallmatrix}\right\} \textit{ des} \\ \textit{Kreises } B_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x-p| < |\lambda|\}.\end{array}$$

Beweis Definiere

$$\begin{aligned} d(s) &:= |\gamma(s) - p|^2 - |\lambda|^2, \\ d(s) \left\{\begin{smallmatrix}>\\<\end{smallmatrix}\right\} 0 &\Leftrightarrow \gamma(s) \text{ liegt } \left\{\begin{smallmatrix}\text{ausserhalb}\\ \text{innerhalb}\end{smallmatrix}\right\} B_\lambda. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} d(s) &\overset{(1)}{=} |\gamma(s) - \gamma(s_0) - \lambda N(s_0)|^2 - |\lambda|^2 \Rightarrow d(s_0) = 0. \\ d'(s) &= \langle \gamma(s) - \gamma(s_0) - \lambda N(s_0), \gamma(s) - \gamma(s_0) - \lambda N(s_0)\rangle' \\ &= 2\langle \gamma'(s), \gamma(s) - \gamma(s_0) - \lambda N(s_0)\rangle \\ &\Rightarrow d'(s_0) = 0. \\ d''(s) &= 2\langle T'(s), \gamma(s) - \gamma(s_0) - \lambda N(s_0)\rangle + 2\langle T(s), T(s)\rangle. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} d''(s_0) &= 2\langle T'(s_0), -\lambda N(s_0)\rangle + 2 \\ &\overset{Frenet}{=} -2\lambda\kappa(s_0)\langle N(s_0), N(s_0)\rangle + 2 \\ &= 2(1 - \lambda\kappa(s_0)). \end{aligned}$$

Taylorentwicklung:

$$d(s) = (1 - \lambda\kappa(s_0))(s - s_0)^2 + O(|s - s_0|^3).$$

In einer kleinen Umgebung gilt also:

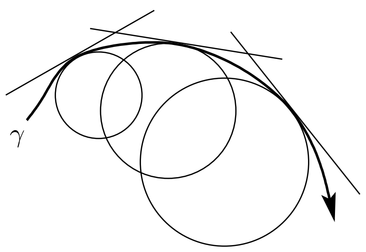
$$d(s) \left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda\kappa(s_0)\ \left\{\begin{smallmatrix}<\\>\end{smallmatrix}\right\}\ 1.$$

□

Definition 2.3 (Schmiegekreis) *Sei $\kappa(s_0) \neq 0$. Dann heißt der Kreis mit Mittelpunkt $\gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} N(s_0)$ und Radius $|\frac{1}{\kappa(s_0)}|$ der* Schmiegekreis *von γ in $\gamma(s_0)$.*

Bemerkung

Tangente	=	lineare Approximation
Schmiegekreis	=	quadratische Approximation



Spezialfälle: Wenn γ ein Kreis ist, dann sind alle Schmiegekreise gleich γ, wenn $\kappa(s_0) = 0$ ist, dann ist der Schmiegekreis eine Gerade.

2.3 Evoluten & Evolventen

Wir betrachten nun die Kurve, die durch die Mittelpunkte der Schmiegekreise beschrieben wird.

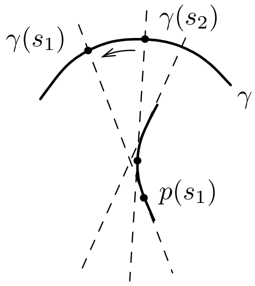
Definition 2.4 (Evolute) *Sei $\gamma(s)$ nach der Bogenlänge parametrisiert und $\kappa(s) \neq 0$ für alle $s \in M$. Dann heißt die parametrisierte Kurve*

$$p(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s)$$

Evolute *von γ.*

$p(s)$ ist das Zentrum des Schmiegekreises, der γ im Punkt $\gamma(s)$ approximiert.

Proposition 2.5 (Eigenschaften der Evolute)



a) p ist eine reguläre Kurve nur da, wo $\kappa'(s) \neq 0$.

b) Die Tangente der Evolute in $p(s)$ ist normal zu γ in $\gamma(s)$.

c) Seinen N_1, N_2 die Normalen von γ in zwei benachbarten Punkten s_1 und s_2. Für $s_2 \to s_1$ konvergiert der Schnittpunkt der Normalen gegen den Punkt $p(s_1)$ der Evolute von γ.

Beweis *Zu a):* Für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven gilt:

$$p'(s) = \gamma' - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} N(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N'(s) \overset{Frenet}{=} -\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} N(s),$$

also

$$|p'(s)| = |\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}| \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \kappa'(s) \neq 0.$$

Sei $t \mapsto \gamma(t)$ eine beliebige reguläre Parametrisierung ($t \mapsto s(t)$ Diffeomorphismus $\rightsquigarrow$ Parametrisierung nach der Bogenlänge) und $t \mapsto p(t)$ die entsprechende Parametrisierung der Evolute. Es ist

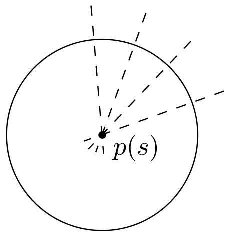
$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Da $\frac{ds}{dt} \neq 0$, ist also

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \left| \frac{dp}{ds} \right| \neq 0.$$

Deswegen gelten die Behauptungen allgemein für reguläre parametrisierte Kurven.

Spezialfall: Falls γ ein Kreis ist, ist $p(s) = p$ für alle s. Dann ist $\kappa(s)$ konstant, also $\kappa'(s) = 0$.

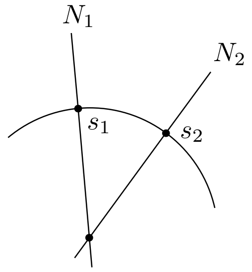


Zu b): Aus a) folgt $p'(s)||N(s)$, da

$$p'(s) = -\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} N(s).$$

Zu c): Die Normalen von γ in den Punkten $\gamma(s_1)$ und $\gamma(s_2)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} N_1 &: \gamma(s_1) + \lambda N(s_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ N_2 &: \gamma(s_2) + \mu N(s_2), \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Berechnung des Schnittpunkts:

$$\gamma(s_1) + \lambda N(s_1) = \gamma(s_2) + \mu N(s_2).$$

Taylorentwicklung von γ und N um s_1 liefert für $s_2 \to s_1$:

$$\gamma(s_2) + \mu N(s_2) = \gamma(s_1) + T(s_1)(s_2 - s_1) + \mu(N(s_1) + \underbrace{N'(s_1)}_{=-\kappa(s_1)T(s_1)}(s_2 - s_1)) + o(s_2 - s_1).$$

Damit schreibt sich die Schnittpunktgleichung als

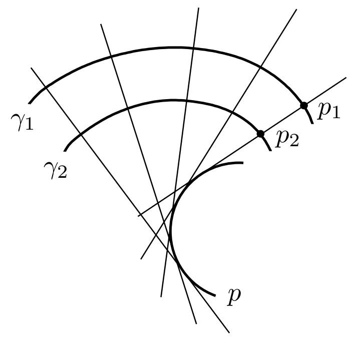
$$\gamma(s_1) + \lambda N(s_1) = \gamma(s_1) + \mu N(s_1) + (T(s_1) - \mu\kappa(s_1)T(s_1))(s_2 - s_1) + o(s_2 - s_1)$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu, \qquad \mu = \frac{1}{\kappa(s_1)}.$$

Also ist der Schnittpunkt $p(s_1)$. □

Definition 2.5 (Evolvente) *Sei $p : I \to \mathbb{R}^2$ die Evolute von $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. Dann nennt man γ* Evolvente *von p.*

Bemerkung Erst nach der Wahl eines Startpunktes p_s auf einer Tangente von p ist eine Evolvente eindeutig bestimmt.



2.4 Kongruenz von Kurven

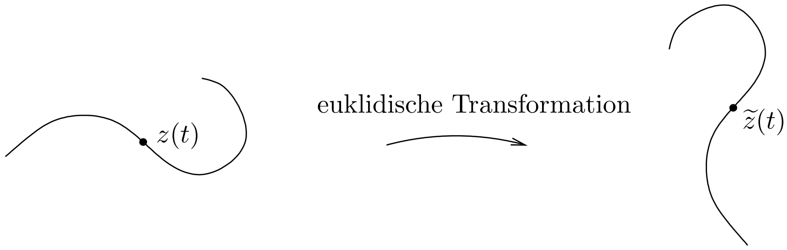
Betrachte folgende Transformationen in der komplexen Ebene:

- $z \mapsto az, \ a \in \mathbb{C}$ ist eine Drehstreckung, insbesondere ist $z \mapsto e^{i\alpha}z, \ \alpha \in \mathbb{R}$ eine Drehung um den Winkel α (um 0).
- $z \mapsto z + a, \ a \in \mathbb{C}$ ist eine Translation um den Vektor a

Definition 2.6 (Euklidische Bewegungen & kongruente Kurven)

i) Transformationen $z \mapsto e^{i\alpha}z + a,\ a \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{R}$ *heißen* euklidische Bewegungen der Ebene. *Die euklidischen Bewegungen der Ebene bilden eine Gruppe.*

ii) Zwei parametrisierte Kurven, $z, \widetilde{z}: I \to \mathbb{C}$ *heißen* gleichsinnig kongruent, *wenn es eine euklidische Bewegung, also* $a \in \mathbb{C}$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass* $\widetilde{z}(t) = e^{i\alpha}z(t) + a$ *ist.*



Lemma 2.6 (Krümmung kongruenter Kurven) *Gleichsinnig kongruente Kurven haben an entsprechenden Stellen dieselbe Krümmung.*

Beweis Seien $z(s),\ \widetilde{z}(s)$ gleichsinnig kongruent und nach der Bogenlänge parametrisiert. Also ist $\widetilde{z}(s) = e^{i\alpha}z + a$ und es gilt:

$$\widetilde{T}(s) = \widetilde{z}'(s) = (e^{i\alpha}z(s) + a)' = e^{i\alpha}T(s)$$

$$\Rightarrow \widetilde{T}' = e^{i\alpha}T' \stackrel{Frenet}{=} e^{i\alpha}\kappa N.$$

Andererseits ist

$$\widetilde{N}(s) = i\widetilde{T}(s) = ie^{i\alpha}T(s) = e^{i\alpha}N(s)$$

$$\Rightarrow \widetilde{T}' \stackrel{Frenet}{=} \widetilde{\kappa}\widetilde{N} = \widetilde{\kappa}e^{i\alpha}N.$$

Somit gilt $\widetilde{\kappa} = \kappa$. □

Satz 2.7 (Hauptsatz der Kurventheorie im $\mathbb{R}^2$) *Es sei eine stetige Funktion* $\kappa : I \to \mathbb{R}$ *gegeben. Dann gibt es eine reguläre parametrisierte Kurve* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *(oder* $z : I \to \mathbb{C}$*), so dass* $s \in I$ *die Bogenlänge und* $\kappa(s)$ *die Krümmung von* γ *ist. Jede andere Kurve* $\widetilde{\gamma}$ *die dieselben Bedingungen erfüllt, ist gleichsinnig kongruent zu* γ.

Bemerkung Hierbei spielt im Gegensatz zu immersierten Kurven die Parametrisierung eine große Rolle. Sonst erhielte man keine Eindeutigkeit.

Beweis

i) Existenz:

$$Idee: \quad s \mapsto \kappa(s) \stackrel{\kappa=\theta'}{\rightsquigarrow} \theta = \underbrace{\int \kappa\, ds}_{\text{eindeutig bis auf Drehung}} \stackrel{T=e^{i\theta}}{\rightsquigarrow} \gamma = \underbrace{\int T\, ds.}_{\text{eindeutig bis auf Translation}}$$

Wähle also $s_0 \in I$ und definiere

$$\theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(\xi)d\xi,\ T(s) := e^{i\theta(s)},\ N(s) := iT(s)$$

$$z(s) := \int_{s_0}^{s} T(\xi) d\xi.$$

Die Kurve $z(s)$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert und hat an der Stelle $z(s)$ die Krümmung $\kappa(s)$, denn es gilt:

$$z'(s) = T(s) = e^{i\theta(s)} \quad \text{also } |z'(s)| = 1 \text{ und}$$

$$\begin{aligned} T'(s) &= (e^{i\theta(s)})' = i\theta'(s) \cdot e^{i\theta(s)} = \theta'(s) N(s) \\ &\Rightarrow \kappa(s) = \theta'(s) \text{ ist Krümmung an der Stelle } z(s). \end{aligned}$$

ii) Eindeutigkeit:

Zu zeigen ist, dass jede Kurve $\widetilde{z} : I \to \mathbb{C}$ mit den selben Eigenschaften gleichsinnig kongruent zu z ist. D.h. man findet eindeutige α und a, so dass $\widetilde{z} = e^{i\alpha} z + a$. Wähle also $s_0 \in I$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \widetilde{z}(s_0) = e^{i\alpha} z(s_0) + a \\ \widetilde{T}(s_0) = e^{i\alpha} T(s_0) \end{array} \Rightarrow \alpha, a \text{ sind eindeutig bestimmt.}$$

Definiere

$$\widehat{z}(s) := e^{i\alpha} z(s) + a. \tag{2}$$

Zu zeigen:

$$\widehat{z}(s) = \widetilde{z}(s) \ \forall s \in I.$$

Nun gilt:

$$\widetilde{T}(s_0) = e^{i\alpha} T(s_0) \overset{(1)}{=} \widehat{T}(s_0)$$

$$\Rightarrow e^{i\widetilde{\theta}(s_0)} = e^{i\widehat{\theta}(s_0)}$$

$$\Rightarrow \widetilde{\theta}(s_0) = \widehat{\theta}(s_0) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

und

$$\widetilde{\theta}'(s) = \widetilde{\kappa}(s) = \kappa(s) \overset{Lemma\, 2.6}{=} \widehat{\kappa}(s) = \widehat{\theta}'(s)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \widetilde{\theta}(s) = \widehat{\theta}(s) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \ \ \forall s \in I \\ &\Rightarrow \quad \widehat{T}(s) = \widetilde{T}(s) \ \ \forall s \in I \\ &\Rightarrow \quad \widehat{z}'(s) = \widetilde{z}'(s) \ \ \forall s \in I. \end{aligned}$$

Ausserdem ist

$$\widehat{z}(s_0) = \widetilde{z}(s_0)$$

$$\Rightarrow \widehat{z}(s) = \widetilde{z}(s) \ \ \forall s \in I.$$

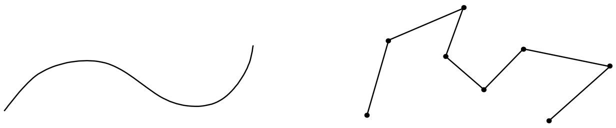
$\square$

3 Diskrete Kurven & Traktrixe

Definition 3.1 (Diskrete Kurven) *Eine* diskrete Kurve *in* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Abbildung*

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

wobei I ein (eventuell unendliches) Intervall in $\mathbb{Z}$ ist.
Eine diskrete Kurve heißt regulär, *wenn für alle $n \in I$ mit $n+1 \in I$ gilt:* $\|\gamma_{n+1} - \gamma_n\| \neq 0$.

glatt  diskret

Bemerkung Diskrete Kurven sind in dem Sinne "parametrisierte" Kurven, dass Intervalle $[n, n+1], n \in \mathbb{Z}$ auf die Kanten $\overline{\gamma_n \gamma_{n+1}}$ abgebildet werden. Da diese jedoch durch die Endpunkte festgelegt sind und die Intervalllänge konstant 1 ist, kann man γ also nicht umparametrisieren (wenn eine Kante gleichmäßig durchlaufen werden soll).
Frage: Welche diskreten Kurven kann man nach der Bogenlänge parametrisiert nennen?

Definition 3.2 (Diskrete nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven)

i) Eine diskrete Kurve heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, *wenn*

$$\forall\ n, n+1 \in I : \|\gamma_{n+1} - \gamma_n\| = 1.$$

ii) Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine diskrete nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$T_n := \gamma_{n+1} - \gamma_n, \quad \|T_n\| = 1$$

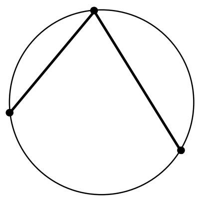
Tangentialvektor.

3.1 Krümmung diskreter Kurven

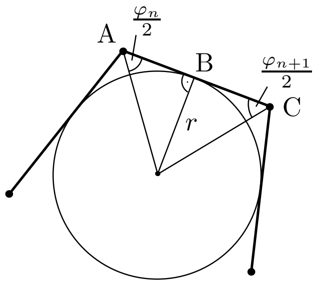
Idee: definiere durch den "Schmiegekreis"

1. Idee: 3 Punkte definieren immer einen eindeutigen Kreis
   Argument: Diskrete Kurve $\overset{Limes\,kleiner\,Kanten}{\longrightarrow}$ glatte Kurve.

   Der Schmiegekreis kann nicht beliebig klein werden, wenn die Längen der Kanten fest sind (Durchmesser)
   $\Rightarrow$ Diese Krümmung kann für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven nicht größer als 2 werden.



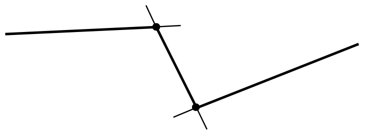
2. Idee: Der Kreis muss 3 aufeinanderfolgende Kanten berühren



$$\begin{aligned}
\Delta_\gamma &:= \gamma_{n+1} - \gamma_n \\
||\Delta_\gamma|| &= r(\cot\frac{\varphi_n}{2} + \cot\frac{\varphi_{n+1}}{2}) \\
\Rightarrow \kappa := \frac{1}{r} &= \frac{\cot\frac{\varphi_n}{2} + \cot\frac{\varphi_{n+1}}{2}}{||\Delta_\gamma||}.
\end{aligned}$$

Falls nun φ_n oder $\varphi_{n+1} \to 0$ dann $\kappa \to \infty$.

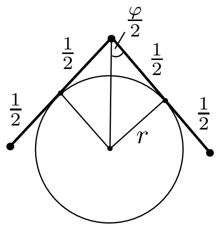
Problem: Was soll man im folgenden Fall machen?



man kann zwar die
Kanten verlängern,
erhält jedoch trotzdem
keine eindeutigen Kreise!

3. Idee: Für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven gilt

$$r = \frac{1}{2}\tan\frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow \kappa = 2\cot\frac{\varphi}{2}$$



3.2 "Traktrixe"

3.2.1 Traktrix einer glatten Kurve

Die Kurve in Beispiel 1.2 war die Traktix einer Geraden, d.h. in der Interpretation der Schleppkurve bewegt sich das ziehende Objekt entlang einer Geraden.

Man kann jedoch auch die Traktrix allgemeiner Kurven betrachten:

Definition 3.3 (Traktrix) *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve. Eine Kurve $\widehat{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n$ heißt* Traktrix *von γ, falls für $v(t) := \widehat{\gamma}(t) - \gamma(t)$ gilt:*

(1) $\|v(t)\| \equiv const$

(2) $v(t) \parallel \widehat{\gamma}'(t)$.

Bemerkung Eine Traktrix hängt von der Parametrisierung von γ ab, und verschiedene "Traktrixe" von γ unterscheiden sich durch den Vektor v.

Lemma 3.1 *Sei γ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\widehat{\gamma}$ eine Traktrix von γ. Dann ist die Kurve*

$$\widetilde{\gamma} := \gamma + 2v$$

nach der Bogenlänge parametrisiert und $\widehat{\gamma}$ ebenfalls eine Traktrix von $\widetilde{\gamma}$.

Beweis Nach Voraussetzung ist $|\gamma'| = 1,\ |v| \equiv const$ und $\widehat{\gamma} = \gamma + v$, $\widetilde{\gamma} = \gamma + 2v$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{\gamma}', \widetilde{\gamma}' \rangle &= \langle \gamma' + 2v', \gamma' + 2v' \rangle \\
&= 1 + 4\langle \gamma', v' \rangle + 4\langle v', v' \rangle \\
&= 1 + 4\langle \gamma' + v', v' \rangle \\
&= 1 + 4\langle \widehat{\gamma}', v' \rangle .
\end{aligned}$$

Da $|v|$ konstant ist gilt $v \perp v'$r. Zusammen mit $\widehat{\gamma}' \parallel v$ folgt schließlich $v' \perp \widehat{\gamma}'$.
$\Rightarrow \langle \widetilde{\gamma}', \widetilde{\gamma}' \rangle = 1$ also ist $\widetilde{\gamma}$ nach der Bogenlänge parametrisiert und nach Definition sind die Traktixeigenschaften erfüllt. $\square$

Definition 3.4 (Darboux-Transform) *$\widetilde{\gamma}$ heißt* Darboux-Transform *von γ, wenn γ und $\widetilde{\gamma}$ nach der Bogenlänge parametrisiert sind und wenn $\|\widetilde{\gamma}(s) - \gamma(s)\| \equiv const$ aber $\widetilde{\gamma}(s) - \gamma(s) \not\equiv const$.*

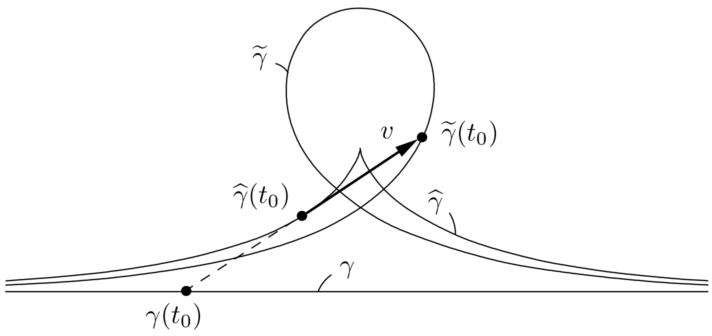
Satz 3.2 (Darboux-Transform & Traktrix) *Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann sind äquivalent:*

i) $\widetilde{\gamma}$ ist Darboux-Transform von γ

ii) $\widehat{\gamma} := \frac{1}{2}(\gamma + \widetilde{\gamma})$ ist Traktrix von γ (und $\widetilde{\gamma}$).

Beweis Definiere

$$v := \frac{1}{2}(\widetilde{\gamma} - \gamma)\,,\ \widehat{\gamma} := \gamma + v = \frac{1}{2}(\widetilde{\gamma} + \gamma)\,.$$



Also $\widehat{\gamma}' = \gamma' + v'$ und nach Definition der Darboux-Transform ist $|v| \equiv const \Rightarrow v \perp v'$.

Zu zeigen bleibt also

$$\widehat{\gamma}' \parallel v \overset{v \perp v'}{\Leftrightarrow} \widehat{\gamma}' \perp v' \Leftrightarrow \langle \widehat{\gamma}', v' \rangle = 0.$$

Rechnung:

$$\langle \widehat{\gamma}', v' \rangle = \left\langle \frac{1}{2}(\gamma' + \widetilde{\gamma}')\,, \frac{1}{2}(\widetilde{\gamma}' - \gamma') \right\rangle = \frac{1}{4}(\langle \widetilde{\gamma}', \widetilde{\gamma}' \rangle - \langle \gamma', \gamma' \rangle) = \frac{1}{4}(1-1) = 0.$$

□

Nun schauen wir uns das ganze im diskreten Fall an:

3.2.2 Traktrix einer diskreten Kurve

Definition 3.5 (Diskrete Traktrix & Darboux-Transform) *Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ eine diskrete, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve.*

Eine diskrete Kurve $\widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{C}$ heißt Darboux-Transform *von γ, falls folgendes gilt:*

i) $\widetilde{\gamma}$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert

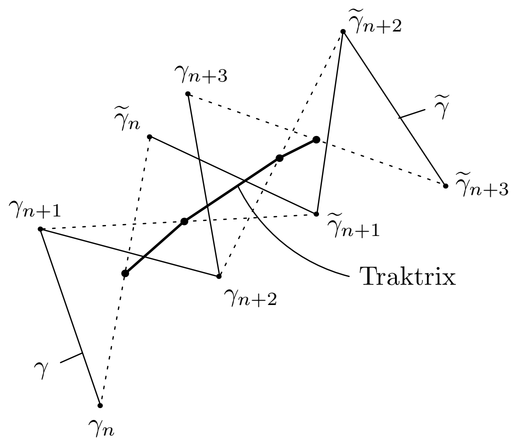
ii) $\|\widetilde{\gamma_n} - \gamma_n\| \equiv const$

iii) $(\gamma_n, \widetilde{\gamma}_n)$ und $(\gamma_{n+1}, \widetilde{\gamma}_{n+1})$ schneiden sich.

Die Kurve $\widehat{\gamma} := \frac{1}{2}(\gamma + \widetilde{\gamma}) : I \to \mathbb{C}$ heißt diskrete Traktrix *von γ (und $\widetilde{\gamma}$).*

Bemerkung Die Bedingung dass entsprechende Kanten sich schneiden, verhindert dass eine triviale Translation ebenfalls Darboux-Transformation ist. Im glatten Fall wird dies dadurch ausgeschlossen, dass $v \not\equiv const$.

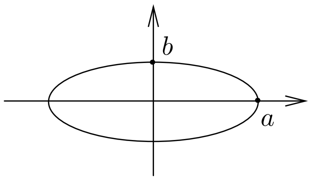
Konstruktion der diskreten Traktrix:



4 Geschlossene Kurven

Beispiel 4.1 (Ellipse)

$$\begin{aligned}&\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\\ &t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t)) \quad a, b \in \mathbb{R}.\\ &\gamma(t + 2\pi) = \gamma(t).\end{aligned}$$



Definition 4.1 (Geschlossene Kurven) *Eine* geschlossene parametrisierte Kurve *in $\mathbb{R}^n$ ist ein Paar (γ, L), $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wobei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve ist mit*

$$\gamma(t) = \gamma(t + L) \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Man nennt γ L-*periodisch*.*

Definition 4.2 (Äquivalenz von geschlossenen Kurven) *Zwei geschlossene parametrisierte Kurven (γ, L), $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{L})$ heißen* orientiert äquivalent*, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, mit*

$$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi, \ \ \varphi' > 0, \ \ \varphi(t + \widetilde{L}) = \varphi(t) + L.$$

Eine orientierte immersierte geschlossene Kurve *im $\mathbb{R}^n$ ist die ensprechende Äquivalenzklasse $[(\gamma, L)]$. Die Länge von $[(\gamma, L)]$ ist*

$$l := \int_0^L \|\gamma'(t)\| dt$$

wobei (γ, L) ein beliebiges Element der Äquivalenzklasse $[(\gamma, L)]$ ist.

Bemerkung

- Man überlege sich wieder einmal, dass orientierte Äquivalez tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.
- Zur Wohldefiniertheit der Länge: Seien $\gamma, \widetilde{\gamma}$ und φ wie in der Definition. Dann ist

$$\int_0^{\widetilde{L}} \|\widetilde{\gamma}'(t)\| dt = \int_0^{\widetilde{L}} \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| dt = \int_0^{\widetilde{L}} \|\gamma'(\varphi(t))\| \cdot \|\varphi'(t)\| dt$$

$$= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\widetilde{L})} \|\gamma'(s)\| ds = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(0)+L} \|\gamma'(s)\| ds = \int_0^L \|\gamma'(s)\| ds.$$

- L ist entscheidend: Falls γ L-periodisch ist, so ist γ natürlich auch $2L$-periodisch, aber (γ, L) und $(\gamma, 2L)$ sind nicht orientiert äquivalent.

Satz 4.1 *In jeder Äquivalenzklasse $[(\gamma, L)]$ von regulären geschlossenen parametrisierten Kurven in $\mathbb{R}^n$ gibt es $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{L})$, so dass $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Diese Parametrisierung ist eindeutig bestimmt bis auf $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{L}) \to (\widehat{\gamma}, \widetilde{L})$, wobei $\widehat{\gamma}(s) = \widetilde{\gamma}(s + a), a \in \mathbb{R}$.

Beweis Analog zu parametrisierten Kurven:

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist eine reguläre parametrisierte Kurve also parametrisiere nach der Bogenlänge. Man erhält $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (Freiheit: $\widetilde{\gamma}(0) \in Sp(\gamma)$). Dann ist $\widetilde{\gamma}$ periodisch, mit der Periode gleich der Länge der Kurve.

Seien nun $\widetilde{\gamma}$ und $\widehat{\gamma}$ zwei geschlossene nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven mit $[(\widetilde{\gamma}, \widetilde{L})] = [(\widehat{\gamma}, \widehat{L})]$. Dann gilt

$$\widetilde{L} = \widehat{L}$$

und

$$\begin{array}{rcll} & \widetilde{\gamma} & = & \gamma \circ \varphi \\ \Rightarrow & \widetilde{\gamma}' & = & \gamma' \cdot \varphi' \\ \Rightarrow & \underbrace{\|\widetilde{\gamma}'\|}_{=1} & = & \underbrace{\|\gamma'\|}_{=1} \cdot |\varphi'| \\ \overset{\varphi' > 0}{\Rightarrow} & \varphi' & = & 1 \\ \Leftrightarrow & \varphi(s) & = & s + a, a \in \mathbb{R}. \end{array}$$

□

4.1 Die Tangentenumlaufzahl

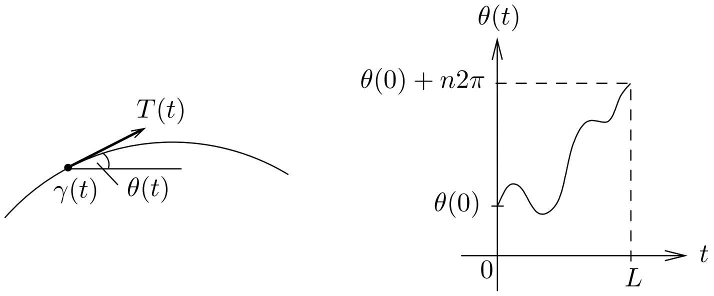
Sei (γ, L) eine reguläre parametrisierte ebene geschlossene Kurve, also $\gamma(t + L) = \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$.
O.B.d.A. sei γ nach der Bogenlänge parametrisiert und somit

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,\ T(t + L) = T(t).$$

Mit $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist $T(t) = e^{i\theta(t)}$. Wähle $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \theta(t)$ stetig.

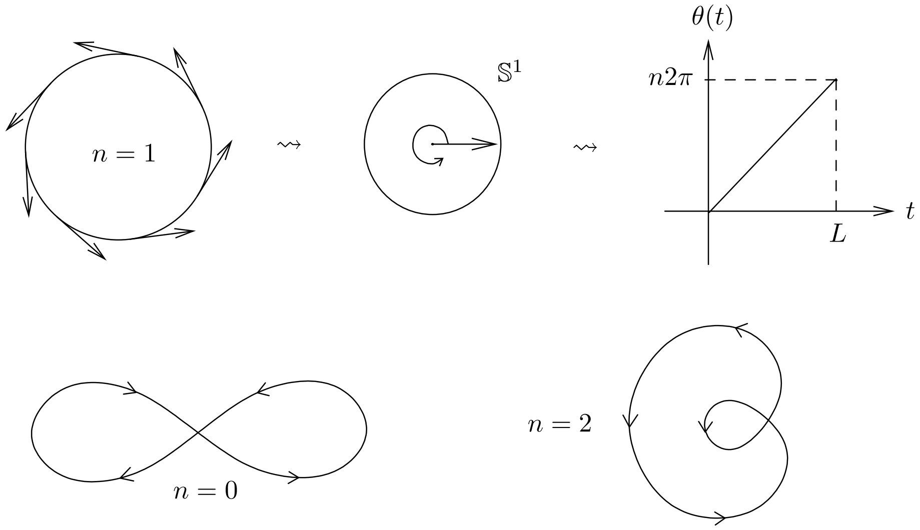
Dann ist

$$\boxed{\theta(t + L) = \theta(t) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$



Wenn γ nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist, betrachte $\widetilde{T} := \frac{T}{\|T\|}$.

Definition 4.3 (Tangentenumlaufzahl) *Sei (γ, L) eine reguläre parametrisierte ebene geschlossene Kurve. Dann heißt obiges $n \in \mathbb{Z}$* Tangentenumlaufzahl *(Umlaufzahl, Rotationsindex,…) der Kurve (γ, L).*



Bemerkung Beachte, dass die Tangentenumlaufzahl und alles was sich darauf bezieht nur für ebene Kurven definiert ist.

Satz 4.2 (Tangentenumlaufzahl) *Sei (γ, L) eine reguläre parametrisierte ebene geschlossene Kurve. Dann ist die Tangentenumlaufzahl gegeben durch*

$$n = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\cdot\|\gamma'(t)\|dt.$$

Orientiert äquivalente ebene geschlossene Kurven haben dieselbe Umlaufzahl.

Beweis Sei $s \mapsto \widetilde{\gamma}(s)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene geschlossene Kurve mit der Länge l.

Dann:

$$2\pi n = \widetilde{\theta}(s+l) - \widetilde{\theta}(s) = \int_s^{s+l} \widetilde{\theta}'(\xi)d\xi = \int_0^l \widetilde{\theta}'(\xi)d\xi = \int_0^l \kappa(\xi)d\xi.$$

Allgemein ist $\gamma = \widetilde{\gamma}\circ\varphi$, also $\xi = \varphi(t),\ d\xi = |\varphi'(t)|dt$ und somit

$$2\pi n = \int_0^L \kappa(t)\cdot\|\gamma'(t)\|dt$$

wobei $\kappa(t)$ die Krümmung der parametrisierten Kurve in t ist.

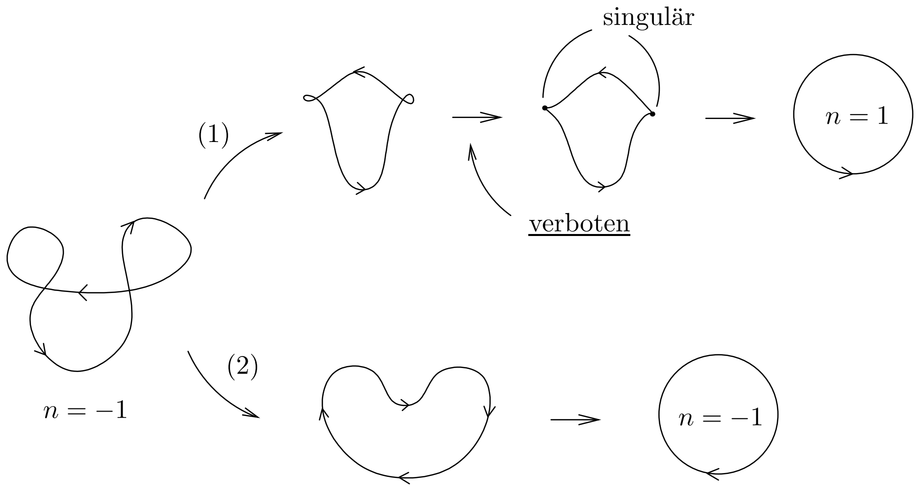
Dies folgt aus

$$\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(\varphi(t)) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| \overset{\xi=\varphi(t)}{=} \underbrace{\|\widetilde{\gamma}'(\xi)\|}_{=1}\cdot|\varphi'(t)|.$$

$\square$

4.2 Reguläre Homotopie geschlossener Kurven

Idee: Zwei geschlossene Kurven sind regulär homotop, wenn man die Eine in die Andere "glatt deformieren" kann. In $\mathbb{R}^2$ sieht das so aus:



(2) ist eine glatte Deformation, (1) nicht!

Definition 4.4 (Reguläre Homotopie geschlossener Kurven) *Zwei reguläre geschlossene parametrisierte Kurven* (γ, L) *und* $(\widehat{\gamma}, \widehat{L})$ *heißen* regulär homotop, *wenn es eine Abbildung*

$$h : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n, \ (t, \lambda) \mapsto h(t, \lambda)$$

gibt, mit

$$h(t, 0) = \gamma(t) \text{ und } h(t, 1) = \widetilde{\gamma}(t)$$

so dass folgendes gilt:

(a) $\forall \lambda \in [0,1]$ *ist* $t \mapsto \gamma_\lambda(t) = h(t, \lambda)$ *eine reguläre geschlossene Kurve* $(\gamma_\lambda, L(\lambda))$

(b) Die Funktionen $\mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$

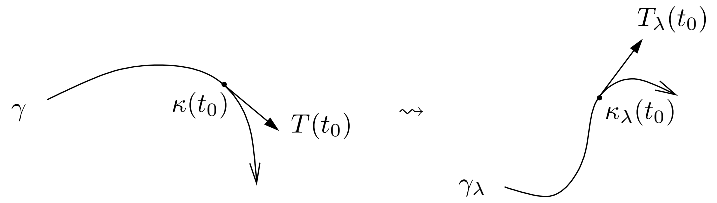
$$(t, \lambda) \mapsto \begin{array}{rcl} \gamma_\lambda(t) & = & h(t, \lambda) \\ \gamma'_\lambda(t) & = & \frac{d}{dt} h(t, \lambda) \\ \gamma''_\lambda(t) & = & \frac{d^2}{dt^2} h(t, \lambda) \end{array}$$

sind stetig.

(c) Die Periode $L(\lambda)$ *von* γ_λ *ist stetig.*

Man nennt t *den* Deformationsparameter.

Bemerkung Auch $(t, \lambda) \mapsto T_\lambda(t) := \frac{\gamma'_\lambda(t)}{\|\gamma'_\lambda(t)\|}$, $(t, \lambda) \mapsto \kappa_\lambda(t)$ und $\|\gamma'_\lambda(t)\|$ sind stetig.



Lemma 4.3 (Tangentumlaufzahl) *Regulär homotope ebene Kurven haben dieselbe Tangentenumlaufzahl.*

Beweis Sei $n(\lambda)$ die Tangentenumlaufzahl von γ_λ. Es gilt:

$$n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{L(\lambda)} \kappa_\lambda(t) \cdot ||\gamma_\lambda'(t)|| dt$$

also ist $n(\lambda)$ stetig in λ. Da ausserdem $n(\lambda) \in \mathbb{Z}$, muss $n(\lambda)$ konstant sein! □

Bemerkung Seien $\gamma, \widetilde{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ zwei regulär homotope Kurven. Dann wird durch

$$\gamma_\lambda(t) := \lambda\gamma(t) + (1 - \lambda)\widetilde{\gamma}(t)$$

i.A. *keine* reguläre Homotopie definiert, denn $\gamma_\lambda'(t) = \lambda\gamma'(t) + (1-\lambda)\widetilde{\gamma}'(t)$ kann sehr wohl verschwinden.

4.2.1 Der Satz von Whitney-Graustein

Eine wichtige Erkenntnis liefert der folgende Satz:

Satz 4.4 (Whitney-Graustein) *Zwei reguläre parametrisierte ebene geschlossene Kurven (γ, L), $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{L})$ mit derselben Tangentenumlaufzahl sind* immer *regulär homotop.*

Vor dem Beweis zunächst einige Trivialfälle:

Lemma 4.5 *Seien (γ, L) und $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{L})$ zwei reguläre parametrisierte ebene geschlossene Kurven. Dann sind hinreichende Eigenschaften für reguläre Homotopie:*

a) γ und $\widetilde{\gamma}$ sind orientiert äquivalent: $(\gamma, L) \overset{\circ}{\sim} (\widetilde{\gamma}, \widetilde{L})$

b) $\widetilde{\gamma}$ ist eine positive Streckung von γ, d.h. $\widetilde{\gamma} = a\gamma,\ a \in \mathbb{R}^{>0}$

c) $\widetilde{\gamma}$ ist eine Verschiebung von γ, d.h. $\widetilde{\gamma} = \gamma + b,\ b \in \mathbb{R}^2$

d) $\widetilde{\gamma}$ ist eine Drehung von γ. In komplexer Schreibweise:
$\gamma, \widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ wobei $\widetilde{\gamma} = e^{i\varphi} \cdot \gamma,\ \varphi \in \mathbb{R}$.

Beweis

zu a) Es gilt: $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi,$ wobei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi' > 0,\ \varphi(t + \widetilde{L}) = \varphi(t) + L$.
Definiere $\gamma_\lambda(t) := \gamma((1 - \lambda)t + \lambda\varphi(t)),\ \gamma_0 = \gamma,\ \gamma_1 = \widetilde{\gamma} \Rightarrow \gamma_\lambda'(t) = \gamma' \cdot \underbrace{((1 - \lambda) + \lambda\varphi'(t))}_{\neq 0}$.

Wegen $\gamma' \neq 0$ ist dies eine reguläre Homotopie.

zu b) $\gamma_\lambda(t) := (1 - \lambda + \lambda a)\gamma(t)$.

zu c) $\gamma_\lambda(t) := \gamma(t) + \lambda b$.

zu d) $\gamma_\lambda(t) := e^{i\lambda\varphi} \cdot \gamma(t)$.

□

Bemerkung Aus a) folgt, dass durch reguläre Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der immersierten orientierten geschlossenen Kurven definiert wird. Insbesondere existiert zu einer gegebenen positiven Periode in jeder Äquivalenzklasse eine entsprechend parametrisierte Kurve.

Beweis des Satzes
Aufgrund des Lemmas können wir wie folgt vorgehen:

1. Skaliere (γ, L) und $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{L})$ so, dass ihre Länge jeweils 1 beträgt. Anschließend parametrisiere nach der Bogenlänge.

$$\Rightarrow \text{ Beide Kurven sind nach der Bogenlänge parametrisiert und } L = \widetilde{L} = 1.$$

2. Verschiebe und drehe die erhaltenen Kurven so, dass

$$\gamma(0) = \widetilde{\gamma}(0) \text{ und } T(0) = \widetilde{T}(0).$$

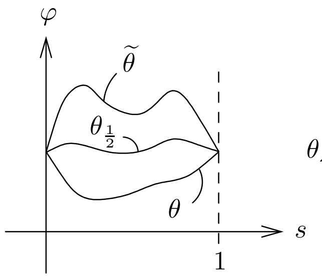
Für die Tangentialvektoren $T(s), \widetilde{T}(s)$ gilt:

$$T(s) = e^{i\theta(s)}, \ \widetilde{T}(s) = e^{i\widetilde{\theta}(s)}$$

wobei $\theta(1) - \theta(0) = \widetilde{\theta}(1) - \widetilde{\theta}(0) = 2\pi n$, da die beiden Kurven nach Voraussetzung dieselbe Tangentenumlaufzahl n besitzen.

Die Idee ist nun, eine Homotopie zwischen den Winkelfunktionen θ und $\widetilde{\theta}$ anzugeben wodurch die Tangentialvektoren ineinander überführt werden. Über diese ist dann zu integrieren um eine reguläre Homotopie zwischen γ und $\widetilde{\gamma}$ zu erhalten.

Also:



$$\theta_\lambda(s) := (1-\lambda)\theta(s) + \lambda\widetilde{\theta}(s), \quad T_\lambda(s) := e^{i\theta_\lambda(s)}$$

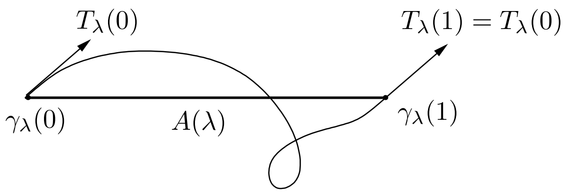
T_λ ist 1-periodisch, d.h. $T_\lambda(1) = T_\lambda(0)$.

Definiere

$$\widehat{\gamma}_\lambda(s) := \int_0^s T_\lambda(\xi) d\xi.$$

Für jedes λ ist dies eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, $\widehat{\gamma}_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Es ist $\widehat{\gamma}_0 = \gamma$ und $\widehat{\gamma}_1 = \widetilde{\gamma}$. I.A. ist $\widehat{\gamma}_\lambda$ nicht periodisch, bzw. geschlossen! Deswegen definiere:

$$A(\lambda) := \int_0^1 T_\lambda(\xi) d\xi = \widehat{\gamma}_\lambda(1) - \widehat{\gamma}_\lambda(0).$$



Damit ist

$$\gamma_\lambda(s) := \widehat{\gamma}_\lambda(s) - sA(\lambda)$$

eine geschlossene Kurve, denn

$$\gamma_\lambda(1) - \gamma_\lambda(0) = \widehat{\gamma}_\lambda(1) - \widehat{\gamma}_\lambda(0) - A(\lambda) = 0.$$

Es gilt:

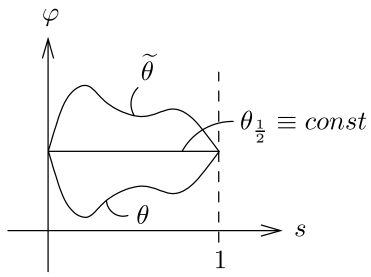
- $A(\lambda)$ ist eine stetige Funktion von λ, da T_λ stetig von λ abhängt.
- $A(0) = A(1) = 0$.

Es bleibt zu überprüfen, ob $\gamma_\lambda(s)$ wirklich eine reguläre Homotopie ist, d.h. $\gamma'_\lambda(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$.
Es ist

$$\gamma'_\lambda(s) = T_\lambda(s) - A(\lambda),$$

also folgt aus $\gamma'_\lambda(s) = 0$, dass $T_\lambda(s) = A(\lambda)$ also insbesondere $||A(\lambda)|| = 1$.
Da $\widehat{\gamma}_\lambda(s)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist und somit alle Kurven $\widehat{\gamma}_\lambda$ die Länge 1 haben, muss $\widehat{\gamma}_\lambda(s)$ in diesem Fall eine Gerade sein. Also

$$\begin{aligned} & \widehat{\gamma}_\lambda(s) = sA(\lambda) + \widehat{\gamma}_\lambda(0) \\ \Rightarrow \quad & \theta_\lambda(s) \equiv const. \end{aligned}$$



Dies ist jedoch unmöglich wenn $n \neq 0$!
Es bleibt also nur der Fall $n = 0$ zu betrachten: Die Idee ist γ und $\widehat{\gamma}$ (d.h. θ und $\widehat{\theta}$) so umzuparametrisieren, dass $\theta_\lambda \not\equiv const$:
Da θ und $\widetilde{\theta}$ stetig sind und $n = 0$, gibt es $s_0, \widetilde{s}_0 \in \mathbb{R}$, so dass:

$$\theta(s) \leq \theta(s_0) \text{ und } \widetilde{\theta}(s) \leq \widetilde{\theta}(\widetilde{s}_0) \quad \forall s.$$

Man kann $\widetilde{\gamma}$ so umparametrisieren, dass $s_0 = \widetilde{s}_0$.
Dann gilt $\forall s$:

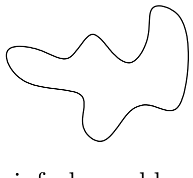
$$\theta_\lambda(s_0) = (1-\lambda)\theta(s_0) + \lambda\widetilde{\theta}(s_0) \geq (1-\lambda)\theta(s) + \lambda\widetilde{\theta}(s) = \theta_\lambda(s).$$

Angenommen $\exists\, \lambda : \theta_\lambda(s_0) = \theta_\lambda(s)\ \forall s$, dann wäre mindestens eine der beiden Funktionen θ, $\widetilde{\theta}$ konstant. Dann wären jedoch γ bzw. $\widetilde{\gamma}$ nicht geschlossen! **Widerspruch** □

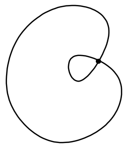
4.3 Einfach geschlossene ebene Kurven

Definition 4.5 (Einfach geschlossen) *Eine geschlossene ebene Kurve* (γ, L) *heißt* einfach geschlossen, *falls* $\gamma : [0, L) \to \mathbb{R}^2$ *injektiv ist.*

Bemerkung Statt einfach geschlossen sagt man auch *eingebettet geschlossen*. Injektive immersierte (geschlossene) Kurven werden dementsprechend auch *eingebettete immersierte (geschlossene) Kurven* genannt.



einfach geschlossen



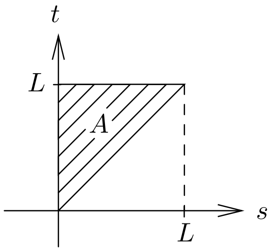
nicht einfach geschlossen

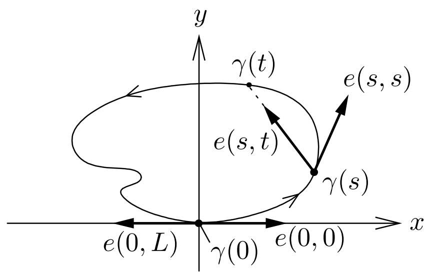
Satz 4.6 (Hopfscher Umlaufzahlsatz) *Sei (γ, L) eine einfach geschlossene ebene Kurve der Klasse C^2, d.h. mit stetiger Krümmung. Dann gilt für ihre Tangentenumlaufzahl $n(\gamma) = \pm 1$.*

Beweis Parametrisiere $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ nach der Bogenlänge und verschiebe/drehe die Kurve so, dass $\gamma(0) = 0$ und $y(t) \geq 0$ $\forall t \in [0, L]$.

Wir nehmen an, dass $x'(0) > 0$ (also $\frac{\gamma'(0)}{||\gamma'(0)||} = (1, 0)$). Definiere:

- $A := \{(s, t) : 0 \leq s \leq t \leq L\}$
- $e : A \to \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| = 1\}$ als $\qquad e(s,t) := \begin{cases} \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{||\gamma(t)-\gamma(s)||} & \text{für } s \neq t, \\ \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||} = T & \text{für } s = t, \\ -\frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||} = -T & \text{für } (s,t) = (0, L). \end{cases}$





Es gibt eine *stetige* Abbildung $\theta : A \to \mathbb{R}$ (Winkel zwischen $e(s,t)$ und der x-Achse) mit:

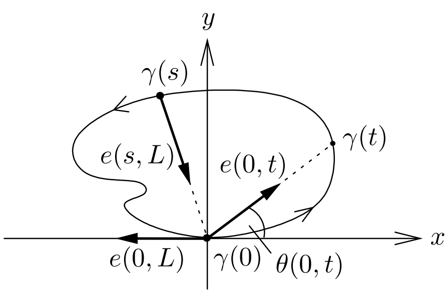
$$e(s,t) = (cos\theta(s,t), sin\theta(s,t)).$$

Wir beweisen dies hier nicht, anschaulich ist es jedoch klar...

Mit $\widetilde{\theta}(s) := \theta(s, s)$ gilt $T = e^{i\widetilde{\theta}}$, und für die Umlaufzahl von γ gilt

$$n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds = \frac{\widetilde{\theta}(L) - \widetilde{\theta}(0)}{2\pi} = \frac{\theta(L, L) - \theta(0, 0)}{2\pi}.$$

Betrachte die Sekanten $\gamma(t) - \gamma(0) \overset{y(t) \geq 0}{\Rightarrow} \theta(0, L) - \theta(0, 0) = \pi$.



Für die Sekanten $\gamma(L)-\gamma(s)$ gilt ebenfalls $\theta(L,L)-\theta(0,L)=\pi \Rightarrow \theta(L,L)-\theta(0,0)=2\pi$, also $n(\gamma)=+1$. Ebenso erhält man $n(\gamma)=-1$ unter der Annahme dass $x'(0)<0$. □

Definition 4.6 (Konvexe ebene geschlossene Kurven) Konvexe ebene geschlossene Kurven *können äquivalent definiert werden als:*

i) Rand einer konvexen Menge in $\mathbb{R}^2$

ii) Kurven deren Krümmungsfunktion nicht das Vorzeichen wechselt.

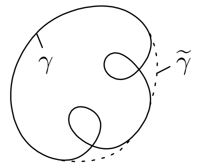
Definition 4.7 (Absolutkrümmung) *Die* totale Absolutkrümmung *einer geschlossenen Kurve (γ, L) ist definiert als*

$$K(\gamma) := \int_0^L |\kappa(s)| ds.$$

Satz 4.7 (Absolutkrümmung) *Die totale Absolutkrümmung einer ebenen geschlossenen Kurve (γ, L) ist größer oder gleich $2\pi, K(\gamma) \geq 2\pi$, mit Gleichheit genau dann wenn die Kurve konvex ist.*

Beweis

Mache γ zunächst konvex, $\gamma \to \widetilde{\gamma}$ wie im Bild.
Offensichtlich ist $K(\widetilde{\gamma}) \leq K(\gamma)$ mit Gleichheit nur wenn $\gamma = \widetilde{\gamma}$, d.h. γ war schon konvex. $\widetilde{\gamma}$ ist konvex und einfach geschlossen, also erhält man aus dem Hopfschen Umlaufzahlsatz, dass $K(\gamma) = 2\pi$.



□

Bemerkung Wir haben hierbei C^2 vorausgesetzt. Jedoch können C^1-Kurven mit infinitessimaler Änderung auf C^2 "geglättet" werden.

Definition 4.8 (Scheitel) *Ein* Scheitel *ist ein Punkt s mit $\kappa'(s) = 0$.*

Satz 4.8 (Vier-Scheitelsatz) *Eine ebene konvexe geschlossene C^3-Kurve besitzt mindestens vier Scheitel.*

Zunächst beweisen wir

Lemma 4.9 *Sei (γ, L) eben, geschlossen und nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gilt $\forall A, B, C \in \mathbb{R}$:*

$$\int_0^L (Ax + By + C) \frac{d\kappa}{ds} ds = 0$$

wobei $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ und $\kappa(s)$ = Krümmung der Kurve.

Beweis des Lemmas

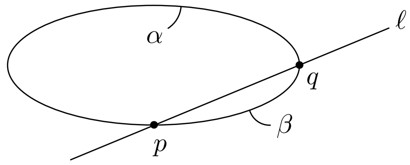
$$\int_0^L C \frac{d\kappa}{ds} ds = C(\kappa(L) - \kappa(0)) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L x\frac{d\kappa}{ds} &= \int_0^L \langle\gamma(s), e_1\rangle \frac{d\kappa}{ds} ds \\
&\overset{part.Integr.}{=} -\int_0^L \underbrace{\langle\gamma'(s), e_1\rangle}_{=\langle T, e_1\rangle} \kappa(s) ds \\
&= \int_0^L \langle -\kappa T, e_1\rangle\, ds \\
&\overset{Frenet}{=} \int_0^L \langle N', e_1\rangle\, ds \\
&= \langle N(L), e_1\rangle - \langle N(0), e_1\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analog geht man für y vor. $\square$

Beweis des Satzes
Seien $\left\{\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right\}$ Punkte mit $\left\{\begin{smallmatrix} minimaler \\ maximaler \end{smallmatrix}\right\}$ Krümmung, also $\kappa'(p) = \kappa'(q) = 0$, diese Punkte existieren, da κ' periodisch und stetig ist ($\gamma \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$).

Betrachte die Gerade ℓ durch p und q:



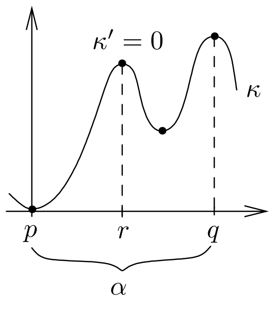
- Da die Kurve konvex ist, wird sie von ℓ in zwei Komponenten α und β gespalten. Sei $Ax+By+C = 0$ die Gleichung zu ℓ.
- α und β seien so gewählt, dass die Punkte von $\left\{\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right\}$ beschrieben werden durch $\left\{\begin{smallmatrix} Ax_\alpha+By_\alpha+C>0 \\ Ax_\beta+By_\beta+C<0 \end{smallmatrix}\right\}$.

Angenommen es gäbe keine weiteren Scheitel, so würde κ' weder auf α, noch auf β das Vorzeichen ändern da κ' nach Voraussetzung stetig ist.
Es würde also gelten

$$\kappa'|_\alpha \left\{\begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix}\right\} 0 \Rightarrow \kappa'|_\beta \left\{\begin{smallmatrix} < \\ > \end{smallmatrix}\right\} 0 \overset{Lemma}{\Rightarrow} \int_0^L (Ax + By + C)\frac{d\kappa}{ds} ds \left\{\begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix}\right\} 0. \quad \textbf{Widerspruch!} \tag{3}$$

Es gibt also mindestens einen Scheitel r mehr, o.B.d.A. auf α.

Weiter wissen wir wegen (3), dass κ' auf α das Vorzeichen ändern muss, somit kann r also kein Sattelpunkt der Krümmung sein!
Es existieren also Stellen mit $\kappa' < 0$ auf α. Da die Krümmung bei p minimal, und bei q maximal ist, muss es noch mindestens ein weiteres Extremum $\widetilde{r}$ zwischen p und q geben, also $\kappa'(\widetilde{r}) = 0$.



$\square$

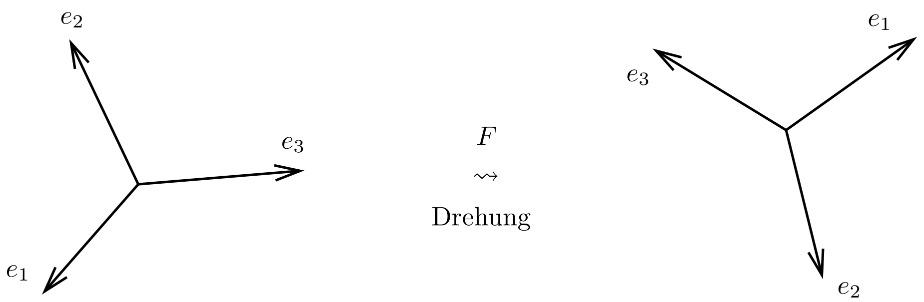
Bemerkung Der Vier-Scheitelsatz gilt auch für nur einfach geschlossene Kurven, ist dafür jedoch schwierig zu beweisen.

5 Drehungen in $\mathbb{R}^3$

In Kapitel 6 werden wir uns mit sogenannten *gerahmten Kurven* beschäftigen, im Hinblick darauf überlegen wir uns zunächst wie man gut Drehungen in $\mathbb{R}^3$ beschreiben kann:

5.1 Die Rotationsgruppe

Jede Drehung eines Körpers in $\mathbb{R}^3$ kann identifiziert werden mit einer Koordinatentransformation, sprich einer Drehung der Standardbasis.

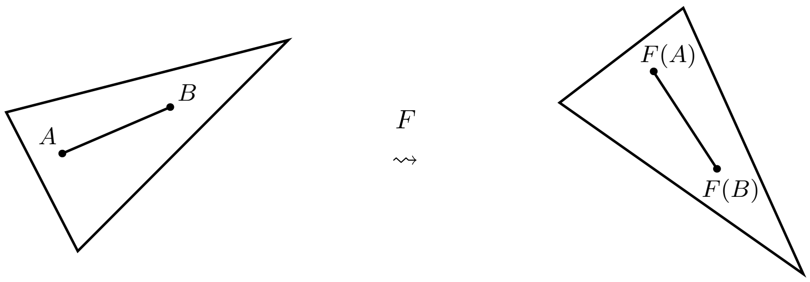


Definition 5.1 (Isometrische Abbildungen) *Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt* isometrisch*, falls*

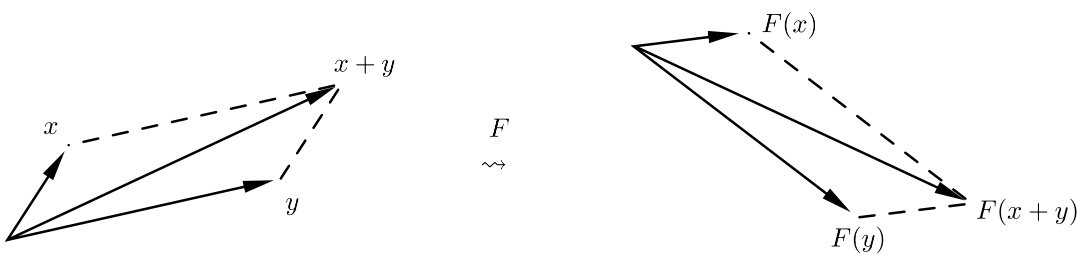
$$||x - y|| = ||F(x) - F(y)|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

5.1.1 Eigenschaften von Drehungen

1. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung, dann ist F isometrisch.
   Für alle $A, B \in \mathbb{R}^3$ gilt:
   $$\|A - B\| = \|F(A) - F(B)\|.$$



2. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung, dann ist F eine lineare Abbildung.
   Für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
   $$\begin{aligned} F(x + y) &= F(x) + F(y) \\ \lambda F(x) &= F(\lambda x). \end{aligned}$$



3. Wenn (e_1, e_2, e_3) eine positiv orientierte Orthonormalbasis ist (d.h. $||e_1|| = ||e_2|| = ||e_3|| = 1$ und $e_3 = e_1 \times e_2$), dann bilden die Vektoren
$$N = F(e_1), B = F(e_2) \text{ und } T = F(e_3)$$
ebenfalls eine positiv orientierte Orthonormalbasis; $||N|| = ||B|| = ||T|| = 1$ und $T = N \times B$.

Lemma 5.1 *Eine Drehung in $\mathbb{R}^3$ um den Nullpunkt kann alternativ beschrieben werden durch:*

1. *Eine Abbildung, welche eine positiv orientierte Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$ auf eine andere abbildet*
$$(e_1, e_2, e_3) \mapsto (N, B, T)$$
und sonst linear ist.

2. *Eine Matrix $F \in Mat(3, \mathbb{R})$ mit*
$$\begin{aligned} F^T F = F F^T &= I \\ \det F &= 1. \end{aligned}$$
F ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit
$$N = F(e_1), B = F(e_2) \textit{ und } T = F(e_3)$$
d.h. N, B, T sind die Spalten von F mit
$$F = \begin{bmatrix} N_1 & B_1 & T_1 \\ N_2 & B_2 & T_2 \\ N_3 & B_3 & T_3 \end{bmatrix}$$
und
$$N = \sum_{i=1}^{3} e_i N_i, \quad B = \sum_{i=1}^{3} e_i B_i, \quad T = \sum_{i=1}^{3} e_i T_i.$$

Beweis Zu zeigen: Das oben definierte F erfüllt
$$F^T F = I = F F^T \text{ und } \det F = 1.$$
Es gilt:
$$F^T F = \begin{bmatrix} \langle N, N \rangle & \langle N, B \rangle & \langle N, T \rangle \\ \langle B, N \rangle & \langle B, B \rangle & \langle B, T \rangle \\ \langle T, N \rangle & \langle T, B \rangle & \langle T, T \rangle \end{bmatrix} = I$$
da (N, B, T) eine Orthonormalbasis ist.
Weiter ist: $F^T F = F F^T$, da $F^T = F^{-1}$. Für $\det F$ gilt:
$$\begin{aligned} \det F &= \det \begin{bmatrix} N_1 & B_1 & T_1 \\ N_2 & B_2 & T_2 \\ N_3 & B_3 & T_3 \end{bmatrix} \\ &= \langle N, B \times T \rangle \\ &= \langle T, N \times B \rangle \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } NBT \text{ positiv orientiert} \\ -1 & \text{falls } NBT \text{ negativ orientiert.} \end{cases} \end{aligned}$$
$\square$

Drehungen bilden eine Gruppe $\rightsquigarrow$ betrachte die Vektorräume

$$\begin{aligned} gl(n,\mathbb{R}) &:= \{\text{invertierbare quadratische Matrizen mit reellen Koeffizienten}\} \\ so(n,\mathbb{R}) &:= \{A \in gl(n,\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}. \end{aligned}$$

Proposition 5.2 *Die Mengen*

$$\begin{aligned} O(n) &:= \{A \in gl(n,\mathbb{R}) \mid A^T A = I\} \\ SO(n) &:= \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} \end{aligned}$$

sind Matrixgruppen.

Bemerkung Man kann in der Definition von $O(n)$ $A^T A = I$ durch $AA^T = I$ ersetzen, da in diesem Falle $A^T = A^{-1}$.

Beweis Zu zeigen: Seien $A, B \in O(n)$, dann gilt $AB \in O(n)$ und $A^{-1} \in O(n)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} AB \in O(n) &\Leftrightarrow (AB)^T(AB) = I \\ &\Leftrightarrow B^T \underbrace{A^T A}_{=I} B = B^T B = I \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A^{-1} \in O(n) &\Leftrightarrow A^T \in O(n) \\ &\Leftrightarrow AA^T = I \\ &\Leftrightarrow A^T A = I \\ &\Leftrightarrow A \in O(n). \end{aligned}$$

Im Falle von $SO(n)$ muss man nur noch kurz überlegen, dass das "Determinante = 1"-Kriterium ebenfalls erfüllt bleibt ($\det A = \det A^T$ und $\det AB = \det A \cdot \det B$). □

Bemerkung $O(n)$ zerfällt in zwei Komponenten:

1. $SO(n) \subset O(n)$ und
2. $SO_-(n) := \{A \in O(n) | \det A = -1\}$.

Dies gilt, da $A^T A = I \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Leftrightarrow \det A = \pm 1$.

Daraus folgt auch, dass $SO_-(n)$ im Gegensatz zu $SO(n)$ keine Untergruppe ist, da "Determinante = -1" unter Multiplikation nicht erhalten bleibt.

Satz 5.3 $SO(3)$ *ist die* Rotationsgruppe *bzw.* Drehgruppe *des* $\mathbb{R}^3$.

Beweis Nach Lemma 5.1 wissen wir, dass es zu jeder Drehung des $\mathbb{R}^3$ ein entsprechendes Element in $SO(3)$ gibt. Andererseits beschreibt jedes Element aus $SO(3)$ eine Drehung (Lineare Algebra).

□

5.1.2 Analytische Beschreibung von $SO(2)$ und $SO(3)$

Wir fangen mit der Beschreibung von $SO(2)$ an:

Lemma 5.4 *Es gilt:*

$$A \in SO(2) \Leftrightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi] : A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

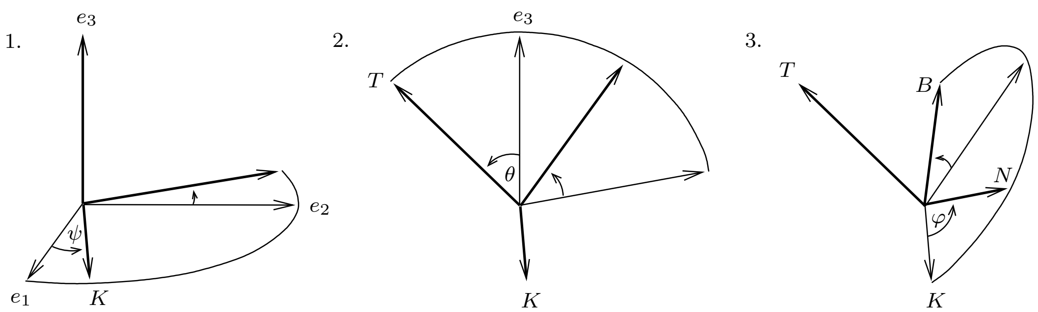
Beweis Offensichtlich ist jede Matrix dieser Gestalt in $SO(2)$, denn
$$\det A = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$
und
$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = I.$$
Sei also $A \in SO(2)$, dann gilt $AA^T = I$ und $\det A = 1$. D.h. mit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ soll gelten
$$AA^T = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
und
$$ad - bc = 1.$$
Wir können also schreiben $a = \cos\varphi$, $b = -\sin\varphi$, $c = \sin\psi$ und $d = \cos\psi$. Es muss gelten:
$$\begin{aligned} ac + bd &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \sin(\varphi - \psi) &= 0. \end{aligned}$$
$\varphi = \psi$ erfüllt also Bedingung $A^T A = I$. Damit gilt auch wieder $\det A = ad - bc = \cos^2\varphi + \sin^2\psi = 1$. □

Bemerkung $SO(2)$ ist eine abelsche Gruppe, das heißt:
$$\text{Für alle } \varphi, \psi \text{ gilt } A_\varphi A_\psi = A_\psi A_\varphi.$$

Nun zu von $SO(3)$:

Wir werden sehen, dass es mehrere Möglichkeiten gibt diese Gruppe zu beschreiben. Zum Beispiel kann ein Element aus $SO(3)$ als Drehung um drei Winkel ψ, θ und φ beschrieben werden. Dabei ist die Abbildung
$$(e_1, e_2, e_3) \mapsto (N, B, T)$$
die Komposition von drei Drehungen

1. e_3 fest, $e_1 \mapsto K$ durch Drehung um ψ.
2. K fest, $e_3 \mapsto T$ durch Drehung um θ.
3. T fest, $K \mapsto N$ durch Drehung um φ.



Die Winkel ψ, θ und φ heißen *Eulerwinkel*.

Bemerkung

- Die Drehrichtung ist konventionsabhängig. In diesem Falle wurde immer eine Rechtsdrehung vollführt.
- Die Abbildung $(\psi, \theta, \varphi) \mapsto F(\psi, \theta, \varphi) \in SO(3)$ ist nicht injektiv. Falls $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$ finden die Drehungen um ψ und φ in der selben Ebene statt $\rightsquigarrow$ Drehung um $\psi + \varphi$.

5.2 Kontinuierliche Bewegungen

kann man als Lage eines starren Körpers in einem Zeitintervall interpretieren.

$$\begin{aligned} F : [a,b] &\to SO(3) \\ t &\mapsto F(t) \end{aligned}$$

wobei F eine glatte Abbildung ist. Definiere

$$F(t) := (N(t), B(t), T(t))$$

und

$$\begin{aligned} \kappa &:= \langle T', N\rangle \\ \eta &:= \langle T', B\rangle \\ \tau &:= \langle N', B\rangle \end{aligned}$$

Lemma 5.5 *Sei $F : [a,b] \to SO(3)$ eine Bewegung und κ, η und τ wie oben. Dann gilt:*

$$F' = Ff \text{ wobei } f = \begin{bmatrix} 0 & -\tau & \kappa \\ \tau & 0 & \eta \\ -\kappa & -\eta & 0 \end{bmatrix} \in so(3)$$

Beweis Sei $F \in SO(3)$ Dann ist $f = F^{-1}F' = F^TF'$ und

$$\begin{aligned} F^TF' &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1' & B_1' & T_1' \\ N_2' & B_2' & T_2' \\ N_3' & B_3' & T_3' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle N', N\rangle & \langle B', N\rangle & \langle T', N\rangle \\ \langle N', B\rangle & \langle B', B\rangle & \langle T', B\rangle \\ \langle N', T\rangle & \langle B', T\rangle & \langle T', T\rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da N, B und T konstante Länge haben, gilt

$$\langle N', N\rangle = \langle B', B\rangle = \langle T', T\rangle = 0.$$

Ausserdem ist

$$\begin{aligned} \langle T, N\rangle = 0 &\Rightarrow \langle T', N\rangle + \langle T, N'\rangle = 0 \\ \langle T, B\rangle = 0 &\Rightarrow \langle T', B\rangle + \langle T, B'\rangle = 0 \\ \langle N, B\rangle = 0 &\Rightarrow \langle N', B\rangle + \langle N, B'\rangle = 0. \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung. □

Definition 5.2 (Kongruenz kontinuierlicher Bewegungen) *Zwei kontinuierliche Bewegungen $F, \widetilde{F}[a,b] \to SO(3)$ heißen* kongruent*, wenn ein $A \in SO(3)$ existiert, so dass für alle $t \in [a,b]$ gilt:*

$$\widetilde{F}(t) = AF(t).$$

Bemerkung Kongruenz kontinuirlicher Bewegungen ist eine Äquivalenzrelation. Darüber hinaus gilt: Wenn $\widetilde{F}, F \in gl(3,\mathbb{R})$, $A \in SO(3)$ und $\widetilde{F} = AF$, dann ist $\widetilde{F} \in SO(3) \Leftrightarrow F \in SO(3)$.

Satz 5.6 (Hauptsatz) *Zu jedem glatten $f : [a,b] \to so(3)$ gibt es eine Bewegung $F : [a,b] \to SO(3)$ mit $F' = Ff$. Diese Bewegung ist bis auf Kongruenz eindeutig. Also ist $F : [a,b] \to SO(3)$ durch $\kappa, \eta, \tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.*

Beweis Die Gleichung $F' = Ff$ ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Also existiert zu jedem Anfangswert $F(a)$ eine eindeutige Lösung $F : [a,b] \to gl(3,\mathbb{R})$.

Zur Existenz einer Lösung in $SO(3)$:
Betrachte die Lösung F zu dem Anfangswert $F(a) = I$. Wir müssen zeigen, dass $F(t) \in SO(3)$ für alle $t \in [a,b]$, d.h. $FF^T = I$ und $\det F = 1$.
Definiere $D(t) := F(t)F^T(t) \Rightarrow D(a) = I$. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} D' &= F'F^T + FF'^T \\ &\overset{F'=Ff \Leftrightarrow F'^T = f^T F^T}{=} FfF^T + Ff^T F^T \\ &= F(f+f^T)F^T \\ &\overset{f=-f^T}{=} 0. \end{aligned}$$

Also gilt $D(t) = I$ für alle $t \in [a,b]$. Da die Determinante stetig ist und $\det F(a) = \det I = 1$, gilt ausserdem $\det F(t) = 1\ \forall\, t \in [a,b]$.

Zur Eindeutigkeit:
Aufgrund der vorherigen Bemerkung genügt es zu zeigen, dass alle Lösungen $\widetilde{F} \in SO(3)$ zu Anfangswerten $\widetilde{F}(a)$ kongruent zu der Lösung F zum Anfangswert $F(a) = I$ sind.
Zunächst eine nützliche allgemeine Formel für die Ableitung der Inversen Matrix:
$FF^{-1} = I \Rightarrow F'F^{-1} + F(F^{-1})' = 0 \Leftrightarrow$

$$(F^{-1})' = -F^{-1}F'F^{-1}. \tag{4}$$

Definiere $A(t) := \widetilde{F}(t)F^{-1}(t) \in SO(3) \Rightarrow \widetilde{F} = AF$. Wir müssen jedoch noch zeigen, dass A konstant ist. Es gilt

$$\begin{aligned} A' &= \widetilde{F}'F^{-1} + \widetilde{F}(F^{-1})' \\ &= \widetilde{F}'F^{-1} - \widetilde{F}F^{-1}F'F^{-1} \\ &= \widetilde{F}fF^{-1} - \widetilde{F}F^{-1}FfF^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

5.3 Quaternionen

Wir wissen, dass wir Drehungen in der Ebene alternativ mit $SO(2)$-Matrizen oder, da $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, durch Multiplikation von komplexen Zahlen darstellen können. Etwas komplizierter aber im Prinzip genau so geht dies auch in $\mathbb{R}^3$. Dazu benutzt man *Quaternionen*, eine Verallgemeinerung der komplexen Zahlen. Quaternionen bilden einen reell-vierdimensionaler Vektorraum.
Die sogenannten *imaginären Quaternionen* sind ein reell-dreidimensionaler Unterraum, $\operatorname{Im}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$. Dort kann man Drehungen ebenfalls mittels Multiplikation beschreiben.

Formal sieht das wie folgt aus

Drehungen in der Ebene:

$x \in \mathbb{R}^2, A \in SO(2)$: $x \mapsto Ax \leftrightarrow z, a \in \mathbb{C}, |a| = 1$: $z \mapsto az$.

Drehungen im Raum:

$x \in \mathbb{R}^3, A \in SO(3)$: $x \mapsto Ax \leftrightarrow X \in \operatorname{Im}\mathbb{H}, \Phi \in \mathbb{H}, |\Phi| = 1$: $X \mapsto \Phi^{-1}X\Phi$.

Definition 5.3 (Quaternionen) *Seien $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ formale Elemente mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\mathcal{I}\cdot\mathcal{J} = -\mathcal{J}\cdot\mathcal{I} = \mathcal{K}$
   $\mathcal{J}\cdot\mathcal{K} = -\mathcal{K}\cdot\mathcal{J} = \mathcal{I}$
   $\mathcal{K}\cdot\mathcal{I} = -\mathcal{I}\cdot\mathcal{K} = \mathcal{J}$

2. $\mathcal{I}^2 = \mathcal{J}^2 = \mathcal{K}^2 = -1$

Die Zahlen der Form $q = q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot \mathcal{I} + q_2 \cdot \mathcal{J} + q_3 \cdot \mathcal{K}$, $q_i \in \mathbb{R}$ *heißen* Quaternionen*, den* $\mathbb{R}$*-Vektorraum der Quaternionen bezeichnen wir mit* $\mathbb{H}$*.*

Quaternionen bilden einen Schiefkörper, d.h. bis auf die Kommutativität der Multiplikation erfüllen sie alle Körperaxiome. Offensichtlich sind die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ein Unter(schief)körper von $\mathbb{H}$: $\mathbb{C} \cong \{q \in \mathbb{H} \mid q_i = q_j = 0,\ i \neq j,\ i,j \text{ fest}\}$.

5.3.1 Eigenschaften

Folgendes ist entweder Definition oder leicht nachzurechnen.

Sei $q = q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot \mathcal{I} + q_2 \cdot \mathcal{J} + q_3 \cdot \mathcal{K} \in \mathbb{H}$.

Real- und Imaginärteil

$Re\ q := q_0$,
$Im\ q := q_1 \cdot \mathcal{I} + q_2 \cdot \mathcal{J} + q_3 \cdot \mathcal{K}$.

Imaginäre Quaternionen

$\mathrm{Im}\,\mathbb{H} := \{Im\ q \mid q \in \mathbb{H}\}$. Identifiziere $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$.

Komplexe Konjugation

$\bar{q} := Re\ q - Im\ q = q_0 - q_1 \cdot \mathcal{I} - q_2 \cdot \mathcal{J} - q_3 \cdot \mathcal{K}$.
Es gilt $\overline{q\tilde{q}} = \bar{\tilde{q}}\bar{q}$, *aber* im Allgemeinen $q\tilde{q} \neq \tilde{q}q$!

Betrag

$|q|^2 := \sum q_i^2 = q\bar{q} = \bar{q}q$, $|q| \geq 0$, $|q| = 0 \Leftrightarrow q = 0$.
Es gilt $|q\tilde{q}| = |q||\tilde{q}|$.

Inverses Element

Für $q \neq 0$ existiert ein multiplikatives Inverses, da $|q| \neq 0$.
Es ist nämlich $1 = \frac{q\bar{q}}{|q|^2} \Leftrightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$.

Unitäre Quaternionen

$\mathbb{H}_1 := \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$, also $\mathbb{H}_1 \cong \mathbb{S}^3$. Ausserdem ist $(\mathbb{H}_1, \cdot)$ eine Gruppe ($1 \in \mathbb{H}_1$, Abgeschlossenheit und Inverses da alles Länge 1 hat).

Lemma 5.7 (Zusammenfassung zweier Beschreibungen von $\mathbb{R}^3$) *Seien* $x, y \in \mathbb{R}^3$ *und* $\widehat{x}, \widehat{y} \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ *die entsprechenden Quaternionen. Dann gilt:* $\widehat{x} \cdot \widehat{y} = -\langle x, y\rangle + \widehat{x \times y}$*, wobei* $\langle x, y\rangle$ *das Skalarprodukt im* $\mathbb{R}^3$*, und* $x \times y$ *das Kreuzprodukt in der quaternionischen Darstellung ist.*
Wir werden das auch ohne Dach schreiben: $xy = -\langle x, y\rangle + x \times y$*.*

Beweis Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\widehat{x}, \widehat{y} \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ entsprechende Elemente. Also

$$\begin{aligned}
\widehat{x} &= x_1\mathcal{I} + x_2\mathcal{J} + x_3\mathcal{K} \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = x \\
\widehat{y} &= y_1\mathcal{I} + y_2\mathcal{J} + y_3\mathcal{K} \leftrightarrow (y_1, y_2, y_3) = y \\
Re(\widehat{x}\widehat{y}) &= -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \\
Im(\widehat{x}\widehat{y}) &= (x_1y_2 - x_2y_1)\underbrace{\mathcal{I}\mathcal{J}}_{=\mathcal{K}} + (x_3y_1 - x_1y_3)\underbrace{\mathcal{K}\mathcal{I}}_{=\mathcal{J}} + (x_2y_3 - x_3y_2)\underbrace{\mathcal{J}\mathcal{K}}_{=\mathcal{I}}.
\end{aligned}$$

Somit

$$\begin{array}{rcl} Re(\widehat{x}\widehat{y}) & \leftrightarrow & -\langle x, y\rangle \\ Im(\widehat{x}\widehat{y}) & \leftrightarrow & x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \end{array}$$

□

Korollar 5.8 *Seien $x, y \in Im\mathbb{H}$. Dann gilt:*

1. $xx = -||x||^2 = -|x|^2$
2. $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}(xy + yx)$
3. $x \times y = \frac{1}{2}(xy - yx)$
4. $x||y \Leftrightarrow xy = yx$
5. $x \perp y \Leftrightarrow xy = -yx$.

Beweis Benutze $xy = -\langle x, y\rangle + x \times y$. □

5.3.2 Matrixdarstellung

Definition 5.4 (su(n), U(n), SU(n))

- $su(n) := \{A \in gl(n, \mathbb{C}) \mid A^* := \overline{A^T} = -A, tr(A) = 0\}$ *ist ein Vektorraum.*
- $U(n) := \{A \in gl(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = I\}$ *heißt* unitäre Gruppe.
  Bemerkung: $detA^* = \overline{detA}$, *also* $A \in U(n) \Rightarrow |detA| = 1$.
- *Die Untergruppe* $SU(n) := \{A \in U(n) \mid detA = 1\} \subset U(n)$ *heißt* spezielle unitäre Gruppe.

Für uns ist insbesondere der Fall $n = 2$ interessant:
Analytische Beschreibung von $SU(2)$ und $su(2)$:

- $A \in SU(2)$:
  Allgemein gilt
  $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, detA = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
  Für $A \in SU(2)$ gilt zusätzlich $AA^* = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^* = \overline{A^T}$
  $$\Rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \Leftrightarrow d = \bar{a}, c = -\bar{b}.$$
  Also gilt
  $$A \in SU(2) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1.$$
  Folglich ist $SU(2) \cong \mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid ||x|| = 1\}$.

- $A \in su(2)$:
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix},\ A = -A^*$$
$$\Rightarrow c = -\bar{b},\ ia, id \in \mathbb{R}. \text{ Ausserdem ist } tr\, A = 0 \Leftrightarrow a + d = 0.$$

  Also gilt:
$$A \in su(2) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} i\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & -i\alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}.$$

Definition 5.5 (Pauli-Matrizen) *Die Matrizen*
$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
heißen Pauli-Matrizen.
Für die Produkte gilt:
$$\begin{aligned}
\sigma_1\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} &= i\sigma_3 \\
\sigma_2\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} &= i\sigma_1 \\
\sigma_3\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= i\sigma_2.
\end{aligned}$$
Wir setzen $\mathcal{I} := -i\sigma_1$, $\mathcal{J} := -i\sigma_2$, $\mathcal{K} := -i\sigma_3$. Dann gelten alle in der Definition von Quaternionen geforderten Eigenschaften, wir haben also eine Matrix-Darstellung *der Quaternionen, wobei $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} \in su(2)$.*

Wir identifizieren
$$q = q_0 + q_1\mathcal{I} + q_2\mathcal{J} + q_3\mathcal{K} \in \mathbb{H}$$
mit
$$q_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + q_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_0 + iq_3 \end{pmatrix} := Q.$$
Aufgrund der analytischen Beschreibung wissen wir, dass nach dieser Identifizierung
$$\operatorname{Im} \mathbb{H} \cong su(2).$$
Ausserdem ist $det\ Q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2$, also
$$\mathbb{H}_1 \cong SU(2).$$
Somit gilt:
$$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^{\geq 0} SU(2) = \left\{ A \in gl(2, \mathbb{C}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right\}.$$
Dies ist der Fall, weil
$$\begin{aligned}
q \in \mathbb{H} \quad &\Leftrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} q_0 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_0 + iq_3 \end{pmatrix},\ det\ Q = \alpha^2,\ \alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0} \\
&\Rightarrow \quad Q = \alpha\, \widetilde{Q} \text{ mit } \widetilde{Q} \in SU(2).
\end{aligned}$$

Satz 5.9 (Quaternionen-Algebra) *Quaternionen-Algebra ist isomorph zur Algebra von $\mathbb{R}^{\geq 0}SU(2)$-Matrizen mit der gewöhnlichen Matrix-Addition und -Multiplikation.*

Beweis Siehe obige Identifizierung. □

Bemerkung Die konkrete Identifizierung $\mathbb{H} \leftrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}SU(2)$ ist nicht eindeutig - wir haben eine mittels Pauli-Matrizen gewählt.

5.3.3 Quaternionische Darstellung von Drehungen

Lemma 5.10 *$SU(2) \cong \mathbb{H}_1$ kann wie folgt parametrisiert werden:*

$$\Phi \in \mathbb{H}_1 \Leftrightarrow \Phi = \cos\alpha + \sin\alpha V,\ \ V \in Im\,\mathbb{H}, |V| = 1, \alpha \in [0,\pi].$$

Dabei ist V eindeutig, wenn Φ nicht reell ist, d.h. $\alpha \in (0,\pi)$.

Beweis Sei $\Phi = \Phi_R + \Phi_I \in \mathbb{H}_1$. Dann ist

$$1 = |\Phi|^2 = |\Phi_R|^2 + |\Phi_I|^2 \Rightarrow \Phi_R \in [-1,1]$$

Also existiert $\alpha \in [0,\pi]$ mit $\Phi_R = \cos\alpha$ und es gilt:

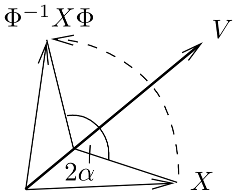
$$\begin{aligned} |\Phi_I|^2 = \sin^2\alpha \quad & \overset{\alpha\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \quad |\Phi_I| = \sin\alpha \\ & \Leftrightarrow \quad \Phi_I = \sin\alpha V, |V| = 1, V \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}. \end{aligned}$$

Also ist für $\alpha \in (0,\pi)$

$$V = \frac{\Phi_I}{\sin\alpha}$$

eindeutig. □

Satz 5.11 *Eine Drehung in $\mathbb{R}^3$ um den Nullpunkt kann beschrieben werden durch:*



$$X \in Im\,\mathbb{H} \mapsto \Phi^{-1}X\Phi \in Im\,\mathbb{H} \tag{5}$$

wobei $\Phi = \cos\alpha + \sin\alpha V \in \mathbb{H}_1$ ($V \in Im\,\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3, |V| = 1$). (5) ist die Drehung um den Vektor V und den Winkel 2α. $\Phi, \widetilde{\Phi} \in \mathbb{H}_1$ beschreiben dieselbe Drehung genau dann, wenn $\Phi = \pm\widetilde{\Phi}$.

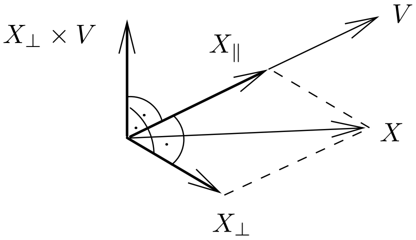
Beweis Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung für jedes solche Φ eine Rotation beschreibt:
Sei also $\Phi = \cos\alpha + \sin\alpha\ V,\ V \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$, $|V| = 1$. Da $|\Phi| = 1$, gilt

$$\bar{\Phi}\Phi = 1 \Leftrightarrow \Phi^{-1} = \bar{\Phi} = \cos\alpha - \sin\alpha\ V.$$

Also können wir schreiben

$$\begin{aligned} X \mapsto \Phi^{-1}X\Phi = \bar{\Phi}X\Phi &= (\cos\alpha - \sin\alpha\ V)X(\cos\alpha + \sin\alpha\ V) \\ &= \cos^2\alpha X - \sin^2\alpha VXV + \cos\alpha\sin\alpha(XV - VX). \end{aligned}$$

Zerlege $X = X_{||} + X_\perp$, wobei $X_{||} \mathbin{||} V$ und $X_\perp \perp V$:

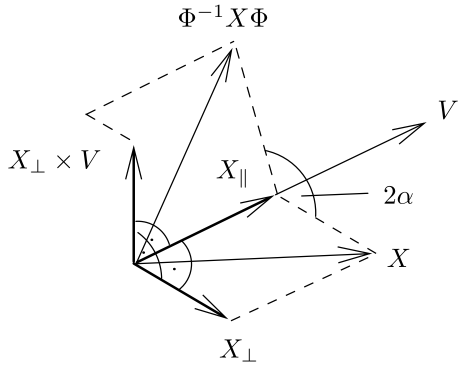


Nach Korollar 5.8 ist

- $VX_{||}V = X_{||}VV = -X_{||}$
- $VX_\perp V = -X_\perp VV = X_\perp$
- $[X_\|, V] = X_{||}V - VX_{||} = 0$
- $[X_\perp, V] = X_\perp V - VX_\perp = 2X_\perp \times V$.

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}X\Phi &= \cos^2\alpha(X_{||} + X_\perp) - \sin^2\alpha(-X_{||} + X_\perp) + 2\cos\alpha\sin\alpha\; X_\perp \times V \\
&= X_{||} + X_\perp(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha\; X_\perp \times V \\
&= X_{||} + \underbrace{\cos(2\alpha)\,X_\perp + \sin(2\alpha)\,X_\perp \times V}_{\text{Drehung von } X_\perp \text{ um den Winkel } 2\alpha \text{ in der } \{X_\perp, X_\perp \times V\}\text{-Ebene.}}
\end{aligned}$$



Zur Eindeutigkeit:

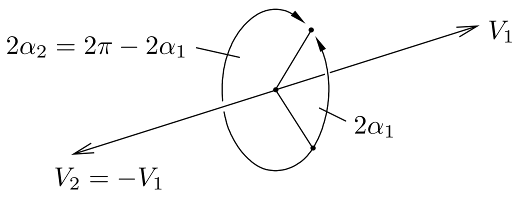
Das Φ und $-\Phi$ dieselbe Drehung ergeben kann man leicht nachrechnen...

Seien also Φ_1 und Φ_2 zwei unitäre Quaternionen, welche die selbe Drehung beschreiben.
Nach Lemma 5.10 ist

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 V_1 \\ \Phi_2 &= \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2 V_2\end{aligned} \qquad V_1, V_2 \in \operatorname{Im}\mathbb{H},\ |V_1| = |V_2| = 1.$$

Falls $\alpha_1 \in \{0, \pi\} \Rightarrow \Phi_1 = \pm 1$, beide Rotationen sind also die Identität. Also muss $\sin\alpha_2 = 0$ sein und somit auch $\alpha_2 \in \{0, \pi\} \Rightarrow \Phi_2 = \pm\Phi_1$.

Für $\alpha_1 \in (0, \pi)$ findet tatsächlich eine Rotation um die Achse V_1 statt, also müssen V_1 und V_2 linear abhängig sein, da die Rotationen sonst nicht identisch sein können. Da $|V_1| = |V_2|$ ist also $V_2 = \pm V_1$. Falls nun $V_2 = V_1$, muss also $\alpha_2 = \alpha_1$ sein und somit $\Phi_2 = \Phi_1$. Falls jedoch $V_2 = -V_1$ wird in entgegengesetzen Richtungen gedreht $\Rightarrow \alpha_2 = \pi - \alpha_1 \Rightarrow \Phi_2 = -\Phi_1$.



□

Satz 5.12 *Sei $F = (N, B, T) : [a, b] \to SO(3)$ eine Bewegung (d.h. die glatten Funktionen $N(t)$, $B(t)$, $T(t)$ bilden $\forall t$ eine positive ONB des $\mathbb{R}^3$).*
Dann

1. *gibt es ein glattes* $\Phi : [a,b] \to \mathbb{H}_1$ *(* $\cong SU(2)$ *) mit*

$$\begin{array}{ccc} N & \leftrightarrow & \Phi^{-1}\mathcal{I}\Phi \\ B & \leftrightarrow & \Phi^{-1}\mathcal{J}\Phi \\ T & \leftrightarrow & \Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi. \end{array} \tag{6}$$

2. $\Phi : [a,b] \to \mathbb{H}_1$ *ist eindeutig, bis auf die Transformation* $\Phi \to -\Phi$.

3. Φ *erfüllt die Gleichung* $\Phi' = U\Phi$ *mit* $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\tau & \kappa - i\eta \\ -\kappa - i\eta & -i\tau \end{pmatrix}$ *wobei*

$$\begin{array}{ccc} \kappa & = & \langle T', N\rangle \\ \eta & = & \langle T', B\rangle \\ \tau & = & \langle N', B\rangle . \end{array}$$

Beweis Wir unterscheiden in diesem Beweis nicht sorgfältig zwischen entsprechenden Objekten aus $\operatorname{Im}\mathbb{H}$, $\mathbb{R}^3$ etc.

$(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}) \leftrightarrow (e_1,e_2,e_3)$ ist eine positiv orientierte ONB $\Rightarrow \forall t$ existiert eine Rotation $(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}) \mapsto (N(t),B(t),T(t))$, da dies ebenfalls eine positive ONB ist, also existiert Φ punktweise. Noch wissen wir jedoch nicht, ob diese Abhängigkeit glatt ist...

Wir zeigen zunächst "1. $\Rightarrow$ 3." und kommen anschliessend zur Existenz einer glatten Funktion Φ.

Sei also Φ glatt so dass (6) gelte.
Definiere $U := \Phi'\Phi^{-1}$ und berechne: $\kappa = \langle T', N\rangle = \left\langle \left(\Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi\right)', \Phi^{-1}\mathcal{I}\Phi \right\rangle$.
Allgemein gilt $A, B \in \operatorname{Im}\mathbb{H} \Rightarrow \langle A,B\rangle = -\frac{1}{2}(AB+BA) = -\frac{1}{2}tr(AB)$, denn

$$\begin{aligned} A &= (A_1,A_2,A_3) = \begin{pmatrix} -iA_3 & -iA_1 - A_2 \\ -iA_1 + A_2 & iA_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}\mathbb{H} \\ AB &= \begin{pmatrix} -iA_3 & -iA_1 - A_2 \\ -iA_1 + A_2 & iA_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -iB_3 & -iB_1 - B_2 \\ -iB_1 + B_2 & iB_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -A_3B_3 - A_1B_1 - A_2B_2 + Im & * \\ * & -A_3B_3 - A_2B_2 - A_1B_1 - Im \end{pmatrix}. \\ & \quad (Im := i(A_2B_1 - A_1B_2)) \end{aligned}$$

Somit gilt konkret

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi\right)', \Phi^{-1}\mathcal{I}\Phi \right\rangle &= -\frac{1}{2}tr\left(\left(\Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi\right)'\Phi^{-1}\mathcal{I}\Phi\right) \\ &\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}tr\left(\left(-\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi + \Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi'\right)\Phi^{-1}\mathcal{I}\Phi\right) \\ &= -\frac{1}{2}tr\left(\Phi^{-1}\left(-\Phi'\Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi + \mathcal{K}\Phi'\right)\Phi^{-1}\mathcal{I}\Phi\right) \\ &\overset{(**)}{=} -\frac{1}{2}tr\left(-\Phi'\Phi^{-1}\mathcal{K}\mathcal{I} + \mathcal{K}\Phi'\Phi^{-1}\mathcal{I}\right) \\ &\overset{(**)}{=} -\frac{1}{2}tr\left(-\Phi'\Phi^{-1}\mathcal{K}\mathcal{I} + \Phi'\Phi^{-1}\mathcal{I}\mathcal{K}\right) \\ &= -\frac{1}{2}tr\left(-U\mathcal{J} - U\mathcal{J}\right) \\ &= 2\,tr\left(U\mathcal{J}\right) = \kappa. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet:

$$(*)\qquad \begin{aligned} & \left(\Phi^{-1}\right)' \overset{(4)}{=} -\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1} \\ \Rightarrow\; & \left(\Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi\right)' = -\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi + \Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi' \end{aligned}$$

$$(**)\qquad \begin{aligned} & tr\,(AB) = tr\,(BA) \\ \Rightarrow\; & tr(\underbrace{B^{-1}A}_{\widetilde{A}}B) = tr\,(A)\,. \end{aligned}$$

Genauso berechnet man:

$$\begin{aligned} \eta &= \langle T', B\rangle = 2\,tr\,(U\mathcal{K}\mathcal{J}) = 2\,tr\,(-U\mathcal{I}) \\ \tau &= \langle N', B\rangle = 2\,tr\,(U\mathcal{I}\mathcal{J}) = 2\,tr\,(U\mathcal{K})\,. \end{aligned}$$

Da $U = a\mathcal{I} + b\mathcal{J} + c\mathcal{K}$ erhält man

$$\begin{aligned} \kappa &= -2b & & b = \frac{1}{2}\kappa \\ \eta &= 2a & \Leftrightarrow\quad & a = \frac{1}{2}\eta \qquad\qquad \text{(nachrechnen)} \\ \tau &= -2c & & c = -\frac{1}{2}\tau. \end{aligned}$$

Zur Existenz von glattem Φ:

Wir benötigen noch folgendes

Lemma 5.13 *Zu jedem glatten $U : [a,b] \to su\,(2)$, $t \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\tau & \kappa - i\eta \\ -\kappa - i\eta & -i\tau \end{pmatrix}(t)$, gibt es genau eine Lösung $\Phi : [a,b] \to SU\,(2)$ von $\Phi' = U\Phi$ für jeden Anfangswert $\Phi\,(t_0) = \Phi_0 \in SU\,(2)$.*
($\tau, \kappa, \eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind dementsprechend glatte Funktionen)

Beweis Wie für $F : [a,b] \to SO\,(2)$ im Hauptsatz (5.6). □

Wir wissen bereits, dass Φ punktweise existiert, und dass jedes glatte Φ welches unsere Bewegung beschreibt die Gleichung $\Phi' = U\Phi$ erfüllt.
Wähle also $t_0 \in [a,b] \Rightarrow \exists\ \Phi_0 \in SU\,(2)$ mit

$$\begin{aligned} N\,(t_0) &= \Phi_0^{-1}\mathcal{I}\Phi_0 \\ B\,(t_0) &= \Phi_0^{-1}\mathcal{J}\Phi_0 \qquad\qquad (\Phi_0 \text{ ist eindeutig bis auf Vorzeichen}) \\ T\,(t_0) &= \Phi_0^{-1}\mathcal{K}\Phi_0. \end{aligned}$$

Löse das AWP $\Phi' = U\Phi$, $\Phi\,(t_0) = \Phi_0$ für $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\tau & \kappa - i\eta \\ -\kappa - i\eta & -i\tau \end{pmatrix}$, wobei τ, η, κ von der vorgegebenen Bewegung kommen. Also ist $U \in su(2)$ und glatt. Nach dem Lemma existiert eine eindeutige Lösung Φ.
Betrachte die durch

$$\begin{aligned} N\,(t) &= \Phi^{-1}\,(t)\,\mathcal{I}\Phi\,(t) \\ B\,(t) &= \Phi^{-1}\,(t)\,\mathcal{J}\Phi\,(t) \\ T\,(t) &= \Phi^{-1}\,(t)\,\mathcal{K}\Phi\,(t) \end{aligned}$$

gegebene Bewegung.

Diese Bewegung hat dieselben Koeffizienten κ, η, τ wie die ursprüngliche Bewegung und in t_0 stimmen sie überein $\Rightarrow \Phi(t)$ beschreibt die ursprüngliche Bewegung und ist glatt (da N, B, T und somit κ, η, τ glatt sind).

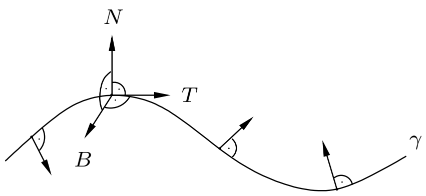
Falls wir als Startwert des AWP's $-\Phi_0$ gewählt hätten, folgt aus Satz 5.11 dass wir als Lösung $-\Phi$ erhalten hätten, also ist Φ eindeutig bis auf Vorzeichen. $\square$

Bemerkung Man sagt, dass die Gruppe $SU(2)$ eine *doppelte Überlagerung* der Gruppe $SO(3)$ ist. D.h. jedem Element in $SO(3)$ entsprechen zwei Elemente in $SU(2)$; $F \leftrightarrow \{\Phi, -\Phi\}$.

6 Gerahmte Kurven in $\mathbb{R}^3$

Definition 6.1 (Gerahmte Kurven)

- *Sei* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *eine reguläre Kurve. Dann heißt* $N : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ Einheitsnormalenfeld*, falls*
$$\langle N, N\rangle = 1 \text{ und } \langle N, \gamma'\rangle = 0.$$
- *Eine Kurve* γ *zusammen mit einem Einheitsnormalenfeld* N *heißt* gerahmte Kurve*, weil durch* (γ, N) *in jedem Punkt ein eindeutiger* Rahmen (N, B, T) *(d.h. eine positiv orientierte ONB) gegeben ist.*



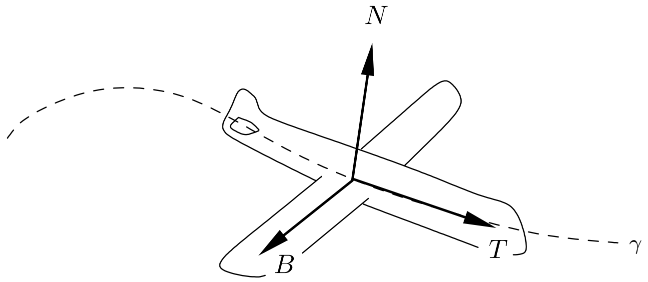
Diesen Rahmen erhält man durch
$$T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|},\ B = T \times N.$$

Bemerkung Sei $N : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ glatt für eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Wenn man die Kurve γ nach der Bogenlänge parametrisiert bleibt N glatt.

Definition 6.2 (Krümmungen gerahmter Kurven & Torsion) *Sei* (γ, N) *eine gerahmte, nach der Bogenlänge paramtrisierte Kurve und* (N, T, B) *der zugehörige Rahmen* ($T = \gamma'$, $B = T \times N$)*. Dann heißen* $\kappa = \langle T', N\rangle$ *und* $\eta = \langle T', B\rangle$ *Krümmungen und* $\tau = \langle N', B\rangle$ *Torsion der gerahmten Kurve* (γ, N)*.*

Bemerkung Man beachte, dass wie im Falle von ebenen Kurven die Krümmungsgrößen nur für nach der Bogenlänge parametrisierter Kurven definiert sind. Den allgemeinen Fall führt man wieder darauf zurück.

Man kann sich diese Größen gut vorstellen, wenn man sich ein Flugzeug denkt welches die Kurve abfliegt und dementsprechend seine Richtung ändert, bzw. sich um seine eigene Achse dreht:



Also beschreibt die Krümmung κ die Stärke des Anstiegs, die Krümmung η die seitliche Ablenkung und die Torsion die Drehung um die Eigene Achse.

Lemma 6.1 *Ein Rahmen* (N, B, T) *beschreibt eine Drehung im* $\mathbb{R}^3$ *und erfüllt die* Frenet-Gleichungen
$$\begin{aligned} N' &= \tau B - \kappa T \\ B' &= -\tau N - \eta T \\ T' &= \kappa N + \eta B. \end{aligned}$$

Beweis $F = (N, B, T) : [a, b] \to SO(3)$ ist eine Drehung und erfüllt die Gleichung

$$F' = Ff.$$

□

Lemma 6.2 *Sei (γ, N) eine nach der Bogenlänge parametrisierte gerahmte Kurve. ($\gamma, N : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ glatt). Dann gibt es:*

1. *genau eine glatte Abbildung $F : [a, b] \to SO(3)$, $t \mapsto F(t)$ mit* $N = Fe_1$, $\gamma' = Fe_3$.
2. *eine glatte Abbildung $\Phi : [a, b] \to SU(2)$ (eindeutig bis auf Vorzeichen) mit* $N = \Phi^{-1}\mathcal{I}\Phi$, $\gamma' = \Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi$.

Die Abbildungen F und Φ erfüllen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} F' &= Ff \\ \Phi' &= U\Phi \end{aligned} \qquad mit \qquad \begin{aligned} f &= \begin{pmatrix} 0 & -\tau & \kappa \\ \tau & 0 & -\eta \\ -\kappa & -\eta & 0 \end{pmatrix} \\ U &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\tau & \kappa - i\eta \\ -\kappa - i\eta & -i\tau \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beweis Sätze 5.6 und 5.12. □

Bemerkung Eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ besitzt viele Rahmen. Sei (N, B, T) ein Rahmen von γ. Jeder weitere Rahmen $(\widetilde{N}, \widetilde{B}, \widetilde{T})$ von γ ist dann von der Form

$$\begin{aligned} \widetilde{T} &= T \\ \widetilde{N} &= cos\varphi N + sin\varphi B \\ \widetilde{B} &= -sin\varphi N + cos\varphi B. \end{aligned} \tag{7}$$

Lemma 6.3 *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve mit einem glatten Rahmen (N, B, T) und den Krümmungsgrößen κ, η, τ. Dann werden alle anderen glatten Rahmen durch (7) gegeben, wobei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist. Dieser Rahmen hat die Krümmungsgrößen*

$$\begin{aligned} \widetilde{\kappa} &= cos\varphi\kappa + sin\varphi\eta \\ \widetilde{\eta} &= -sin\varphi\kappa + cos\varphi\eta \\ \widetilde{\tau} &= \tau + \varphi'. \end{aligned}$$

Beweis Nachrechen. □

Definition 6.3 (Kongruenz gerahmter Kurven) *Zwei gerahmte Kurven (γ, N) und $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{N})$ heißen* kongruent, *falls es $A \in SO(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$ gibt, so dass*

$$\begin{aligned} \widetilde{N}(s) &= AN(s) \\ \widetilde{\gamma}(s) &= A\gamma(s) + a. \end{aligned}$$

Satz 6.4 (Hauptsatz der Theorie gerahmter Kurven) *Es seien drei stetige Funktionen $\kappa, \eta, \tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte gerahmte Kurve (γ, N), $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3, N : [a,b] \to \mathbb{S}^2$, so dass $\kappa(s), \eta(s), \tau(s)$ die Krümmungsgrössen von (γ, N) sind. (γ, N) ist durch κ, η, τ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.*

Beweis Wähle $s_0 = a$ und $F_0 \in SO(3)$ (oder $\Phi_0 \in SU(2)$, in diesem Fall läuft der Beweis analog). Definiere $F : [a,b] \to SO(3)$ als die Lösung der Differentialgleichung

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\tau & \kappa \\ \tau & 0 & -\eta \\ -\kappa & -\eta & 0 \end{pmatrix}$$

unter der Anfangsbedingung $F(s_0) = F_0$.

Die Spalten von F bilden nach Definition von $SO(3)$ $\forall s$ eine ON Basis $(N, B, T)(s)$.
Definiere $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ durch $\gamma'(s) = T(s), \gamma(s_0) = \gamma_0 \in \mathbb{R}^3$. Dann ist (γ, N) eine gerahmte Kurve welche die Bedinungen erfüllt.
Unsere Freiheiten waren dabei die Wahl von $\gamma_0 \in \mathbb{R}^3$ und $F_0 \in SO(3)$, also ist das Ganze eindeutig bis auf Kongruenz. $\square$

Definition 6.4 (Frenet-Rahmen & paralleler Rahmen) *Ein Rahmen (N, B, T) von γ heißt*

1. Frenet-Rahmen *falls* $\eta \equiv 0$
2. paralleler Rahmen *falls* $\tau \equiv 0$.

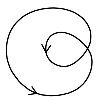
Bemerkung Bei einem Frenet-Rahmen ist also die Torsion so gewählt, dass sich T infinitessimal nur in vertikaler Richtung (d.h. in der (N,T)-Ebene) ändert. Bei einem parallelen Rahmen verschwindet hingegen die Torsion, was bedeutet das sich der Rahmen lokal nicht um die T-Achse dreht.

6.1 Reguläre Homotopie geschlossener gerahmter Kurven

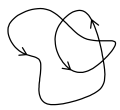
- In der Ebene hatten wir folgende Äquivalenz erkannt:

$$\begin{aligned} & \gamma \text{ und } \tilde{\gamma} \text{ sind regulär homotop} \\ \Leftrightarrow\ & \gamma \text{ und } \tilde{\gamma} \text{ haben selbe Tangentenumlaufzahl } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

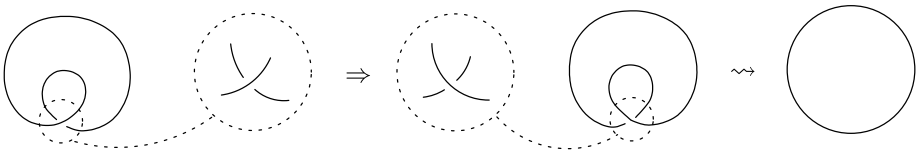
  Zum Beispiel sind folgende Kurven regulär homotop:



$\underline{n = 2}$



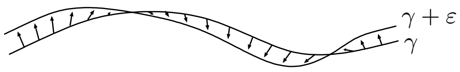
- Im Raum wird man mit folgendem Problem konfrontiert:



  Wenn man solche Deformationen zulässt, sind alle geschlossenen Kurven regulär homotop!
  Um dieses Problem zu lösen kann man die gerahmten Kurven im $\mathbb{R}^3$ auch als schmale Streifen

betrachten:

Wenn $(\gamma, N)(t)$ eine gerahmte Kurve ist, bilden die Kurven $\gamma(t)$ und $\gamma(t) + \varepsilon N(t)$ (ε sehr klein) zwei Seiten dieses Streifens.



Also betrachtet man *reguläre Homotopien von geschlossenen Streifen.*

Die Idee ist zu schauen, wie sich die $SU(2)$-Darstellung des Rahmen ändert wenn man die Kurve einmal durchlaufen hat. Dies liefert den sogenannten *Twist* welcher wiederum ein Kriterium für reguläre Homotopie liefert.

Für geschlossene (periodische) gerahmte Kurven gilt :

$$(\gamma, N)(s) = (\gamma, N)(s + L)$$

$\Rightarrow T(s) = \gamma'(s)$ ist auch periodisch.
Somit ist ein L-Periodischer Rahmen gegeben durch:

$$N(s) = N(s + L),\, T(s) = T(s + L)\,,\; B(s) = T(s) \times N(s) \leftrightarrow (N, B, T)\,.$$

Betrachte die $SU(2)$ Beschreibung von gerahmten Kurven: Es existiert ein glattes Φ mit

$$\begin{aligned} N(s) &= \Phi^{-1}\mathcal{I}\Phi \\ T(s) &= \Phi^{-1}\mathcal{J}\Phi \\ B(s) &= \Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi \end{aligned}$$

wobei $\Phi'(s) = U\Phi(s)\,, U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\tau & \kappa - i\eta \\ -\kappa - i\eta & -i\tau \end{pmatrix}$.

Φ ist eindeutig bis auf Vorzeichen.

Die Frage ist nun, ob Φ ebenfalls periodisch ist, d.h. $\Phi(s+L) = \Phi(s)$, oder ob $\Phi(s+L) = -\Phi(s)$?

Für jede geschlossene Kurve gilt

$$\begin{array}{rrcl} & \Phi^{-1}(s)\,\mathcal{I}\Phi(s) & = & \Phi^{-1}(s+L)\,\mathcal{I}\Phi(s+L) \\ \Leftrightarrow & \Phi(s+L)\,\Phi^{-1}(s)\,\mathcal{I} & = & \mathcal{I}\Phi(s+L)\,\Phi^{-1}(s) \\ \Leftrightarrow & M\mathcal{I} & = & \mathcal{I}M \\ \Leftrightarrow & [M, \mathcal{I}] & = & 0 \end{array}$$

mit $M := \Phi(s+L)\,\Phi^{-1}(s) \in \mathbb{H}_1$.

Genauso erhält man $[M, \mathcal{J}] = [M, \mathcal{K}] = 0$, insgesamt folgt daraus, dass $M = \pm I$.

Definition 6.5 (Twist) *Das Vorzeichen von $M = \Phi(s+L)\,\Phi^{-1}(s)$ heißt* Twist *der gerahmten geschlossenen Kurve (γ, N).*

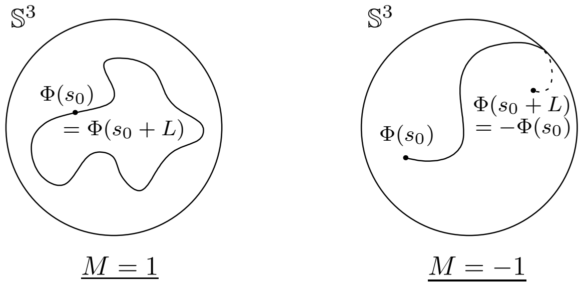
Definition 6.6 (Reguläre Homotopie gerahmter Kurven) *Zwei geschlossene gerahmte Kurven (γ, N), $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{N})$ (N und $\widetilde{N}$ sind auch periodisch), heißen* regulär homotop*, wenn es eine reguläre Homotopie γ_λ der Kurven γ und $\widetilde{\gamma}$ mit einem Einheitsnormalenfeld N_λ gibt ($\langle \gamma'_\lambda, N_\lambda \rangle = 0, \langle N_\lambda, N_\lambda \rangle = 1$), so dass gilt:*

1. $N_0(t) = N(t), N_1(t) = \widetilde{N}(t), \lambda \in [0,1]$.

2. Die Abbildung $(t,\lambda) \mapsto N_\lambda(t), N'_\lambda(t)$ *ist stetig.*

Satz 6.5 *Regulär homotope geschlossene gerahmte Kurven haben den selben Twist.*

Beweis (Idee)
Sei (γ, N) eine geschlossene gerahmte Kurve $(\gamma, N)(s+L) = (\gamma, N)(s)$.
Betrachte $\Phi : s \mapsto \Phi(s), [0,L] \to \mathbb{H}_1 \cong \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.
Es gibt 2 Möglichkeiten:



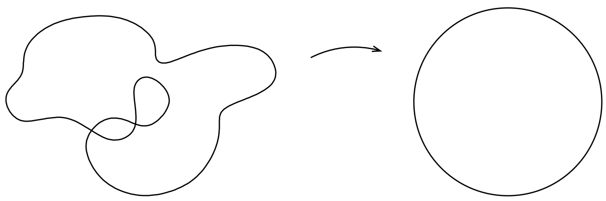
Da eine Homotopie den Rahmen stetig verändert, wird auch das Bild Φ stetig deformiert. Also folgt aus der Existenz einer Homotopie, dass der Twist gleich bleiben muss. □

Bemerkung Twist ist die einzige Invarianz regulärer Homotopien geschlossener gerahmter Kurven (kompliziert zu zeigen).

Man kann das Ganze erweitern zur Theorie regulärer Homotopien von immersierten geschlossenen orientierten Flächen:

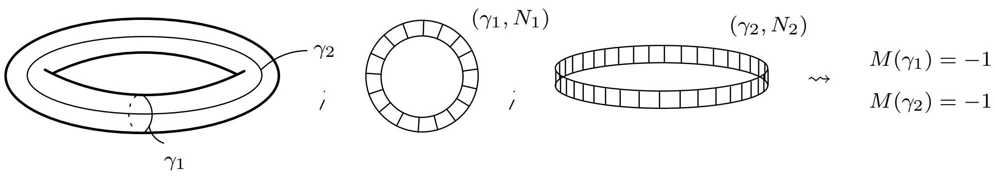
Beispiele

- Alle Sphären sind regulär homotop

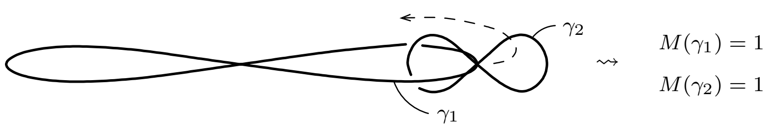


- Es gibt zwei Typen von Tori

  1. Typ



  2. Typ



6.2 Frenet-Kurven

Definition 6.7 *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ heißt* Frenet-Kurve, *wenn folgendes gilt:*

1. *Es gibt einen Frenet Rahmen für γ.*
2. *$M_0 = \{s \in [a, b] \mid \gamma''(s) \neq 0\}$ ist dicht in $[a, b]$.*
   (Geraden sind keine Frenet Kurven)

Satz 6.6 (Eindeutigkeit des Frenet-Rahmens) *Eine Frenet Kurve hat genau zwei Frenet-Rahmen. Ist (N, B, T) ein solcher, so ist $(-N, -B, T)$ der andere. Sind κ, τ die Krümmungsgrößen von (N, B, T) so sind $-\kappa$, τ die Krümmungsgrößen von $(-N, -B, T)$.*

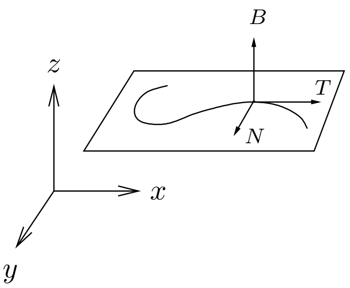
Beweis Seien (N, B, T), $(\widetilde{N}, \widetilde{B}, \widetilde{T})$ Frenet-Rahmen. Klar ist: $T = \gamma' = \widetilde{T}$.
Auf M_0 gilt:

$$\begin{aligned} \gamma'' = T' &= \kappa N \\ = \widetilde{T}' &= \widetilde{\kappa}\widetilde{N} \neq 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \widetilde{N} = \pm N$, $\widetilde{\kappa} = \pm\kappa \Rightarrow \forall s \in M_0$ gilt $\widetilde{N}(s) = \pm N(s)$.
Des Weiteren ist M_0 dicht, $N, \widetilde{N}$ stetig $\Rightarrow \widetilde{N}(s) = \pm N(s) \, \forall s \in [a, b] \Rightarrow \widetilde{\kappa}(s) = \pm\kappa(s) \, \forall s \in [a, b]$.
Die Behauptung über $\widetilde{B}$ und $\widetilde{\tau}$ folgt aus $B = T \times N$ und $\tau = \langle N', B \rangle$. □

Bemerkung In der Theorie der Frenet-Kurven sind nur die Punkte mit $\gamma''(s_0) = 0$ „schlecht“.
Wenn die zweite Ableitung nicht verschwindet liefert $T = \gamma'$, $N = \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|}$, $B = T \times N$ einen Frenet-Rahmen in $\gamma(s_0)$.

Beispiel 6.1 (Frenet-Kurve in der Ebene)



Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \cong \{(x, y, z) \,|\, z = c\} \subset \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert.
Dann ist $B(s) = e_3$, $N(s) = e_3 \times T(s)$ und $B' = -\eta T - \tau N = 0$.
Also ist (N, B, T) ein Frenet-Rahmen mit $\tau = 0$.
Die Vektoren T und N liegen in der Ebene und $T' = \kappa N$. Die Krümmung κ entspricht also in diesem Fall der altbekannten Krümmung ebener Kurven.

Satz 6.7 *Sei γ eine Frenet-Kurve in $\mathbb{R}^3$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ mit $\gamma([a, b]) = Sp(\gamma) \subset E$*
2. *$\tau \equiv 0$.*

Beweis

$1 \Rightarrow 2$: Beschreibe die Ebene als $E = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, B \rangle = d\}$, wobei $B \in \mathbb{R}^3$, $\|B\| = 1$ und $d \in \mathbb{R}$.
Mit $T = \gamma'$ und $N = B \times T$ ist (N, B, T) ein Frenet-Rahmen mit $\tau \equiv 0$.

$2 \Rightarrow 1$: (N, B, T) sei Frenet-Rahmen für γ mit $\tau \equiv 0$. Dann ist $B'(s) = 0$ und der Vektor $B(s) = B$ somit konstant.
Definiere $d(s) := \langle \gamma(s), B \rangle$. Dann ist $d'(s) = \langle T(s), B \rangle + \langle \gamma(s), B' \rangle = 0$ und $d(s) = d \; \forall s$.
Folglich ist $Sp(\gamma) \subset \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, B \rangle = d\} =: E$.

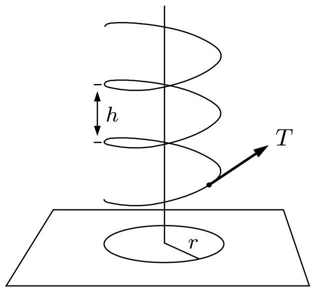
$\square$

Beispiel 6.2 (Allgemeine Helix) In Beispiel 1.4 hatten wir schon eine spezielle Variante der Helix betrachtet. Allgemein parametrisiert man eine Helix als

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), \frac{\omega}{2\pi} ht)$$

wobei $r, w, h \in \mathbb{R}$ und $r, w > 0$. ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Parametrisierung und es gilt:

$$\gamma(t + \frac{2\pi}{\omega}) = \gamma(t) + (0, 0, h)$$



Ausserdem ist:

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (-r\omega\sin(\omega t), r\omega\cos(\omega t), \frac{\omega}{2\pi} h) \\
\|\gamma'\| &= \sqrt{r^2\omega^2 + \omega^2 \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} \\
&\Rightarrow \gamma \text{ ist für } \omega = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\frac{h}{2\pi})^2}} \text{ nach der Bogenlänge parametrisiert.} \\
\gamma''(t) &= (-r\omega^2\cos(\omega t), -r\omega^2\sin(\omega t), 0) \neq 0.
\end{aligned}$$

Also hat man

$$\begin{aligned}
T &= \gamma' \\
N &= \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|} = (-\cos(\omega t), -\sin(\omega t), 0) \\
B &= T \times N = \omega \left(\frac{h}{2\pi}\sin(\omega t), -\frac{h}{2\pi}\cos(\omega t), r\right).
\end{aligned}$$

Für die Krümmungsgrößen gilt:

$$\begin{aligned}
\kappa &= \langle T', N\rangle = \langle \gamma'', N\rangle = \|\gamma''\| = r\omega^2 = \frac{r}{r^2 + (\frac{h}{2\pi})^2} \\
\tau &= \langle N', B\rangle = \frac{h}{2\pi r^2 + \frac{h^2}{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Bemerkung

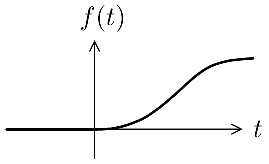
- $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow h = 0 \quad \Rightarrow \gamma$ liegt in der $xy-$Ebene (vergl. Satz 6.7)
- $r \to 0 \quad \Rightarrow \tau \to \frac{2\pi}{h} \neq 0$, also geht γ gegen die $z-$Achse, und der Rahmen rotiert "unnötigerweise" um diese Gerade.

Beispiel 6.3 (Beispiele für *nicht* Frenet-Kurven)

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{\frac{1}{t}}) & t < 0 \\ (0, 0, 0) \quad \text{für} & t = 0 \\ (t, e^{-\frac{1}{t}}, 0) & t > 0 \end{cases}$$

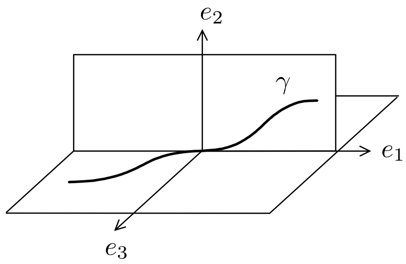
ist regulär und beliebig oft stetig differenzierbar, da

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \phantom{\text{für }} t > 0 \end{cases}$$



beliebig oft stetig differenzierbar ist ($f^{(k)}(0) = 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}$).

γ sieht folgendermaßen aus:

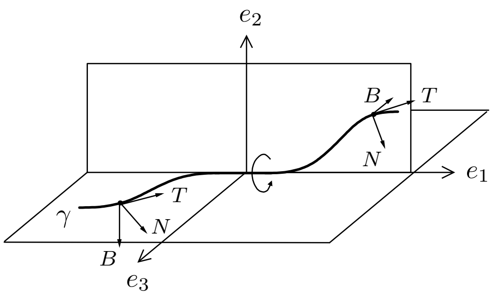


Es gilt:

$$\begin{aligned} T(0) &= e_1 \\ \langle N(t), e_2 \rangle &= 0 \text{ für alle } t < 0 \\ \langle N(t), e_3 \rangle &= 0 \text{ für alle } t > 0. \end{aligned}$$

Gäbe es nun einen Frenet-Rahmen, so würde $N(0) \perp e_1, e_2, e_3$ gelten.
Widerspruch!

Man kann γ jedoch wie folgt modifizieren, so dass es sogar viele Frenet-Rahmen gibt:



Hierbei wurde "ein Stück lineare Funktion" eingefügt. Deswegen handelt es sich allerdings immer noch nicht um eine Frenet-Kurve, da die Menge

$$M_0 = \{s \in [a, b] \mid \gamma''(s) \neq 0\}$$

nicht dicht in $[a, b]$ ist.

Satz 6.8 (Hauptsatz für Frenet-Kurven) *Seien $\gamma, \widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ zwei Frenet-Kurven mit den Krümmungsgrößen $\kappa, \tau, \widetilde{\kappa}, \widetilde{\tau}$. Dann sind äquivalent:*

a) γ und $\widetilde{\gamma}$ sind kongruent

b) $\left\{ \begin{smallmatrix} \widetilde{\kappa}=\kappa \\ \widetilde{\tau}=\tau \end{smallmatrix} \right\}$ oder $\left\{ \begin{smallmatrix} \widetilde{\kappa}=-\kappa \\ \widetilde{\tau}=\tau \end{smallmatrix} \right\}$.

Beweis

a) $\Rightarrow$ *b)* Es existieren $A \in SO(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$\widetilde{\gamma} = A\gamma + a.$$

Sei also $F : I \to SO(3)$ ein Frenet-Rahmen von γ.
Dann ist $\widehat{F} := AF : I \to SO(3)$ ein Frenet-Rahmen von $\widetilde{\gamma}$, denn

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\gamma} = A\gamma' & \Rightarrow & \widehat{T} = \widetilde{\gamma}' \text{ und ausserdem gilt} \\ & & \widehat{\kappa} = \kappa, \widehat{\tau} = \tau \text{ und } \widehat{\eta} = \eta = 0. \end{array}$$

Wegen der Eindeutigkeit des Frenet-Rahmens (Satz 6.6) ist dann

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\kappa} & = & \pm\widehat{\kappa} = \pm\kappa \\ \text{und} \quad \widetilde{\tau} & = & \widehat{\tau} = \tau. \end{array}$$

b) $\Rightarrow$ *a)* Seien $F, \widetilde{F} : I \to SO(3)$ die Frenet-Rahmen von γ und $\widetilde{\gamma}$
O.B.d.A. $\widetilde{\kappa} = \kappa,\ \widetilde{\tau} = \tau,\ \widetilde{\eta} = \eta = 0$. Nach Satz 6.4 sind $\widetilde{\gamma}$ und γ dann kongruent.

□

6.3 Kurven mit parallelem Rahmen

Rahmen ohne Torsion, d.h. $\tau \equiv 0$, haben wir als parallele Rahmen definiert. Dass man für jede reguläre Kurve einen solchen Rahmen findet (im Gegensatz zu Frenet-Rahmen), liefert folgender Satz:

Satz 6.9 (Existenz von parallelen Rahmen) *Jede reguläre Kurve besitzt einen parallelen Rahmen.*

Beweis Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ die Bogenlängenparametrisierung der regulären Kurve und $N_0 \perp \gamma'(s_0),\ \|N_0\| = 1$ für $s_0 \in I$. Weiter sei $N : I \to \mathbb{R}^3$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$N' = -\langle N, T' \rangle\, T,\ N(s_0) = N_0,\ T = \gamma'.$$

Zu zeigen: $\|N(t)\| = 1$. Betrachte also

$$\langle N, N \rangle' = 2\langle N', N \rangle = -2\langle N, T' \rangle \langle T, N \rangle.$$

Bleibt zu zeigen, dass $T \perp N$ ($\Rightarrow \langle N, N \rangle' = 0\ \Rightarrow \|N(t)\| = \|N_0\| = 1$):
Es gilt:

$$\begin{array}{rcl} \langle N, T \rangle' & = & \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle \\ & = & -\langle N, T' \rangle \underbrace{\langle T, T \rangle}_{=1} + \langle N, T' \rangle = 0. \end{array}$$

$$\text{Da } \langle N_0, T_0 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad N \perp T.$$

□

Satz 6.10 (Eindeutigkeit des parallelen Rahmens) *Sei (N, B, T) ein paralleler Rahmen einer regulären Kurve. $(\widetilde{N}, \widetilde{B}, \widetilde{T})$ ist genau dann auch ein paralleler Rahmen dieser Kurve, wenn $\varphi \in \mathbb{R}$ existiert, so dass:*

$$\widetilde{T} = T,\ \ \widetilde{N} = \cos\varphi N + \sin\varphi B,\ \ \widetilde{B} = -\sin\varphi N + \cos\varphi B.$$

Beweis Sie (N, B, T) ein paralleler Rahmen. Wir wissen bereits, dass alle anderen glatten Rahmen in obiger Form mit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, φ glatt, beschrieben werden können. Zu zeigen ist, dass φ im Falle von parallelen Rahmen konstant ist.

$\underline{\Rightarrow}$ Sei $(\widetilde{N}, \widetilde{B}, \widetilde{T})$ ein weiterer paralleler Rahmen, also $\kappa = \widetilde{\kappa} = 0$. Nach Lemma 6.3 gilt

$$\widetilde{\tau} = \tau + \varphi' \Rightarrow \varphi' = 0 \Rightarrow \varphi \equiv const.$$

$\underline{\Leftarrow}$ Sei $(\widetilde{N}, \widetilde{B}, \widetilde{T})$ ein durch obige Formel gegebener weiterer Rahmen, also $\varphi \equiv const.$ Zu zeigen ist $\widetilde{\tau} = 0 \Leftrightarrow \langle \widetilde{N}', \widetilde{B} \rangle = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{N}', \widetilde{B} \rangle &= \langle \cos\varphi N' + \sin\varphi B', -\sin\varphi N + \cos\varphi B \rangle \\ &= \cos^2\varphi \underbrace{\langle N', B \rangle}_{=\tau=0} - \sin^2\varphi \underbrace{\langle B', N \rangle}_{=-\tau=0} + \sin\varphi\cos\varphi \underbrace{\langle B', B \rangle}_{=0} - \cos\varphi\sin\varphi \underbrace{\langle N', N \rangle}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

□

Definition 6.8 (Komplexe Krümmungsfunktion) *Sei (N, B, T) ein paralleler Rahmen mit Krümmungsgrößen κ und η. Dann heißt*

$$\psi := \kappa + i\eta$$

komplexe Krümmungsfunktion *des Rahmens.*

Bemerkung

- Ist $\psi : I \to \mathbb{C}$ komplexe Krümmungsfunktion einer gegebenen regulären Kurve, dann sind nach dem vorigen Satz 6.10 die komplexen Krümmungsfunktionen aller anderen parallelen Rahmen von der Form
$$\widetilde{\psi} = e^{-i\varphi}\psi,\ \ \varphi \in \mathbb{R}.$$
- Sei $\Phi : I \to SU(2)$ der zu einem parallelen Rahmen gehörige $SU(2)$-Rahmen. Dann erfüllt Φ nach Lemma 6.2 die Gleichung
$$\Phi' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ -\psi & 0 \end{pmatrix}\Phi.$$

Satz 6.11 (Hauptsatz für Kurven mit parallelem Rahmen)

a) Zu jeder komplexen Krümmungsfunktion existiert eine reguläre Kurve die einen parallelen Rahmen mit der gegebenen Krümmungsfunktion besitzt.

b) Seien $\gamma, \widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ zwei nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven mit parallelem Rahmen und den komplexen Krümmungsfunktionen $\psi, \widetilde{\psi} : I \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1) γ und $\widetilde{\gamma}$ sind kongruent

2) $\widetilde{\psi} = e^{-i\varphi}\psi$ für ein konstantes $\varphi \in \mathbb{R}$.

Beweis

zu a) Sei die komplexe Krümmungsfunktion $\psi = \kappa + i\eta : I \to \mathbb{C}$ gegeben. Lösbarkeit der Frenet-Gleichungen:

$$\exists\ (N, B, T) : I \to SO(3) \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} N' &= -\kappa T \\ B' &= -\eta T \\ T' &= \kappa N + \eta B. \end{aligned}$$

Also besitzt die Kurve

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} T(\sigma) d\sigma, \quad s_0 \in I$$

ψ als Krümmungsfunktion.

zu b) Analog zum Beweis für Frenet-Rahmen:

1)⇒2) gegeben: $\widetilde{\gamma} = A\gamma + a, \quad A \in SO(3), a \in \mathbb{R}^3$.
Sei F ein paralleler Rahmen von γ.
Aus dem Hauptsatz über gerahmte Kurven folgt, dass $\widehat{F} := AF$ ein paralleler Rahmen von $\widetilde{\gamma}$ ist, und es gilt $\widehat{\psi} = \psi$.
Wegen der "Eindeutigkeit des parallelen Rahmens" hat man

$$\widetilde{\psi} = e^{-i\varphi}\widehat{\psi} = e^{-i\varphi}\psi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

2)⇒1) Sei $\widetilde{\psi} = e^{-i\varphi}\psi$ komplexe Krümmungsfunktion des parallelen Rahmens von $\widetilde{\gamma}$.
Wieder aufgrund der "Eindeutigkeit des parallelen Rahmens" wissen wir, dass $\widetilde{\gamma}$ einen weiteren parallelen Rahmen mit der komplexen Krümmungsfunktion $e^{i\varphi}\widetilde{\psi} = \psi$ besitzt.
Also sind die entsprechenden Krümmungsgrößen von $\widetilde{\gamma}$ identisch mit denen von γ, nach Satz 6.4 sind die Kurven also kongruent.

□

Satz 6.12 (Zusammenhang zwischen parallelem und Frenet-Rahmen) *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve und $s_0 \in I$. Dann gilt Folgendes*

1) Sei (N, B, T) ein Frenet-Rahmen von γ mit den Krümmungsgrößen κ und τ. Dann ist

$$\psi := \kappa e^{i\int_{s_0}^{s} \tau(\sigma)d\sigma}$$

komplexe Krümmungsfunktion eines parallelen Rahmens von γ.

2) Sei $\psi = \widehat{\kappa}(s)e^{i\varphi}$ komplexe Krümmungsfunktion eines parallelen Rahmens von γ mit $\widehat{\kappa}, \varphi : I \to \mathbb{R}$ glatt. Dann besitzt γ einen Frenet-Rahmen mit den Krümmungsgrößen

$$\kappa = \widehat{\kappa}(= \pm|\psi|) \text{ und } \tau = \varphi'(= \frac{\partial}{\partial s} arg\psi).$$

Beweis

zu 1) Definiere

$$\varphi(s) := \int_{s_0}^{s} -\tau(\sigma) d\sigma$$

Nach Lemma 6.3 ist

$$\widetilde{T} = T,\ \widetilde{N} = \cos\varphi N + \sin\varphi B,\ \widetilde{B} = -\sin\varphi N + \cos\varphi B$$

paralleler Rahmen ($\widetilde{\tau} = \tau + \varphi' = \tau - \tau = 0$).

Die komplexe Krümmungsfunktion dieses Rahmens ist gegeben durch

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{\kappa} + i\widetilde{\eta} = e^{-i\varphi}(\kappa + \underbrace{i\eta}_{\overset{Frenet}{=}0}) = \kappa e^{i\int_{s_0}^{s}\tau(\sigma)d\sigma}.$$

zu 2) Sei (N, B, T) ein paralleler Rahmen mit komplexer Krümmungsfunktion $\psi = \widehat{\kappa}e^{i\varphi}$.
Setze:

$$\widetilde{T} = T,\ \widetilde{N} = \cos\varphi N + \sin\varphi B,\ \widetilde{B} = -\sin\varphi N + \cos\varphi B.$$

Behauptung: $(\widetilde{N}, \widetilde{B}, \widetilde{T})$ ist ein Frenet-Rahmen.
Dies gilt, da

$$\widetilde{\kappa} + i\widetilde{\eta} = e^{-i\varphi}(\kappa + i\eta) = e^{-i\varphi}\psi = e^{-i\varphi}\widehat{\kappa}e^{i\varphi} = \widehat{\kappa}$$

$$\Rightarrow \widetilde{\kappa} = \widehat{\kappa},\ \widetilde{\eta} = 0.$$

Also handelt es sich um einen Frenet-Rahmen mit $\widetilde{\tau} = \tau + \varphi' = \varphi'$.

$\square$

Bemerkung Fügt man bei der Definition von φ in Punkt 1) noch eine Integrationskonstante an

$$\varphi(s) := \int_{s_0}^{s} \tau(\sigma)d\sigma + \varphi_0,$$

so erhält man alle möglichen parallelen Rahmen.

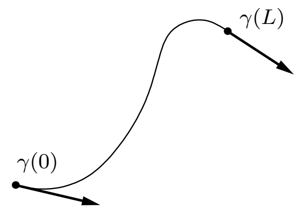
7 Elastische Kurven

Sei $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ eine (nach der Bogenlänge) parametrisierte Kurve.

Fragestellung: Finde eine Kurve, so dass $\int_0^L \kappa^2 ds$ minimal ist ($\kappa^2 = |T'|^2 = |\gamma''|^2$).

Fest sind dabei:

1. Die Endpunkte $\gamma(0), \gamma(L) \in \mathbb{R}^3$
2. Die Länge L
3. Die Tangenten in den Endpunkten, $\gamma'(0), \gamma'(L) \in \mathbb{S}^2$.



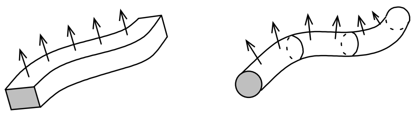
Definition 7.1 (Elastische Kurven) *Extremale des Funktionals*

$$S = \int_0^L \kappa^2 ds$$

heißen elastische Kurven (Elastica).

S kann als Biegeenergie interpretiert werden.

Bemerkung (Elastische Stäbe) Eine natürliche Verallgemeinerung der elastischen Kurven sind elastische Stäbe.



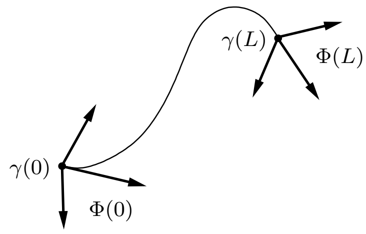
Sie können als gerahmte Kurven beschrieben werden:

$$S = \int_0^L (\kappa^2 + \alpha\tau^2) ds.$$

Dabei entspricht κ^2 der Biegeenergie, α einer materialabhängigen Konstanten und τ^2 der Torsionsenergie. Man betrachtet also Kurven $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ mit Rahmen

$$\begin{aligned} (N, B, T) &: [0, L] \to SO(3), \text{ bzw.} \\ \Phi &: [0, L] \to \mathbb{H}_1. \end{aligned}$$

Die zulässigen Variationen erhalten dann die Endpunkte, die Rahmen in den Endpunkten und die Länge.



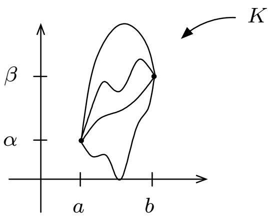
7.1 Variationsrechnung

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und

$$\begin{aligned} L : \quad I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto L(t, x, y) \end{aligned}$$

eine zweimal stetig differentierbare Abbildung, $L \in C^2$.
Definiere für feste $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$K := \{f \in C^2([a,b], \mathbb{R}) \mid f(a) = \alpha, f(b) = \beta\}$$



und

$$S(f) := \int_a^b L(t, f(t), f'(t))dt.$$

Gesucht ist ein $\varphi \in K$, so dass

$$S(\varphi) = min\{S(f) \mid f \in K\}.$$

Satz 7.1 (Euler-Lagrange-Gleichung) *Eine notwendige Bedingung dafür, dass* $S(\varphi) = min\{S(f) \mid f \in K\}$*, ist dass* φ *die* Euler-Lagrange Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$$

erfüllt.

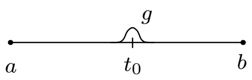
Bemerkung Die Euler-Lagrange-Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2.ter Ordnung. Die Lösungen dieser Gleichung heißen *kritische Punkte* des Funktionals S.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch folgendes

Lemma 7.2 (Fundamentallemma der Variationsrechnung) *Sei* $F \in C([a,b], \mathbb{R})$*. Dann gilt*

$$\int_a^b F(t)g(t)dt = 0 \ \forall g \in C^2([a,b], \mathbb{R}) \implies F \equiv 0.$$

Beweis Sei $t_0 \in [a,b]$. Betrachte g's, die nur in einer kleinen Umgebung von t_0 nicht verschwinden. Da diese Umgebung beliebig klein sein kann, folgt aus der Stetigkeit von F, dass $F(t_0) = 0$.



□

Beweis des Satzes Sei also $\varphi \in K$ minimal bezüglich des Funktionals S. Definiere den Vektorraum

$$V := \{g \in C^2([a,b], \mathbb{R}) \mid g(a) = g(b) = 0\}.$$

Da φ ein Minimum des Funktionals ist, gilt:

$$S(\varphi) \leq S(\varphi + \varepsilon g) \ \ \forall g \in V.$$

Definiere weiter

$$F(\varepsilon) := S(\varphi + \varepsilon g).$$

$F(\varepsilon)$ hat dann für alle $g \in V$ ein Minimum an der Stelle $\varepsilon = 0$, also ist

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int_a^b L(t,\varphi(t)+\varepsilon g(t),\varphi'(t)+\varepsilon g'(t))dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} L(t,\varphi(t)+\varepsilon g(t),\varphi'(t)+\varepsilon g'(t))dt \\ &= \int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial x}g+\frac{\partial L}{\partial y}g'\Big)dt. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration bekommen wir:

$$\int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t)\Big)g'(t)dt =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t))g(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t))g(t)dt$$

$$\overset{g(a)=g(b)=0}{=} -\int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y}g\ dt.$$

Wir haben also

$$0 = \int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y}\Big)g\ dt \quad \forall g\in V.$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung gilt also:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y}.$$

□

7.1.1 N-dimensionale Verallgemeinerung

Für die N-dimensionalen Verallgemeinerung erhalten wir analoge Behauptungen zur eindimensionalen Variationsrechnung:

Seien $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und

$$f: I\to\mathbb{R}^n,\qquad L:\ \begin{array}{rcl} I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (t,x,y) & \mapsto & L(t,x,y) \end{array}$$

zweimal stetig differentierbare Funktionen, $L,f\in C^2$.

Randbedingungen sind:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=\alpha \\ f(b)=\beta \end{array}\right\}\in\mathbb{R}^n.$$

Definiere analog

$$S(f) := \int_a^b L(t,f(t),f'(t))dt.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & S(\varphi) = min\{S(f)\mid f\in C^2([a,b]\to\mathbb{R}^n)\} \\ \Rightarrow\quad & \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_i}(t,\varphi(t),\varphi'(t)) = \frac{\partial L}{\partial x_i}(t,\varphi(t),\varphi'(t)),\ \ i=1..n. \end{aligned}$$

Damit haben wir die *mehrdimensionalen Euler-Lagrange-Gleichungen.*

7.2 Das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung

$f_1(t), .., f_n(t)$ beschreiben den Zustand eines physikalischen Systems als Funktion der Zeit.

$$L(t, f, f') := T - V \quad \text{heißt } \textit{Lagrange'sche Funktion (Lagrangian)}$$

wobei T die kinetische, und V die potentielle Energie des Systems ist.

$$S(f) := \int_a^b L(t, f, f')dt \quad \text{heißt } \textit{Wirkung.}$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung:
Die Wirkung $S(f)$ ist minimal für den abgelaufenen Vorgang!

Wir zeigen: Das Prinzip der kleinsten Wirkung impliziert das Newton'sche Kraftgesetz.

Die Funktionen f_i beschreiben in diesem Fall den Ort eines Teilchens. Sei also $x = (f_1, .., f_n)^T \in \mathbb{R}^n$ der Ort und $V(x)$ die potentielle Energie.

Für die kinetische Energie gilt: $T = \frac{1}{2}m|x'|^2$ $\quad$ (m ist die Masse des Teilchens).

$$\Longrightarrow L(t, x, y) = T - V = \frac{1}{2}m|y|^2 - V(x), \quad |y|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Also ist

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y_i} = my_i.$$

Wir identifizieren y_i mit x_i' und erhalten:

$$\frac{d}{dt}(mx_i') = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \Longleftrightarrow mx_i'' = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1..n$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{mx'' = -gradV(x)}$$

Dabei entspricht x'' der Beschleunigung, und $-gradV(x)$ der Kraft, also

$$\boxed{F = ma} \quad \text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung.}$$

7.3 Lokale Extrema mit Nebenbedingungen

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und

$$f : X \to \mathbb{R}, \ h : X \to \mathbb{R}^m$$

stetig diffbar. Definiere

$$M := \{x \in X \mid h(x) = 0\}.$$

Gesucht werden Extrema der Funktion f unter den m Nebenbedingungen $h_i = 0, \ i = 1..m$, also auf der Menge M. Diese Extrema findet man mit Hilfe von *Lagrange-Multiplikatoren*:

Betrachte

$$\begin{array}{rcl} F : X \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ (x, \lambda) & \mapsto & f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) \quad (\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m). \end{array}$$

Auf M eingeschränkt ist $F(x, \lambda) = f(x)$.

Finde lokale Extrema von $F(x,\lambda)$:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = 0 & j = 1..n \\ h_i(x) = 0 & i = 1..m \end{array}\right\} \quad \text{Das sind } (m+n) \text{ Gleichungen für } (m+n) \text{ Variablen.}$$

Satz 7.3 *Seien* $f : R^n \supset X \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ *stetig diffbar,* X *offen. Falls* f *in* $a \in X$ *ein lokales Extremum unter den Nebenbedingungen* $h(x) = 0$ *(insbesondere* $h(a) = 0$*) besitzt und* $rank(\frac{\partial h}{\partial x}) = m$ *ist, dann gibt es* m *Zahlen* (Lagrangesche Multiplikatoren) *mit denen die Gleichung*

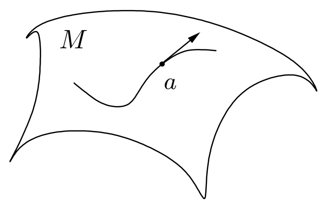
$$\mathrm{grad} f(a) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \ \mathrm{grad} h_i(a) = 0$$

gilt.

Beweis Analysis II. □

7.3.1 Geometrische Interpretation

Version 1

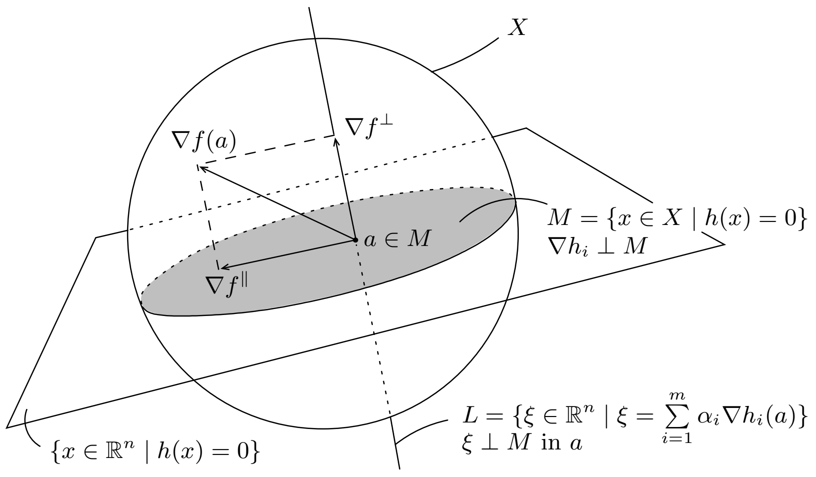


Sei γ eine Kurve *in* M, die durch $a = \gamma(t_0) \in M$ geht. Dann ist $h(\gamma(t)) = 0$, und $\gamma'(t_0)$ der Tangentialvektor an der Stelle a (liegt in der Tangentialebene T_aM).
Aus $h(\gamma(t)) = 0 \ \forall \ t$ folgt, dass

$$\underbrace{d_a h(\gamma'(t_0))}_{=\langle \mathrm{grad} h(a), \gamma'(t_0)\rangle} = 0.$$

Also ist $\mathrm{grad} h(a)$ senkrecht zu jedem Tangentialvektor, d. h. $\mathrm{grad} h(a) \perp M$. Genauer gesagt steht $\mathrm{grad} h(a)$ senkrecht auf der Tangentialebene an M im Punkt a.

Version 2



$\mathrm{grad} f$ kann eindeutig zerlegt werden in

$$\mathrm{grad} f = \mathrm{grad} f^{\perp} + \mathrm{grad} f^{||},$$

wobei gilt: $\mathrm{grad} f^{\perp} \in L$, $\ \mathrm{grad} f^{||} \perp \mathrm{grad} f^{\perp}$.

Wenn nun f in a ein lokales Extremum unter den Nebenbedingungen $h = 0$ besitzt, dann folgt

$$\begin{aligned}
& \mathrm{grad} f^{||} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{grad} f \in L \\
\Leftrightarrow \quad & \exists_{\lambda_1,..,\lambda_m \in \mathbb{R}} \text{ mit } \mathrm{grad} f + \textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i \, \mathrm{grad} h_i = 0.
\end{aligned}$$

7.3.2 Nebenbedingungen in der Variationsrechnung

bearbeitet man auch mit Lagrange-Multiplikatoren:

Sei $L(t, f(t), f'(t))$ Lagrangian. Minimiere

$$S(f) := \int_a^b L(t, f(t), f'(t))dt$$

unter den Nebenbedingungen $h_1(t, x, y) = \ldots = h_m(t, x, y) = 0$. Definiere

$$H_i := \int_a^b h_i(t, f(t), f'(t))dt \quad , i = 1..m$$

und betrachte

$$L_\lambda(t, f, f') := L(t, f, f') + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(t, f, f').$$

Dann gilt:

Ist f ein Extremum von $S(f)$ unter den Nebenbedingungen $H_i(f) = 0$, $i = 1..m$, dann existieren $\lambda_1, .., \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass f die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial y_i} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_i} \qquad (x = f(t), y = f'(t))$$

erfüllt.

7.4 Elastica

Nun können wir endlich das ursprüngliche Problem angehen:

Minimiere $S := \int_0^L \kappa^2(s)ds$ unter den Nebenbedingungen:

- feste Endpunkte
- feste Länge
- vorgegebene Tangentialvektoren in den Endpunkten.

$\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ sei ohne Einschränkung nach der Bogenlänge parametrisiert,

Satz 7.4 *γ ist* Elastica *genau dann, wenn es $a, b \in \mathbb{R}^3$ gibt, so dass*

$$\gamma'' \times \gamma' = a \times \gamma + b.$$

Beweis

$$S := \int_0^L \kappa^2(s)ds,\ \gamma'(s) =: T(s),\ T : [0, L] \to \mathbb{S}^2,\ ||T|| = 1$$

$$|\kappa(s)| = |T'(s)| \Rightarrow \kappa^2 = \langle T'(s), T'(s)\rangle$$

$$\text{Also } S = \int_0^L \langle T'(s), T'(s)\rangle ds.$$

Nebenbedingungen:

1. $L = const.$
2. $T(0), T(L)$ fest
3. $\gamma(0), \gamma(L)$ fest $\Leftrightarrow \gamma(L) - \gamma(0) = \int_0^L T(s)ds$ fest
4. $T(s) \in \mathbb{S}^2 \Rightarrow \int_0^L (\langle T(s), T(s)\rangle - 1)c(s)ds = 0,\ \forall c \in C^1([0,L], \mathbb{R})$.

Da wir Translationen vernachlässigen können, nehmen wir $\gamma(0) = 0$ an. Wir erhalten als Lagrangian

$$L_\lambda = \langle T', T'\rangle + \underbrace{\langle 2a, T\rangle}_{=\sum_{i=1}^3 a_i H_i,\ H_i = \int_0^L T_i(s)ds - const} + c(s)(\langle T, T\rangle - 1)$$

mit Lagrange-Multiplikatoren $\lambda = (a, c)$. Damit ist

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (T_1, T_2, T_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3) = (T_1', T_2', T_3').$$

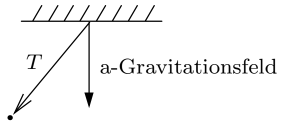
Also

$$\begin{array}{rrcl}
 & \frac{d}{ds}\frac{\partial L_\lambda}{\partial T_i'} & = & \frac{\partial L_\lambda}{\partial T_i} \quad ,i = 1,2,3 \\
\Leftrightarrow & \frac{d}{ds}(2T_i') & = & 2a_i + 2c(s)T_i \quad ,i = 1,2,3 \\
\Leftrightarrow & T'' & = & a + c(s)T \\
\Leftrightarrow & T'' \times T & = & a \times T \\
\Leftrightarrow & \gamma''' \times \gamma' & = & a \times \gamma' \\
\Leftrightarrow & \gamma'' \times \gamma' & = & a \times \gamma + b \quad a, b \in \mathbb{R}^3.
\end{array}$$

□

Bemerkung (Physikalische Interpretation)
$\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ ist eine elastische Kurve genau dann, wenn $T := \gamma' : [0, L] \to \mathbb{S}^2$ die Evolution eines sphärischen Pendels mit der Energie

$$H := \frac{1}{2}||T'||^2 - \langle a, T\rangle$$



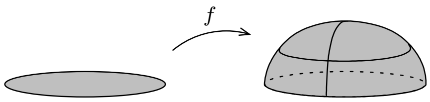
ist.

Parametrisierte Flächen und Mannigfaltigkeiten

Im Falle von **Kurven** haben wir eindimensionale Mengen parametrisiert.
Eine Äquivalenzklasse von Kurven, eine *immersierte Kurve*, bestand aus verschiedenen Parametrisierungen der selben Menge. Unter diesen Parametrisierungen hat die standardisierte *Parametrisierung nach der Bogenlänge* eine besondere Rolle gespielt.
Unabhängig davon war es eine Eigenschaft der immersierten Kurve, ob sie *regulär* war, oder nicht.

Flächen gehen wir analog an, in diesem Fall betrachten wir zweidimensionale Mengen, bzw. Abbildungen

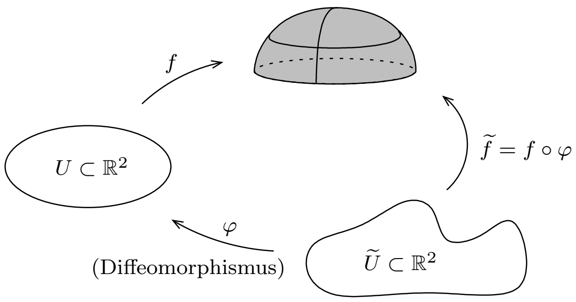
$$f : \mathbb{R}^2 \supset U \text{ offen } \to \mathbb{R}^3$$



8 Parametrisierte Flächen

Definition 8.1 (Parametrisierte Flächen & Immersionen)

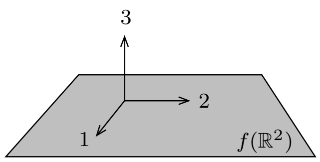
1. *Sei $U \in \mathbb{R}^2$ offen. Eine* parametrisierte Fläche *(Flachenstück) ist eine glatte Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^3$. f heißt auch* Parametrisierung, *$f(U) \in \mathbb{R}^3$* Spur *von f (oder Fläche), und $f(p)$, $p \in U$ nennt man* Punkte *der Fläche.*
2. *$f : (u,v) \mapsto f(u,v)$ heißt* regulär, *wenn das Differential $D_p f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injektiv ist $\forall p \in U$ (d. h. $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{\partial f}{\partial v}$ sind linear unabhängig $\forall p \in U$).*
3. *Reguläre parametrisierte Flächen heißen auch* Immersionen. *Punkte $p \in U$ in denen $D_p f$ nicht injektiv ist, heißen* singuläre Punkte *von f.*
4. *Zwei reguläre parametrisierte Flächen $f : U \to \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^3$ heißen* äquivalent, *wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi : \widetilde{U} \to U$ gibt, mit $\widetilde{f} = f \circ \varphi$. Die entsprechende Äquivalenzklasse (von Immersionen) heißt* immersierte Fläche.



Beispiele für Flächen:

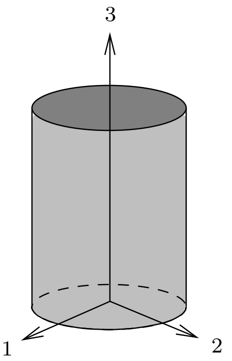
1. **Ebene**

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (u,v,0) \end{array}$$

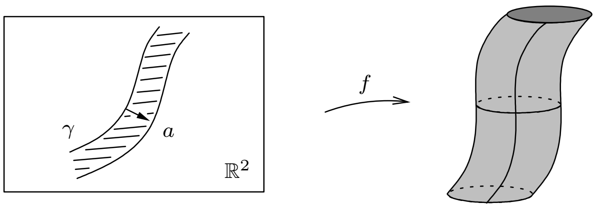


2. **Zylinder**

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

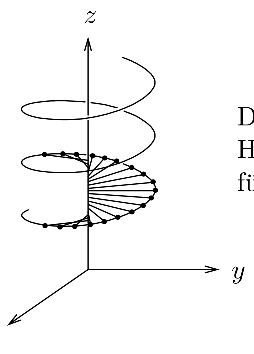


Allgemeiner: Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine periodische Abbildung mit der Periode $a \in \mathbb{R}^2$, d. h. $f(p+a) = f(p)$, $\forall p \in \mathbb{R}^2$, dann ist f ein
'topologischer Zylinder'.



3. **Helikoid**

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (v\cos u, v\sin u, u) \end{array}$$



Dies ist nur ein Ausschnitt des Helikoids, die Strecken stehen für Geraden...

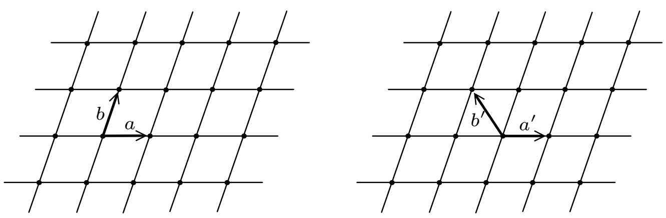
Der Helikoid wird erzeugt durch eine zur (x,y)-Ebene parallelen Geraden, welche eine Helix 'entlangrotiert'.

4. **Torus (doppelperiodische Fläche)**
Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Dann nennt man

$$\Lambda := \{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

ein *Gitter* im $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung Unter Umständen können verschiedene Basisvektoren die selben Gitter generieren:



Definition 8.2 (Λ-periodische Flächen) *Eine parametrisierte Fläche $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ heißt* Λ-periodisch *(oder parametrisierter Torus), falls gilt:*

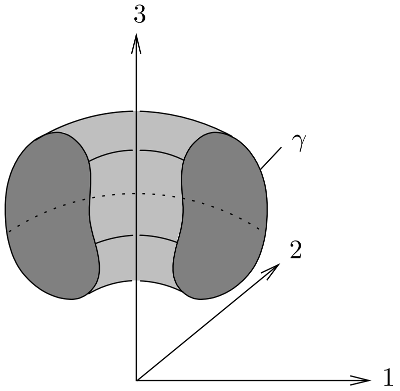
$$\begin{aligned} & f(p+w) = f(p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^2,\ \forall w \in \Lambda \\ \Leftrightarrow \quad & f(p+a) = f(p+b) = f(p). \end{aligned}$$

Sei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene ebene Kurve, also eine L-periodische Abbildung, $\gamma(t+L) = \gamma(t)$. Weiter sei $\gamma_1(t) > 0$. Betrachte

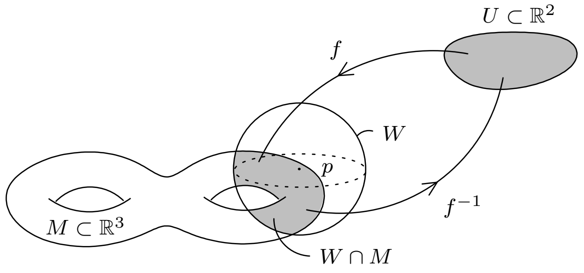
$$f(u,v) := (\gamma_1(u)\cos v, \gamma_1(u)\sin v, \gamma_2(u)).$$

Dies ist ein Rotationstorus *mit dem Periodengitter*

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} m + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} n \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$f(u,v) = f(u+L, v) = f(u, v+2\pi).$$

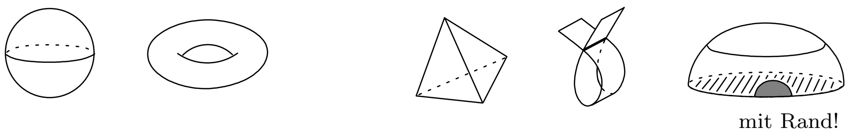


Definition 8.3 (Mannigfaltigkeit) *$M \subset \mathbb{R}^k$ heißt* (glatte) Mannigfaltigkeit *der Dimension m, falls jedes $p \in M$ eine Umgebung $W \cap M$ in M (W offen in $\mathbb{R}^k$) besitzt, die diffeomorph zu einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$ ist.*
Jeder solche Diffeomorphismus $f : U \to W \cap M$ heißt Parametrisierung von M in p. *Die inverse Abbildung $f^{-1} : W \cap M \to U$ heißt* Karte.
*Man nennt M auch m-*dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$.



Anschauliche Beispiele:

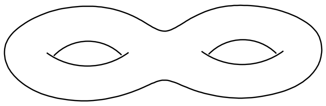
Mannigfaltigkeiten: keine Mannigfaltigkeiten:



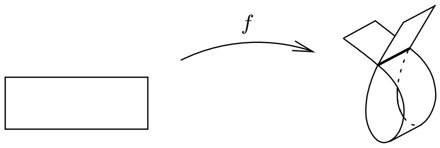
Definition 8.4 (Eingebettete Fläche) *Eine* eingebettete Fläche *ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.*

Beispiel 8.1 (Verschieden Klassen von Flächen)

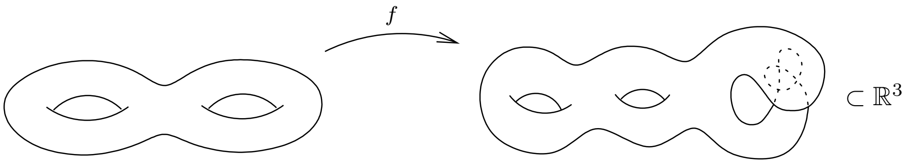
1) eingebettete Fläche



2) immersierte aber nicht eingebettete Fläche



3) man betrachtet auch immersierte Mannigfaltigkeiten



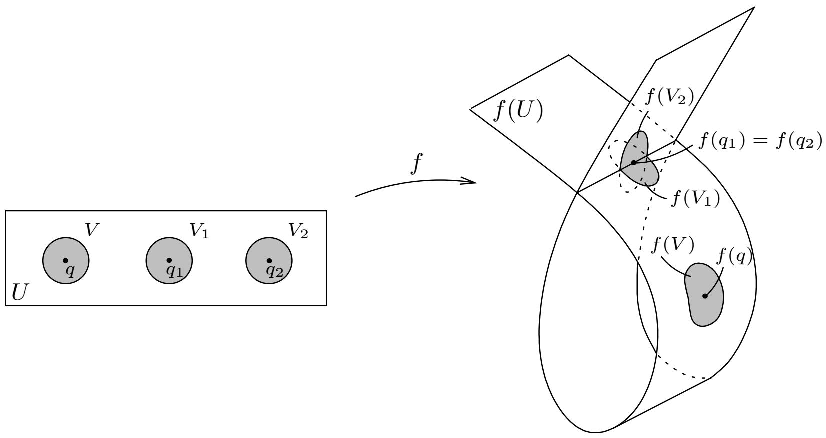
$f : M \to \mathbb{R}^3$ Immersion, M ist abstrakte 2-dim. Mannigfaltigkeit

Bemerkung Im Folgenden wird häufig die Notation

$$f_u := \frac{\partial f}{\partial u},\ f_v := \frac{\partial f}{\partial v}$$

verwendet.

Proposition 8.1 *Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion (reguläre parametrisierte Fläche), $q \in U$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von q, so dass $F(V) \subset \mathbb{R}^3$ eine eingebettete Fläche ist.*



Beweis Sei $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ eine Immersion, also sind f_u und f_v linear unabhängig. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass schon die ersten beiden Komponenten linear unabhängig sind, also

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} (q) \neq 0.$$

Definiere

$$\begin{aligned} F : U \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) &\mapsto f(u,v) + (0,0,w). \end{aligned}$$

Jakobi-Matrix von F:

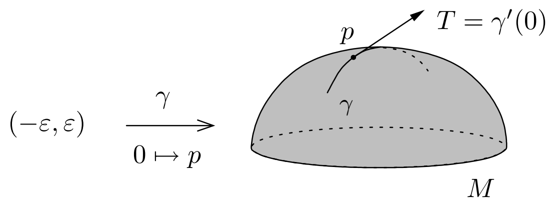
$$\frac{\partial(x(u,v),y(u,v),z(u,v)+w)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1. \end{pmatrix}$$

$$\det D_{(q,0)}F = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} (q) \neq 0$$

Nach dem Satz über inverse Funktionen gilt: $\exists$ offene Umgebungen $W_1 \ni (q,0)$ und $W_2 \ni F(q,0) = f(q)$, so dass $F : W_1 \to W_2$ ein Diffeomorphismus ist. Mit $V := W_1 \cap U$ sind also V und $f(V)$ diffeomorph. $\square$

8.1 Die erste Fundamentalform

Definition 8.5 (Tangentialvektor) *Ein Vektor $T \in \mathbb{R}^3$ heißt* Tangentialvektor an M in p, *falls es eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$, so dass $T = \gamma'(0)$.*



Proposition 8.2 *Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, $M = f(U)$ und $q \in U$. Der Untervektorraum $D_q f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ der Dimension 2 stimmt mit der Menge der Tangentialvektoren an M in $p = f(q)$ überein.*

Beweis Zu zeigen ist $D_q f(\mathbb{R}^2) = \{T \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, \gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \text{ glatt}, \gamma(0) = p, T = \gamma'(0)\}$.

Jede glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ lässt sich schreiben als

$$\gamma = f \circ \widehat{\gamma},$$

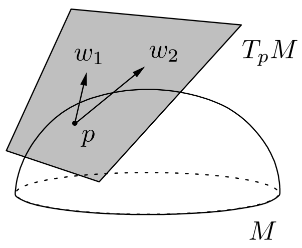
mit $\widehat{\gamma} : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ glatt. Dann ist $\gamma(0) = p \Leftrightarrow \widehat{\gamma}(0) = q$. Definiere $\widehat{v} := \widehat{\gamma}'(0)$, damit gilt

$$T = \gamma'(0) = D_q f(\widehat{v}).$$

Das zeigt schon einmal $\{T\} \subset D_q f(\mathbb{R}^2)$.

Da U offen ist und wir $\widehat{\gamma}$ so umparametrisierten können, dass $||\widehat{v}||$ beliebig groß wird, existiert für alle $v \in \mathbb{R}^2$ ein $\widehat{\gamma}$, so dass $v = \widehat{v}$. Folglich ist $\{T\} = D_q f(\mathbb{R}^2)$. $\square$

Bemerkung Das zeigt, dass $D_q f(\mathbb{R}^2)$ von der Parametrisierung unabhängig ist. $T_pM := D_q f(\mathbb{R}^2)$ mit $f(q) = p$ heißt *Tangentialebene* an M in p.
Das innere Produkt des $\mathbb{R}^3$ induziert für jede Tangentialebene T_pM ein inneres Produkt $\langle .,. \rangle_p$
$w_1, w_2 \in T_pM \mapsto \langle w_1, w_2 \rangle_p \in \mathbb{R}$.



Definition 8.6 (Erste Fundamentalform) *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Die symmetrische Bilinearform*

$$\begin{array}{rcl} I_p : (T_pM)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (w_1, w_2) & \mapsto & \langle w_1, w_2 \rangle_p \end{array}$$

heißt erste Fundamentalform *von M in p.*

Bemerkung (Quadratische Form)
Nach linearer Algebra gibt es zu jeder symmetrischen Bilinearform eine *quadratische Form*:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{I}_p : (T_pM) & \to & \mathbb{R}^+ \\ w & \mapsto & \langle w, w \rangle_p = I_p(w, w). \end{array}$$

Es gilt

$$\widetilde{I}_p(\alpha w) = \alpha^2 \widetilde{I}_p(w)$$

und

$$I_p(w_1, w_2) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{I}_p(w_1 + w_2) - \widetilde{I}_p(w_1) - \widetilde{I}_p(w_2)\right).$$

8.1.1 Die erste Fundamentalform in einer Parametrisierung

Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, $f(q) = p$, und $w_1 = (x_1, y_1)$, $w_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Betrachte

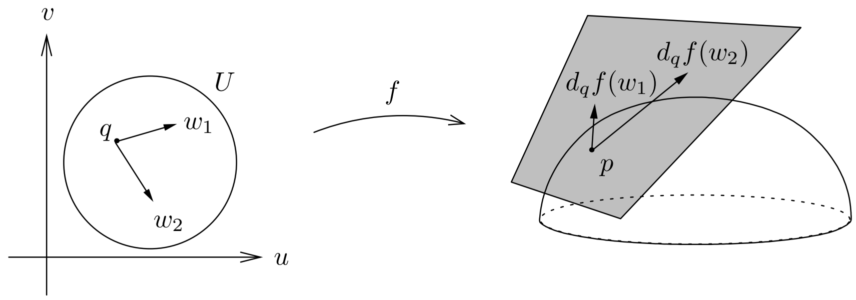
$$g_p(w_1, w_2) := I_p(d_qf(w_1), d_qf(w_2))$$

also

$$\begin{array}{rcl} g_p(w_1, w_2) & = & \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}x_1 + \frac{\partial f}{\partial v}y_1, \frac{\partial f}{\partial u}x_2 + \frac{\partial f}{\partial v}y_2 \right\rangle \\ & = & Ex_1x_2 + F(x_1y_2 + x_2y_1) + Gy_1y_2 \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{rcl} E & = & \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \langle f_u, f_u \rangle = ||f_u||^2 \\ F & = & \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \langle f_u, f_v \rangle = \cos\angle(f_u, f_v) \cdot ||f_u||\ ||f_v|| \\ G & = & \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \langle f_v, f_v \rangle = ||f_v||^2. \end{array}$$



Es sei $\gamma = f \circ \widehat{\gamma}$ eine Kurve auf $M = Sp(f)$ mit $\gamma(0) = p$. Dann ist $I_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = g_p(\widehat{\gamma}'(0), \widehat{\gamma}'(0)) = E(\widehat{\gamma_1}'(0))^2 + 2F(\widehat{\gamma_1}'(0) + \widehat{\gamma_2}'(0)) + G(\widehat{\gamma_2}'(0))^2$ die Länge von $\gamma'(0) \in T_pM$.

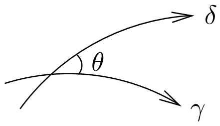
Dementsprechend kann man berechnen:

Länge einer Kurve auf M
Gesucht ist $L(\gamma)$, die Länge einer Kurve $\gamma : [a, b] \to M$. Es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{I_p(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt = \int_a^b \sqrt{g_p(\widehat{\gamma}'(t), \widehat{\gamma}'(t))}dt.$$

Schnittwinkel zweier Kurven auf M
Betrachte zwei glatte Kurven δ und γ auf M, die sich in $\delta(0) = \gamma(0)$ schneiden. Für den Schnittwinkel gilt:

$$\cos\theta = \frac{\langle \gamma'(0), \delta'(0)\rangle}{\sqrt{\langle \gamma'(0), \gamma'(0)\rangle \cdot \langle \delta'(0), \delta'(0)\rangle}} = \frac{g(\widehat{\gamma}'(0), \widehat{\delta}'(0))}{\sqrt{g(\widehat{\gamma}'(0), \widehat{\gamma}'(0)) \cdot g(\widehat{\delta}'(0), \widehat{\delta}'(0))}}.$$



Die erste Fundamentalform definiert also eine *Metrik* auf M, d.h. wir können damit Längen und Winkel auf M messen.

Man schreibt die erste Fundamentalform als *Tensor*:

$$ds^2 = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2$$

und spricht von "Bogenlängenelementen". Das bedeutet:

$$\left\|\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\|^2 = E\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + G\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2$$

wobei $\gamma(t) = f(\widehat{\gamma}(t))$ und $\widehat{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$.

Beispiele:

1. **Ebene:** $(u, v) \mapsto f(u, v) = (u, v, 0)$, $f_u = (1, 0, 0), f_v = (0, 1, 0)$, $E = 1, F = 0, G = 1$.
   Also ist die erste Fundamentalform: $du^2 + dv^2$.

2. **Zylinder:** $(u, v) \mapsto f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ $f_u = (-\sin u, \cos u, 0), f_v = (0, 0, 1)$, $E = 1, F = 0, G = 1$.
   Also ist die erste Fundamentalform ebenfalls: $du^2 + dv^2$.

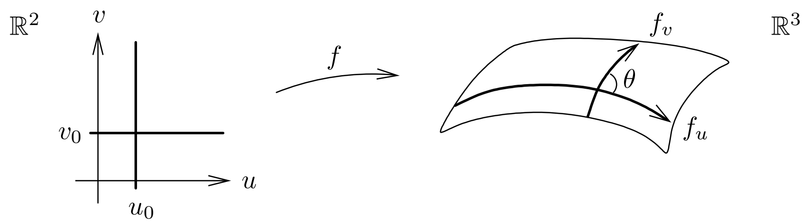
$\Rightarrow$ Die metrischen Eigenschaften sind gleich!

Parameterkurven
Jede Parametrisierung einer Fläche induziert *Parameterkurven*

$$\begin{array}{rcl} u & \mapsto & f(u, v_0),\ v_0 \in \mathbb{R} \\ v & \mapsto & f(u_0, v),\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Den Winkel zwischen zwei solchen Kurven kann man berechnen durch

$$\cos\theta = \frac{\langle f_u, f_v\rangle}{\sqrt{\langle f_u, f_u\rangle\langle f_v, f_v\rangle}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{8}$$



Definition 8.7 (Orthogonale Parametrisierung) *Eine Parametrisierung heißt* orthogonal, *wenn sich alle Parameterkurven senkrecht schneiden.*

Satz 8.3 *Eine Parametrisierung f ist orthogonal* $\Leftrightarrow F \equiv 0$.

Beweis Gleichung (8). $\square$

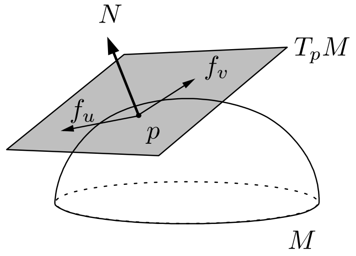
Die erste Fundamentalform einer orthogonal parametrisierten Fläche ist also von der Form: $Edu^2 + Gdv^2$.

8.2 Die Gauß-Abbildung und die zweite Fundamentalform

Definition 8.8 (Gauß-Abbildung) *Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, d.h. $f_u, f_v \in T_pM$ sind linear unabhängig in jedem Punkt der Fläche. Definiere das* Einheitsnormalenfeld $N : U \to \mathbb{S}^2$ *als*

$$N := \frac{f_u \times f_v}{||f_u \times f_v||}.$$

Da f_u und f_v eine Basis von T_pM bilden, ist $N \perp w \ \forall w \in T_pM$. N heißt Gauß-Abbildung *der Immersion f.*



Definition 8.9 (Orientierte Äquivalenz) *Zwei Immersionen $f : U \to \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^3$ heißen* orientiert äquivalent, *wenn ein Diffeomorphismus $\varphi : \widetilde{U} \to U$, $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \mapsto (u, v)$ existiert mit:*

$$\widetilde{f} = f \circ \varphi$$

und

$$\det(d\varphi) > 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} \right) > 0.$$

Proposition 8.4 *Die Gauß-Abbildungen von zwei orientiert äquivalenten Immersionen $f, \widetilde{f}$ sind gleich, d. h. $\widetilde{N} = N \circ \varphi$.*

Beweis

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_{\widetilde{u}} \times \widetilde{f}_{\widetilde{v}} &= \left(f_u \tfrac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} + f_v \tfrac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} \right) \times \left(f_u \tfrac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} + f_v \tfrac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} \right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} \right)}_{>0} (f_u \times f_v) \\ \Rightarrow & \quad \widetilde{N} = N. \end{aligned}$$

$\square$

Definition 8.10 (Orientierbarkeit von Flächen) *Eine Fläche heißt* orientierbar, *wenn man ein glattes Einheitsnormalenfeld auf M finden kann.*

Beispiel 8.2 Es gibt kein glattes Einheitsnormalenfeld auf dem Möbiusband, also ist es nicht orientierbar.

Es gilt: glatte Parametrisierung & orientierbar $\Rightarrow$ glatt parametrisierte Gauß-Abbildung.

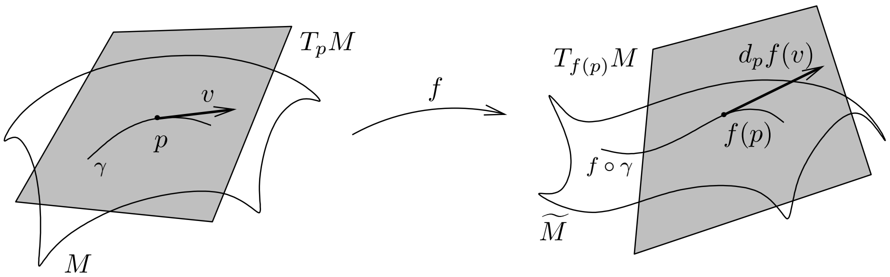
Definition 8.11 (Differential) *Als* Differential *einer glatten Abbildung $f : M \to \widetilde{M}$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten bezeichnet man die Abbildung*

$$\begin{aligned} d_p f : T_p M &\to T_{f(p)}\widetilde{M},\ p \in M \\ v &\mapsto d_p f(v), \end{aligned}$$

welche wie folgt definiert ist:

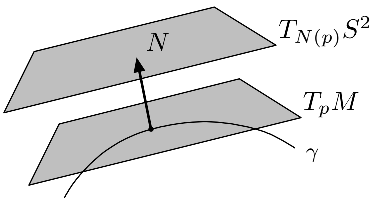
Sei $v \in T_pM \Rightarrow \exists\ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ \gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = v$.
Dann ist $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \widetilde{M}$ mit $f(\gamma(0)) = f(p)$ und

$$d_p f(v) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0}$$



Die Gauß-Abbildung $N : M \to \mathbb{S}^2$ bildet die Mannigfaltigkeit M auf die Mannigfaltigkeit $\mathbb{S}^2$ ab, also $d_pN : T_pM \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Aus elementarer Geometrie folgt, dass T_pM und $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ parallel sind. Also können sie identifiziert werden. Wir betrachten

$$d_pN : T_pM \to T_pM$$



Proposition 8.5 *Das Differential $d_pN : T_pM \to T_pM$ der Gauß-Abbildung ist eine* selbstadjungierte *lineare Abbildung:*

$$\forall\ w_1, w_2 \in T_pM : \langle d_pN(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, d_pN(w_2) \rangle.$$

Beweis Betrachte eine orientierbare parametrisierte Fläche $(u, v) \mapsto f(u, v) \in \mathbb{R}^3$, dann ist (f_u, f_v) eine Basis von T_pM. Stelle also w_1, w_2 dar als $w_1 = x_1 f_u + y_1 f_v$, $w_2 = x_2 f_u + y_2 f_v$. Damit gilt

$$\begin{aligned} d_pN(w_1) &= d_pN(x_1 f_u + y_1 f_v) \\ &= x_1 d_pN(f_u) + y_1 d_pN(f_v) \\ &= x_1 \widetilde{N}_u + y_1 \widetilde{N}_v \text{ mit } \widetilde{N} = N \circ f. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \langle d_pN(w_1), w_2 \rangle &= \left\langle x_1 \widetilde{N}_u + y_1 \widetilde{N}_v, x_2 f_u + y_2 f_v \right\rangle \\ &= x_1 x_2 \left\langle \widetilde{N}_u, f_u \right\rangle + \underbrace{\boxed{x_1 y_2 \left\langle \widetilde{N}_u, f_v \right\rangle + x_2 y_1 \left\langle \widetilde{N}_v, f_u \right\rangle}}_{(1)} + y_1 y_2 \left\langle \widetilde{N}_v, f_v \right\rangle \end{aligned}$$

und analog

$$\langle w_1, d_pN(w_2)\rangle = x_1x_2\left\langle \widetilde{N}_u, f_u\right\rangle + \underbrace{\boxed{x_2y_1\left\langle \widetilde{N}_u, f_v\right\rangle + x_1y_2\left\langle \widetilde{N}_v, f_u\right\rangle}}_{(2)} + y_1y_2\left\langle \widetilde{N}_v, f_v\right\rangle.$$

Zu zeigen: (1) = (2) d.h. $\left\langle \widetilde{N}_u, f_v\right\rangle = \left\langle \widetilde{N}_v, f_u\right\rangle$.
Wir wissen:

$$\left\langle \widetilde{N}, f_v\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \widetilde{N}_u, f_v\right\rangle + \left\langle \widetilde{N}, f_{vu}\right\rangle = 0$$
$$\left\langle \widetilde{N}, f_u\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \widetilde{N}_v, f_u\right\rangle + \left\langle \widetilde{N}, f_{uv}\right\rangle = 0.$$

Da f glatt ist, gilt:

$$f_{uv} = f_{vu} \Rightarrow \left\langle \widetilde{N}_u, f_v\right\rangle = -\left\langle \widetilde{N}, f_{vu}\right\rangle = -\left\langle \widetilde{N}, f_{uv}\right\rangle = \left\langle \widetilde{N}_v, f_u\right\rangle.$$

□

Definition 8.12 (Zweite Fundamentalform) *Die symmetrische Bilinearform*

$$II_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$II_p(w_1, w_2) := -\langle d_pN(w_1), w_2\rangle_p$$

heißt zweite Fundamentalform *von M in p.*

Bemerkung Wie für die erste Fundamentalform definiert man auch für die zweite Fundamentalform eine quadratische Form:

$$\begin{aligned} \widetilde{II}_p : T_pM &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto -\langle d_pN(w), w\rangle_p. \end{aligned}$$

Analog zur 1. Fundamentalform in einer Parametrisierung definiert man

$$h_p(w_1, w_2) := II_p(d_qf(w_1), d_qf(w_2))$$

und erhält die Darstellung

$$l\, du^2 + 2m\, du\, dv + n\, dv^2$$

wobei

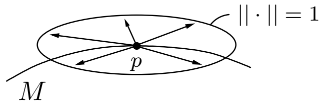
$$\begin{aligned} l &= -\langle N_u, f_u\rangle \\ m &= -\langle N_u, f_v\rangle = -\langle N_v, f_u\rangle \\ n &= -\langle N_v, f_v\rangle. \end{aligned}$$

Interpretation:

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ nach der Bogenlänge parametrisiert, $T = \gamma'$. Durch die Gauß-Abbildung auf M wird γ zu einer gerahmten Kurve (γ, N). Sei $\gamma(0) = p \in M, \gamma'(0) = w \in T_pM$. Dann ist

$$\begin{aligned} \widetilde{II}_p(w) = \widetilde{II}_p(\gamma'(0)) &= -\left\langle d_{\gamma(0)}N(\gamma'(0)), \gamma'(0)\right\rangle \\ &= -\langle N'(0), \gamma'(0)\rangle = -\langle N', T\rangle = \langle N, T'\rangle \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

Definition 8.13 (Richtung) *$v \in T_pM$ mit $\widetilde{I}_p(v) = \langle v, v\rangle = 1$, heißt* Richtung *auf M in p.*



Korollar 8.6 *Sei M eine orientierbare Fläche mit Gauß-Abbildung N. Der Wert der zweiten Fundamentalform von M in $p \in M$ ist für eine Richtung $v \in T_pM$ gleich der Krümmung κ einer regulären gerahmten Kurve (γ, N) die durch $p = \gamma(t_0)$ geht und tangential zu v ist, d.h. $v = \gamma'(t_0)$.*

Korollar 8.7 *Alle durch die Flächennormale gerahmten Kurven auf einer Fläche M, die in einem gegebenen Punkt $p \in M$ dieselbe Tangente haben, besitzen in diesem Punkt die selbe Krümmung κ.*

Kanonische Konstruktion einer solchen Kurve: Betrachte den Schnitt von M mit der Ebene

$$E = p + span\,\{v, N\,(p)\}\,.$$

Die Schnittmenge heißt *Normalschnitt* von M bei p längs v.
Eine entsprechende parametrisierte Kurve liegt also in E und ist somit eine ebene Kurve. Für ihre Krümmung gilt $\kappa = \widetilde{II}_p\,(\gamma'\,(0))$.

8.2.1 Krümmungen einer Fläche

Definition 8.14 (Normalkrümmung) *Für eine Richtung $v \in T_pM$ heißt $\widetilde{II}_p(v)$* Normalkrümmung *von M in Richtung v im Punkt p.*

Bemerkung Nach Korollar 8.6 ist die Krümmung κ einer durch die Flächennormale N gerahmten Kurve (γ, N) auf M im Punkt $p = \gamma(t_0)$ gleich der Normalkrümmung in Richtung $\gamma'(t_0)$ in p.

Als nächstes werden wir besondere Krümmungen einer Fläche charakterisieren:

Da $d_pN : T_pM \to T_pM$ selbstadjungiert ist, ist die darstellende Matrix diagonalisierbar und es existiert eine Orthonormalbasis $e_1, e_2 \in T_pM$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $-\lambda$ und $-\mu$:

$$\begin{aligned} d_pN\,(e_1) &= -\lambda e_1 \\ d_pN\,(e_2) &= -\mu e_2. \end{aligned}$$

Definition 8.15 (Hauptkrümmungen) *λ und μ heißen* Hauptkrümmungen *in p. Die zugehörigen Richtungen heißen* Hauptkrümmungsrichtungen.

Bemerkung

- Die Vorzeichen sind so gewählt, dass eine Krümmung der Fläche in Richtung der Normalen positiv genannt wird.

positive Krümmung negative Krümmung

- λ und μ sind invariant bezüglich $e_i \to -e_i,\ i = 1, 2$.

  Eine Orientierungsänderung ändert jedoch die Krümmungen:

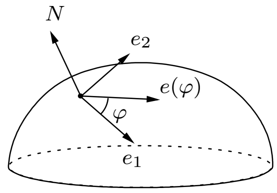
$$N \to -N \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \lambda & \to & -\lambda \\ \mu & \to & -\mu. \end{array}$$

Satz 8.8 (Euler-Formel für Krümmung in bestimmter Richtung) *Seien $e_1, e_2 \in T_pM$ die Hauptkrümmungsrichtungen und λ und μ die zugehörigen Hauptkrümmungen. Dann ist die Normalkrümmung in Richtung*

$$e(\varphi) = \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2$$

gegeben durch

$$\kappa(\varphi) = \lambda\cos^2\varphi + \mu\sin^2\varphi.$$



Beweis

$$\begin{aligned} \widetilde{II}_p(e(\varphi)) &= -\langle d_pN(e(\varphi)), e(\varphi)\rangle \\ &\overset{d_pN\ linear}{=} -\langle \cos\varphi d_pN(e_1) + \sin\varphi d_pN(e_2), \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2\rangle \\ &\overset{Def.\ \lambda,\mu}{=} \lambda\cos^2\varphi + \mu\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

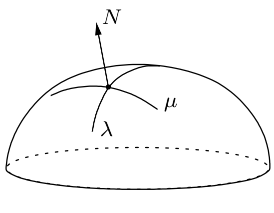
□

Korollar 8.9 *Sei $\lambda \geq \mu$. Dann gilt $\forall\ \varphi$:*

$$\lambda \geq \kappa(\varphi) \geq \mu,\ \ bzw.\ \lambda = \max_\varphi \kappa(\varphi),\ \ \mu = \min_\varphi \kappa(\varphi).$$

Beweis

$$\begin{aligned} \kappa(\varphi) = \lambda\cos^2\varphi + \mu\sin^2\varphi &= \mu\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \underbrace{\cos^2\varphi(\lambda-\mu)}_{\geq 0} \geq \mu \\ &= \lambda + \underbrace{\sin^2\varphi(\mu-\lambda)}_{\leq 0} \leq \lambda. \end{aligned}$$



λ und μ sind also Maximum und Minimum der Normalkrümmung in p.
Da $e_1 \perp e_2$, stehen die entsprechenden Schnittebenen senkrecht aufeinander. □

Definition 8.16 (Gaußsche Krümmung und mittlere Krümmung)

$$K := \lambda\mu$$

heißt Gaußsche Krümmung *in p.*

$$H := \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$$

heißt mittlere Krümmung *in p.*

Dadurch erhält man Klassen von Flächen mit konstanter mittlerer oder Gaußscher Krümmung.

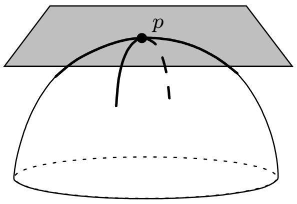
Definition 8.17 (Minimalflächen) *Flächen mit $H \equiv 0$ heißen* Minimalflächen.

Definition 8.18 (Punkte auf Flächen) *Ein Punkt in $p \in M$ heißt*

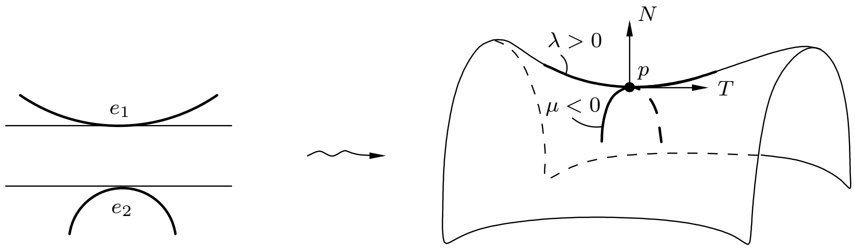
1. elliptisch, *wenn $K(p) > 0$*
2. hyperbolisch, *wenn $K(p) < 0$*
3. parabolisch, *wenn $K(p) = 0$, $H(p) \neq 0$ $\quad (\lambda = 0, \mu \neq 0)$*
4. Flachpunkt, *wenn $K(p) = 0 = H(p)$ $\quad (\lambda = 0 = \mu)$.*

Bemerkung Die Klassifizierung hängt nicht von der Orientierung ab. Es gilt:

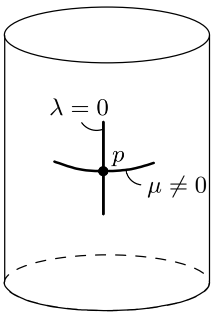
1. Elliptischer Punkt
   $\Leftrightarrow$ beide Hauptkrümmungen haben dasselbe Vorzeichen
   $\Leftrightarrow$ $\kappa(\varphi)$ ist entweder größer 0 oder kleiner 0 $\forall\varphi$
   $\Rightarrow$ Die Fläche liegt auf einer Seite der Tangentialebene.



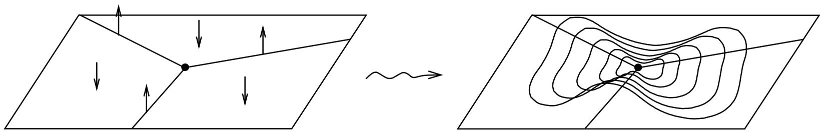
2. Hyperbolischer Punkt
   $\Leftrightarrow$ λ und μ haben verschiedene Vorzeichen
   $\Leftrightarrow$ die Tangentialebene schneidet die Fläche.



3. Parabolischer Punkt
   Beispiel: Zylinder

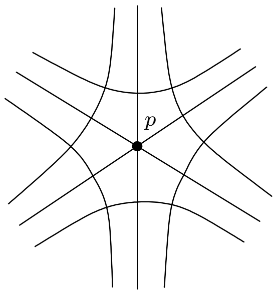


4. Flachpunkt
   Nicht triviales Beispiel:



Definition 8.19 (Nabelpunkt) *Ein Punkt $p \in M$ heißt* Nabelpunkt*, wenn eine (und damit jede) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Die beiden Hauptkrümmungen in p sind gleich ($\lambda = \mu$)*
2. $d_pN(v) = -\lambda v$*,* $\forall v \in T_pM$
3. *Alle Richtungen in p sind Hauptkrümmungsrichtungen*
4. *Die Normalkrümmung ist konstant für alle Richtungen.*



Satz 8.10 *Sind alle Punkte einer zusammenhängenden Fläche M in $\mathbb{R}^3$ Nabelpunkte, so ist M entweder in einer Sphäre oder in einer Ebene enthalten.*

Beweis Zu zeigen ist, dass die Krümmung konstant ist:
Sei also $f : U \to M$ eine Parametrisierung der Fläche. Da alle Punkte $p \in M$ Nabelpunkte sind, gilt

$$d_pN(w) = -\lambda(p)w$$

für alle Vektoren $w = w_1 f_u + w_2 f_v \in T_pM$, wobei λ eine reellwertige differentierbare Funktion ist, die Krümmung in Richtung w.
Wir können obige Gleichung schreiben als

$$w_1 N_u + w_2 N_v = -\lambda(w_1 f_u + w_2 f_v).$$

Da dies für alle Vektoren w gilt, wissen wir

$$\begin{aligned} N_u &= -\lambda f_u \\ N_v &= -\lambda f_v. \end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichungen entsprechend differentiert und voneinander subtrahiert, erhält man

$$\lambda_u f_v - \lambda_v f_u = 0.$$

Da f_u und f_v linear unabhängig sind, muss gelten

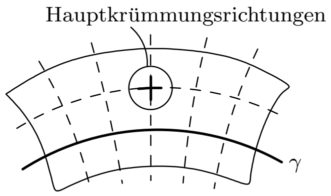
$$\lambda_u = \lambda_v = 0,$$

somit ist λ also konstant. $\square$

8.3 Besondere Parametrisierungen

Definition 8.20 (Krümmungslinie)

- *Hat eine reguläre Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ die Eigenschaft, dass die Tangente an γ in allen Punkten $p \in Sp(\gamma)$ eine Hauptkrümmungsrichtung in p ist, so heißt γ* Krümmungslinie *von M.*



- *Eine Parametrisierung $f : U \to M,\ (u,v) \mapsto f(u,v)$ heißt* Krümmungslinienparametrisierung *der Fläche M, falls alle Parameterkurven Krümmungslinien sind.*

Satz 8.11 *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Kurve γ auf M eine Krümmungslinie von M ist, lautet*

$$N'(t) = -\lambda(t)\,\gamma'(t)$$

für jede Parametrisierung der Spur von γ, wobei

$$N(t) := N(\gamma(t)),\ N : (a,b) \to \mathbb{S}^2,\ \lambda(t)\ \textit{glatt.}$$

In diesem Fall ist $\lambda(t)$ die Hauptkrümmung der Fläche in Richtung $\gamma'(t)$.

Beweis
zu *notwendig*: γ sei eine Krümmungslinie und nach der Bogenlänge parametrisiert.

Also ist $v := \gamma'(t)$ Hauptkrümmungsrichtung für alle t, und in jedem Punkt $p \in Sp(\gamma)$ ist $d_pN(v) = -\lambda v$. Einsetzen ergibt:

$$N'(t) = -\lambda(t)\gamma'(t).$$

Da d_pN linear ist, gilt dies auch für jede andere reguläre Reparametrisierung von γ.

zu *hinreichend*: Für alle $p \in Sp(\gamma)$ gelte die Gleichung

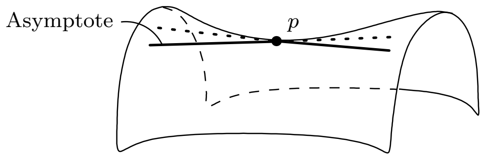
$$N'(t) = d_{\gamma(t)}N(\gamma'(t)) = -\lambda(t)\gamma'(t).$$

Also ist $\gamma'(t)$ Eigenvektor von $d_{\gamma(t)}N$ für alle t und somit Hauptkrümmungsrichtung. Aufgrund der Linearität gilt dies wieder für alle regulären Parametrisierungen und λ ist Hauptkrümmung.

□

Definition 8.21 (Asymptotenlinie) *Sei $p \in M$.*

- *Eine Richtung $v \in T_pM$ heißt* Asymptotenrichtung*, falls die Normalkrümmung der Fläche in dieser Richtung Null ist.*
- *$\gamma : (a,b) \to M$ heißt* Asymptotenlinie *(*Asymptotenkurve*) $:\Leftrightarrow \gamma'(t)$ ist Asymptotenrichtung $\forall\ t$.*
  $\Leftrightarrow$ In jedem Punkt $p \in Sp(\gamma)$ ist die Tangente an γ der span einer Asymptotenrichtung.



- *Eine Parametrisierung $f : U \to M,\ (u,v) \mapsto f(u,v)$ heißt* Asymptotenlinienparametrisierung *der Fläche M, falls alle Parameterkurven Asymptotenlinien sind.*

Bemerkung Asmyptotenrichtungen existieren nicht in elliptischen Punkten (beide Hauptkrümmungen haben das gleiche Vorzeichen).

Definition 8.22 (Konjugiert) *$v_1, v_2 \in T_pM$ heißen* konjugiert*, wenn $II_p(v_1, v_2) = 0$.*

Korollar 8.12

1. *Hauptkrümmungsrichtungen sind konjugiert*
2. *Eine Asymptotenrichtung ist zu sich selbst konjugiert.*

Beweis

1. Die Hauptkrümmungsrichtungen sind Eigenvektoren von d_pN und stehen senkrecht aufeinander.
2. Für eine Asymptotenrichtung v gilt per Definition $II_p(v,v) = 0$.

□

8.3.1 Die Weingarten-Gleichungen

Wir werden nun die Gaußsche- und die mittlere Krümmung durch die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform darstellen, und anschließend Krümmungs- und Asymptotenlinien nochmals genauer charakterisieren:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto f(u,v)$ eine Immersion, und $N : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{S}^2$, $(u,v) \mapsto N(u,v)$ die Gauß-Abbildung, gegeben durch

$$N(u,v) = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}(u,v).$$

N_u und N_v liegen in der Tangentialebene, lassen sich also in der Basis (f_u, f_v) ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} \overset{(AB)^T = B^T A^T}{\Leftrightarrow} (N_u, N_v) = -(f_u, f_v) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Definition 8.23 (Weingarten-Gleichungen) *Die Gleichungen*

$$\begin{aligned} N_u &= -a_{11} f_u - a_{21} f_v \\ N_v &= -a_{12} f_u - a_{22} f_v \end{aligned}$$

heißen Weingarten-Gleichungen*.*

Gesucht sind nun die Koeffizienten der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Bemerkung Da $d_pN(f_u) = N_u$ und $d_pN(f_v) = N_v$, ist $-A$ gerade die darstellende Matrix des Differentials der Gauß-Abbildung in der Basis (f_u, f_v).

Wir wissen bereits:

$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, wobei

$$\begin{aligned} E &= \langle f_u, f_u \rangle \\ F &= \langle f_u, f_v \rangle \\ G &= \langle f_v, f_v \rangle \end{aligned}$$

$II = l\,du^2 + 2m\,du\,dv + n\,dv^2$, wobei

$$\begin{aligned} l &= -\langle N_u, f_u\rangle \\ m &= -\langle N_u, f_v\rangle = -\langle N_v, f_u\rangle \\ n &= -\langle N_v, f_v\rangle . \end{aligned}$$

Unser Ziel ist nun a_{ij} aus I und II zu erzeugen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \langle N_u, f_u\rangle & \langle N_u, f_v\rangle \\ \langle N_u, f_v\rangle & \langle N_v, f_v\rangle \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix} \cdot (f_u, f_v) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} \cdot (f_u, f_v) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u\rangle & \langle f_u, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_v\rangle & \langle f_v, f_v\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zusammen mit den Weingarten-Gleichungen erhält man somit Folgendes für die Gaußsche- bzw. mittlere Krümmung:

Lemma 8.13

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$$

und

$$H = \frac{1}{2} \frac{lG + nE - 2mF}{EG - F^2}.$$

Beweis Sei $\widetilde{A}$ die darstellende (Diagonal-)Matrix von d_pN in der Basis (e_1, e_2) welche wir in Definition 8.15 verwendet haben. Somit ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Also $K = det\widetilde{A}$, $H = -\frac{1}{2} tr(\widetilde{A})$. Da die Determinante und die Spur unter Basistransformationen erhalten bleiben, gilt nach der vorigen Bemerkung also auch

$$K = detA,\ H = \frac{1}{2} tr(A).$$

Einsetzen liefert dann die Formel. □

Bemerkung Die Hauptkrümmungen λ und μ sind die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2Hx + K = 0$, und somit

$$\lambda, \mu = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Also sind die Hauptkrümmungen differenzierbare Funktionen (ausser an isolierten Nabelpunkten).

Wir reformulieren nun die Definition für Krümmungs- und Asymptotenlinien:

Definition 8.24 (Differentialgleichungen der Krümmungs- und Asymptotenlinien)

i) Eine Kurve $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ *im Parameterbereich heißt* Krümmungslinie*, falls*

$$A\gamma'(t) = \lambda(t)\gamma'(t).$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}(Gl - Fm)u' + (Gm - Fn)v' &= \lambda u'(EG - F^2)\\ (Em - Fl)u' + (En - Fm)v' &= \lambda v'(EG - F^2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (Em - Fl)(u')^2 + (En - Gl)u'v' + (Fn - Gm)(v')^2 = 0.$$

Dies ist die sogenannte Differentialgleichung der Krümmungslinien. *Man kann sie symmetrisch als*

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

schreiben.

ii) $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ *heißt* Asymptotenlinie*, falls*

$$II(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0.$$

Man erhält die Differentialgleichung der Asymptotenlinien*:*

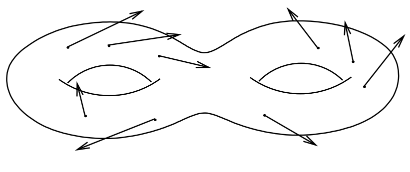
$$l(u')^2 + 2mu'v' + m(v')^2 = 0.$$

8.3.2 Parametrisierungen & Vektorfelder

Definition 8.25 (Vektorfeld, Integralkurve)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine glatte Abbildung*

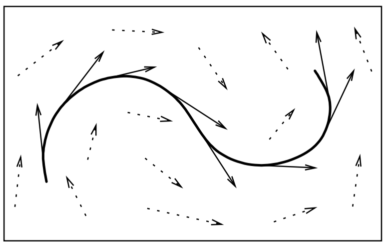
$$X : M \to \mathbb{R}^n, \quad X(p) \in T_pM \quad \forall\, p \in M$$

heißt Vektorfeld auf M.



Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ *heißt* Integralkurve *oder* Trajektorie *des Vektorfeldes X, falls*

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad \forall\, t \in [a, b].$$



Bemerkung Ist $\varphi : M \to N,\ \varphi(p) = q$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und X ein Vektorfeld auf M, so ist

$$\widetilde{X}(q) := d_p\varphi\big(X(p)\big)$$

ein Vektorfeld auf N.

Ist ausserdem $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ Integralkurve von X mit $\gamma(0) = p$, so ist

$$\widetilde{\gamma} := \varphi \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

Integralkurve von $\widetilde{X}$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = q$.

Satz 8.14 *Sei X ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M und $p \in M$. Dann gilt:*

a) Es existieren $\varepsilon > 0$ und eine Trajektorie $\gamma_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma_p(0) = p$.

b) Es existieren eine Umgebung $V \subset M$ von p, $\varepsilon > 0$ und eine $C^\infty-$Abbildung $\psi : V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, so dass

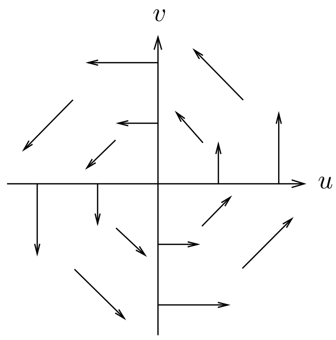
$$\psi(q, \cdot) = \gamma_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

die Trajektorie von X ist, für die gilt $\gamma_q(0) = \psi(q, 0) = q \quad \forall\ q \in V$.
Das heißt die Trajektorien gehen glatt in einander über.

Beweis Ohne Beweis. □

Beispiel 8.3

$$M = \mathbb{R}^2, \quad X(u, v) = (-v, u)$$



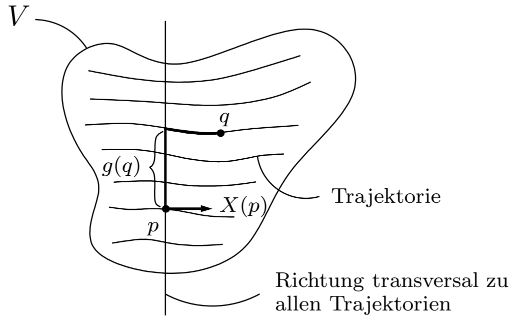
$$\begin{aligned}
\psi((u, v), t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
\gamma_{(u_0,v_0)}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t)u_0 - \sin(t)v_0 \\ \sin(t)u_0 + \cos(t)v_0 \end{pmatrix} \\
\gamma'_{(u_0,v_0)}(t) &= \begin{pmatrix} -(\sin(t)u_0 + \cos(t)v_0) \\ \cos(t)u_0 - \sin(t)v_0 \end{pmatrix} = X\big(\gamma_{(u_0,v_0)}(t)\big).
\end{aligned}$$

Lemma 8.15 *Sei X ein Vektorfeld auf einer 2-Mannigfaltigkeit M (d.h.* $\dim M = 2$*), und $p \in M$ ein Punkt mit $X(p) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $V \subset M$ von p und eine glatte Funktion $g : V \to \mathbb{R}$, so dass gilt:*

1) Für jede Trajektorie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ von X ist $g \circ \gamma \equiv const$

2) $d_p g \neq 0 \quad \forall\ p \in V$.

Das heißt es gibt eine $C^\infty-$Funktion auf V mit nicht verschwindender Ableitung, deren Niveaulinien gerade die Trajektorien von X sind.



Beweis Ohne Einschränkung sei $M = U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge welche $p = (0,0)$ enthält, und es gelte $X(p) = (1,0)$ (kann man durch einen Diffeomorphismus erreichen). Sei $\psi : V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ wie im obigen Satz 8.14. Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $\{(0,v) : v \in (-\delta, \delta)\} \subset V$, und definiere:

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \to U, \quad \varphi(t,v) := \psi\big((0,v), t\big).$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(0,0) &= (0,0) = p \\
\varphi(0,v) &= (0,v) \ \Rightarrow \ \frac{\partial}{\partial v} \varphi \Big|_{(0,0)} = (0,1) \\
\varphi(t,0) &= \gamma_{(0,0)}(t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \varphi \Big|_{(0,0)} = \gamma'_{(0,0)}(0) = X(p) = (1,0).
\end{aligned}$$

Also ist $d_{(0,0)}\varphi = I$.

Der Satz über inverse Funktionen liefert:

$\exists$ Umgebung $\widetilde{V} \subset V$ von p, so dass

$$\varphi \Big|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to \varphi(\widetilde{V}) =: \widehat{V}$$

ein Diffeomorphismus ist.

Sei $\big(\tau(u,v), g(u,v)\big) = \varphi^{-1}(u,v)$ für $(u,v) \in \widehat{V}$, also ist $\varphi\big(\tau(u,v), g(u,v)\big) = \gamma_{(0,g(u,v))}\big(\tau(u,v)\big) = (u,v)$ und somit liegt (u,v) auf der Trajektorie durch $(0, g(u,v))$.
Schließlich gilt, dass $d_p g \neq 0$, da $\det(d_p\varphi^{-1}) \neq 0$. $\square$

Definition 8.26 (Erstes Integral) *Die Funktion g aus Lemma 8.15 heißt* (lokales) erstes Integral *des Vektorfeldes X in einer Umgebung von p.*

Satz 8.16 *Es seien X und Y zwei Vektorfelder auf einer 2-Mannigfaltigkeit M, welche in einem Punkt $p \in M$ linear unabhängig sind.*
Dann existiert eine Parametrisierung einer Umgebung $U \subset M$ von p, so dass die Tangenten der Parameterkuven durch $q \in U$ parallel zu $X(q)$ bzw. $Y(q)$ sind.

Beweis Es sei V eine Umgebung von p, so dass die ersten Integrale g und h von X und Y existieren. Definiere nun

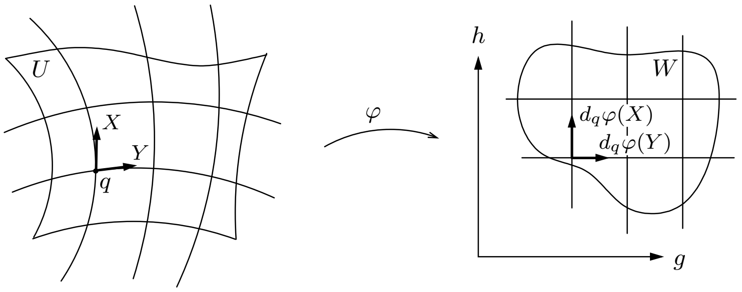
$$\varphi : V \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(q) := \big(g(q), h(q)\big).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
d_q\varphi(X) &= \big(d_q g(X), d_q h(X)\big) &= \big(0, a(q)\big) \qquad &, \text{wobei } a(q) = d_q h(X) \\
d_q\varphi(Y) &= \big(d_q g(Y), d_q h(Y)\big) &= \big(b(q), 0\big) \qquad & b(q) = d_q g(Y).
\end{aligned}$$

Es gilt $a(p) \neq 0 \neq b(p)$, da X und Y in p linear unabhängig sind und $d_p h(Y) = d_p g(X) = 0$, aber $d_p h \neq 0 \neq d_p g$. Also ist $d_p \varphi$ nicht singulär und φ ein lokaler Diffeomorphismus.

Es gibt also Umgebungen $U \subset M$ von p und $W \subset \mathbb{R}^2$ von $\varphi(p)$, die diffeomorph sind.



φ^{-1} ist die gesuchte Parametrisierung. □

Korollar 8.17 (Orthogonale Parametrisierung) *Zu jedem $p \in M$ gibt es eine orthogonale Parametrisierung einer Umgebung U von p.*

Beweis Betrachte zunächst eine beliebige Parametrisierung $f(u, v)$.
Definiere:
$$X := f_u, \quad Y := -\left(\frac{F}{E}\right) f_u + f_v,$$
wobei E, F die Koeffizienten der ersten Fundamentalform sind. Dann ist $X \perp Y \quad \forall\ p \in U$. Die Behauptung folgt also aus Satz 8.16. □

Korollar 8.18 (Krümmungslinien-Parametrisierung) *Es sei $p \in M$* kein *Nabelpunkt. Dann ist eine Krümmungslinienparametrisierung in einer Umgebung U von p möglich.*

Beweis Nach der Bemerkung zu Lemma 8.13 sind, unter der Voraussetzung das p kein Nabelpunkt ist, die Hauptkrümmungen λ, μ und die Koeffizienten der Weingartenabbildung glatt. Definiere X, Y durch:
$$\begin{aligned} AX &= \lambda X \ \Rightarrow (X_1, X_2) = (-a_{12}, a_{11} - \lambda) \\ AY &= \mu Y \ \Rightarrow (Y_1, Y_2) = (-a_{12}, a_{11} - \mu). \end{aligned}$$
Also sind auch X und Y glatt und somit kann Satz 8.16 angewendet werden. □

Korollar 8.19 (Asymptotenlinien-Parametrisierung) *In* hyperbolischen *Punkten existieren lokal Asymptotenlinienparametrisierungen.*

Beweis Aus Korollar 8.12 wissen wir, dass Asymptotenrichtungen zu sich selbst konjungiert sind, also $II_p(X, X) = 0$, wobei II_p die zweite Fundamentalform ist.

Zu zeigen: Die Asymptoten-Vektorfelder sind glatt.
Sei also X solch ein Vektorfeld:
$$X = (X_1, X_2) \ \Rightarrow II_p(X, X) = lX_1^2 + 2mX_1X_2 + nX_2^2 = 0.$$
Man erhält
$$(X_1, X_2) = \left(-m \pm \sqrt{m^2 - ln}\ ,\ l\right)$$
genau *zwei* Asymptotenrichtungen, da wir einen hyperbolischen Punkt betrachten und somit $ln - m^2 < 0$. X ist glatt, da m, n, l glatte Funktionen sind. □

Bemerkung Diese Parametrisierungen sind nicht eindeutig, da die ersten Integrale nicht eindeutig sind. Die Transformation

$$(g,h)^{-1} \to (\lambda g, \mu h)^{-1} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{\neq 0}$$

erhält die Parameterlinien und somit die Art der Parametrisierung.

9 Der Satz von Gauß

9.1 Gerahmte Flächen

Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion. Setze

$$N := \frac{f_u \times f_v}{||f_u \times f_v||}$$

und ergänze zu einer Orthonormalbasis $(X(u,v), Y(u,v), N(u,v))$. Diese Wahl ist nicht eindeutig (Drehung um N).

Definition 9.1 (Gerahmte Flächenstücke) *Man nennt (f,X,Y,N) ein* gerahmtes Flächenstück.

Im Folgenden werden wir Quaternionen wieder mit den $\mathbb{R}_+ SU(2)$-Matrizen identifizieren und nicht zwischen ihnen unterscheiden. Zur Erinnerung:
Matrixdarstellung der Quaternionen

$$q = q_0 + q_1\mathcal{I} + q_2\mathcal{J} + q_3\mathcal{K} \in \mathbb{H}$$

entspricht

$$q_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + q_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_0 + iq_3 \end{pmatrix} = Q \in \mathbb{R}_+ SU(2)$$

und

$$\mathbb{R}^3 \cong \operatorname{Im} \mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid q_0 = 0\} \leftrightarrow su(2).$$

Wir wissen: sei (f, X, Y, N) nun eine gerahmte Fläche, dann gibt es eine Drehung $\Phi : [a,b] \times [c,d] \to SU(2)$ mit

$$\begin{aligned} X &= \Phi^{-1}\mathcal{I}\Phi \\ Y &= \Phi^{-1}\mathcal{J}\Phi \\ N &= \Phi^{-1}\mathcal{K}\Phi. \end{aligned} \tag{9}$$

Bemerkung

- Wie zuvor ist Φ nur eindeutig bis auf $\Phi \leftrightarrow -\Phi$.
- Φ erfüllt folgende Gleichungen:

$$\Phi_u = U\Phi \text{ mit } U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\omega & a \\ -\bar{a} & -i\omega \end{pmatrix}$$

$$\Phi_v = V\Phi \text{ mit } V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\eta & b \\ -\bar{b} & -i\eta \end{pmatrix}$$

  mit $U, V \in su(2)$. Demnach sind $\omega(u,v), \eta(u,v) \in \mathbb{R}$ und $a(u,v), b(u,v) \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \omega &= \langle X_u, Y \rangle \\ \eta &= \langle X_v, Y \rangle \\ \bar{a} &= \langle N_u, X + iY \rangle \\ \bar{b} &= \langle N_v, X + iY \rangle. \end{aligned}$$

  Dies erhält man aus den entsprechenden Ergebnissen für gerahmte Kurven mit $(X, Y, N) \leftrightarrow (N, B, T)$.

Nun lassen sich f_u und f_v durch X und Y darstellen:

$$\begin{aligned} f_u &= -\alpha_2 X - \alpha_1 Y \overset{(9)}{=} \Phi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ -\bar\alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)\Phi \qquad \text{mit } \alpha(u,v) = \alpha_1 + i\alpha_2 \\ f_v &= -\beta_2 X - \beta_1 Y = \Phi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ -\bar\beta & 0 \end{smallmatrix}\right)\Phi \qquad \text{und } \beta(u,v) = \beta_1 + i\beta_2. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $\omega, \eta, \alpha, \beta, a$ und b sind *nicht* unabhängig! Es gibt verschiedene *Verträglichkeitsbedingungen*, so muss beispielsweise gelten

$$f_{uv} = f_{vu}.$$

Das bedeutet:

$$\begin{aligned} & f_{uv} = -\Phi^{-1}\underbrace{\Phi_v\Phi^{-1}}_{V}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ -\bar\alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)\Phi + \Phi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha_v \\ -\bar\alpha_v & 0 \end{smallmatrix}\right)\Phi + \Phi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ -\bar\alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)\underbrace{\Phi_v}_{V\Phi} \\ \overset{!}{=}\; & f_{vu} = -\Phi^{-1}\underbrace{\Phi_u\Phi^{-1}}_{U}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ -\bar\beta & 0 \end{smallmatrix}\right)\Phi + \Phi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta_u \\ -\bar\beta_u & 0 \end{smallmatrix}\right)\Phi + \Phi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ -\bar\beta & 0 \end{smallmatrix}\right)\underbrace{\Phi_u}_{U\Phi}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} & f_{uv} = f_{vu} \\ \Leftrightarrow\quad & -V\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ -\bar\alpha & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ -\bar\alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)V + \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha_v \\ -\bar\alpha_v & 0 \end{smallmatrix}\right) = -U\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ -\bar\beta & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ -\bar\beta & 0 \end{smallmatrix}\right)U + \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta_u \\ -\bar\beta_u & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \Leftrightarrow\quad & \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ -\bar\alpha & 0 \end{smallmatrix}\right), V\right] + \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha_v \\ -\bar\alpha_v & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ -\bar\beta & 0 \end{smallmatrix}\right), U\right] + \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta_u \\ -\bar\beta_u & 0 \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

Man erhält somit folgende wichtige Gleichungen, bzw. Abhängigkeiten:

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \alpha_v - i\eta\alpha & = & \beta_u - i\omega\beta & \quad \textit{Strukturgleichung} \\ b\bar\alpha - \bar b\alpha & = & a\bar\beta - \bar a\beta & \quad \textit{Symmetriegleichung} \end{array}}$$

Ebenso muß für den Rahmen gelten

$$\Phi_{uv} = \Phi_{vu}.$$

In diesem Fall erhält man

$$\begin{aligned} & \Phi_{uv} = U_v\Phi + U\Phi_v = U_v\Phi + UV\Phi \\ \overset{!}{=}\; & \Phi_{vu} = V_u\Phi + V\Phi_u = V_u\Phi + VU\Phi \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad U_v - V_u + \left[U, V\right] = 0.$$

Und schließlich ist dieses System äquivalent zu

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \omega_v - \eta_u - \frac{i}{2}(b\bar a - a\bar b) & = & 0 & \quad \textit{Codazzi-Gleichung} \\ a_v - b_u + i\omega b - i\eta a & = & 0 & \quad \textit{Gauß-Gleichung} \end{array}}$$

Symmetrie- und Codazzi- sind reelle Gleichungen, Struktur- und Gauss- komplexe Gleichungen. Insgesamt erhält man also 6 reelle Gleichungen für 10 reelle Funktionen.
Offenbar sind die Gleichungen für die Existenz der gerahmten Fläche notwendig. Es stellt sich die Frage ob sie auch hinreichend sind?

Satz 9.1 (Maurer-Cartan) *Zu glatten Abbildungen*

$$U, V : [a, b] \times [c, d] \to gl(n, \mathbb{C})$$

gibt es genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung

$$\Phi : [a, b] \times [c, d] \to GL(n, \mathbb{C})$$

des AWPs

$$\Phi_u = U\Phi, \quad \Phi_v = V\Phi, \quad \Phi(u_0, v_0) = \Phi_0 \in GL(n, \mathbb{C})$$

falls

$$U_v - V_u + \Big[U, V\Big] = 0.$$

Beweis Offenbar gilt: Jede Lösung $\Phi(u, v)$ erfüllt $U_v - V_u + \Big[U, V\Big] = 0$, denn

$$\begin{aligned} & \Phi_{uv}\Phi^{-1} = (U\Phi)_v\Phi^{-1} = U_v + UV \\ = \quad & \Phi_{vu}\Phi^{-1} = (V\Phi)_u\Phi^{-1} = V_u + VU \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_v - V_u + \Big[U, V\Big] = 0.$$

Sei also $U_v - V_u + \Big[U, V\Big] = 0$ erfüllt.
Wir konstruieren eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\Phi_u = U\Phi, \quad \Phi_v = V\Phi, \quad \Phi(u_0, v_0) = \Phi_0$$

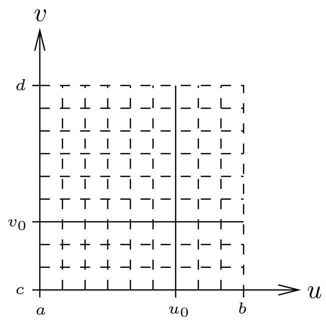
in zwei Schritten:

1. Definiere zunächst $\widehat{\Phi} : u \mapsto \widehat{\Phi}(u, v_0)$ als die Lösung des AWPs

$$\widehat{\Phi}_u = U\widehat{\Phi}, \quad \widehat{\Phi}(u_0, v_0) = \Phi_0.$$

2. Für alle $u \in (a, b)$ definiere nun $\Phi : v \mapsto \Phi(u, v)$ als die Lösung des AWPs

$$\Phi_v = V\Phi, \quad \Phi(u, v_0) = \widehat{\Phi}(u, v_0).$$



$\widehat{\Phi}(u, v_0)$ ist eine glatte Funktion von u und die Lösung der Differentialgleichung hängt glatt von der Anfangsbedingung ab. Also ist $\Phi(u, v)$ eine glatte Funktion von u und kann deshalb bezüglich u abgeleitet werden. Zu zeigen: $\Phi_u = U\Phi$.

Setze

$$G(u, v) := (\Phi_u - U\Phi)(u, v).$$

Auf der Geraden $v = v_0$ ist $G(u, v_0) \equiv 0$.

Weiter ist

$$\begin{aligned} G_v &= \Phi_{uv} - U_v\Phi - U\Phi_v \\ &= (\Phi_v)_u - (U_v + UV)\Phi \\ &= (V\Phi)_u - (U_v + UV)\Phi \\ &= (V_u - U_v - UV)\Phi + V\Phi_u \\ &\overset{Vor.}{=} V(\Phi_u - U\Phi) \\ &= VG \end{aligned}$$

$G(u,v)$ löst somit die lineare Differentialgleichung 1.Ordnung $G_v = VG$ mit der Anfangsbedingung $G(v = v_0) = 0$.

$$\Rightarrow G \equiv 0, \quad \Phi_u = U\Phi \quad \forall(u,v).$$

Zur **Eindeutigkeit**:

Seien Φ_1 und Φ_2 zwei Lösungen. Definiere

$$S(u,v) := (\Phi_2^{-1}\Phi_1)(u,v).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} S_u &= -\Phi_2^{-1}\Phi_{2u}\Phi_2^{-1}\Phi_1 + \Phi_2^{-1}\Phi_{1u} = -\Phi_2^{-1}U\Phi_1 + \Phi_2^{-1}U\Phi_1 = 0 \\ S_v &= \ldots = 0 \ \text{ analog.} \end{aligned}$$

Da $S(u_0, v_0) = I$, ist $S(u,v) = I \quad \forall(u,v)$. □

Definition 9.2 (Kongruente Flächen) *Zwei parametrisierte und gerahmte Flächen f und $\widetilde{f}$ heißen* kongruent, *wenn es eine euklidische Bewegung*

$$(Q,q) \in SU(2) \times su(2)$$

gibt, mit

i) $\widetilde{f} = Q^{-1}fQ + q$

ii) $(\widetilde{N}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}) = Q^{-1}(N, X, Y)Q$.

Lemma 9.2 *Zwei kongruente parametrisierte gerahmte Flächen besitzen die gleichen Koeffizienten $\alpha, \beta, a, b, \omega, \eta$.*

Beweis Dies folgt direkt aus

$$(\widetilde{f}_u, \widetilde{f}_v, \widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{N}) = Q^{-1}(f_u, f_v, X, Y, N)Q.$$

□

Korollar 9.3 *Seien $a, b, \alpha, \beta, \omega, \eta$ so, dass Gauß-, Codazzi-, Struktur- und Symmetriegleichung erfüllt sind. Dann gibt es eine bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte gerahmte parametrisierte Fläche mit diesen Koeffizienten.*

Beweis Löse $\Phi_u = U\Phi, \quad \Phi_v = V\Phi$.
Dies ist eindeutig bis auf $\Phi \to \Phi Q, \quad Q \in SU(2)$.
Damit ist auch der Rahmen X, Y, N eindeutig bis auf $(X, Y, N) \to Q^{-1}(X, Y, N)Q$.
Also sind auch $f_u = \Phi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ -\bar{\alpha} & 0 \end{smallmatrix}\right)\Phi$ und $f_v = \Phi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ -\bar{\beta} & 0 \end{smallmatrix}\right)\Phi$ eindeutig bis auf $(f_u, f_v) \to Q^{-1}(f_u, f_v)Q$.
Das System $f_u = A, \quad f_v = B$ ist verträglich: $A_v = B_u$.
Also ist die Immersion $f(u,v)$ eindeutig bis auf

$$f \to Q^{-1}fQ + q, \quad q \in su(2).$$

□

9.2 Der Satz von Gauß

Sei (f, X, Y, N) eine gerahmte Fläche, $f : M = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$. Die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha} &= i\langle f_u, X + iY\rangle && (\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2,\ \alpha_1 = -\langle f_u, Y\rangle,\ \alpha_2 = -\langle f_u, X\rangle)\\
\overline{\beta} &= i\langle f_v, X + iY\rangle && (\ldots)\\
\overline{a} &= \langle N_u, X + iY\rangle && (\ldots)\\
\overline{b} &= \langle N_v, X + iY\rangle && (\ldots)\\
\omega &= \langle X_u, Y\rangle\\
\eta &= \langle X_v, Y\rangle
\end{aligned}$$

erfüllen die Verträglichkeitsbedingungen

$$\begin{array}{lr}
\alpha_v - \beta_u = i\eta\alpha - i\omega\beta & \text{Stukturgeichung}\\
b\overline{\alpha} - \overline{b}\alpha = a\overline{\beta} - \overline{a}\beta & \text{Symmetriegleichung}\\
\omega_v - \eta_u = \frac{i}{2}(b\overline{a} - a\overline{b}) = b_1 a_2 - a_1 b_2 & \text{Gauß} - \text{Gleichung}\\
a_v - b_u + i\omega b - i\eta a = 0 & \text{Codazzi} - \text{Gleichung.}
\end{array}$$

Zur *Matrixdarstellung der Weingartenabbildung* $A_{(u,v)}$:
$X(u, v), Y(u, v), N(u, v)$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis. Bezeichne mit

$$P := \mathbb{R}X(u, v) + \mathbb{R}Y(u, v)$$

die von X und Y aufgespannte Ebene. Betrachte nun die Differentiale

$$\begin{aligned}
df : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 &\to P\\
dN : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 &\to P.
\end{aligned}$$

Wir wählen die Basen (e_1, e_2) in $T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ und (X, Y) in P. Bezüglich dieser Basen gilt

$$\begin{aligned}
df(e_1) &= f_u = -\alpha_2 X - \alpha_1 Y\\
df(e_2) &= f_v = -\beta_2 X - \beta_1 Y\\
dN(e_1) &= N_u = a_1 X - a_2 Y\\
dN(e_2) &= N_v = b_1 X - b_2 Y.
\end{aligned}$$

Die Differentiale df und dN lassen sich also schreiben als

$$df = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\beta_2 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{pmatrix}, \quad dN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -a_2 & -b_2 \end{pmatrix}.$$

die Matrix der Weingartenabbildung ist dann

$$A_{(u,v)} = -(df)^{-1} dN = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -a_2 & -b_2 \end{pmatrix}.$$

Für die Gaußsche Krümmung gilt somit

$$K = \det A_{(u,v)} = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}.$$

Lemma 9.4 *Zwei Immersionen $f, \widetilde{f} : M \to \mathbb{R}^3$ seien isometrisch, das heißt die 1. Fundamentalformen sind gleich ($E = \widetilde{E}$, $F = \widetilde{F}$, $G = \widetilde{G}$). Weiter sei (X, Y, N) ein Rahmen von f. Dann gibt es einen Rahmen $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{N})$ von $\widetilde{f}$, so dass*

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_2 & \widetilde{\alpha}_1 \\ \widetilde{\beta}_2 & \widetilde{\beta}_1 \end{pmatrix}.$$

Beweis Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ -\beta_2 & -\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ -\beta_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \\ &= B \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix} B^T \\ &= B \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} B^T. \end{aligned}$$

Setze

$$\widetilde{B} := B, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ \widetilde{Y} \end{pmatrix} := \widetilde{B} \begin{pmatrix} \widetilde{f}_u \\ \widetilde{f}_v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{N} := \widetilde{X} \times \widetilde{Y}.$$

Es gilt

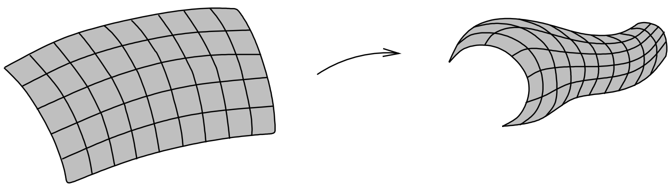
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ \widetilde{Y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{X} & \widetilde{Y} \end{pmatrix} &= \widetilde{B} \begin{pmatrix} \widetilde{f}_u \\ \widetilde{f}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{f}_u & \widetilde{f}_v \end{pmatrix} \widetilde{B}^T \\ &= \widetilde{B} \begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix} \widetilde{B}^T \\ &= B \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} B^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{N}$ der gesuchte Rahmen. □

Satz 9.5 (Theorema Egregium (Gauß)) *Die Gaußsche Krümmung einer Fläche ist invariant unter lokalen Isometrien.*

$$f, \widetilde{f} \text{ isometrisch } \Rightarrow K = \widetilde{K}.$$

Bemerkung Die Definition der Gaußschen Krümmung hat wesentlich die Lage einer Fläche im Raum gebraucht. Es ist bemerkenswert, dass diese Größe nicht von dieser Lage sondern nur von der metrischen Stuktur (1. Fundamentalform) abhängt.



Beweis Nach der Formel für die Gaußkrümmung gilt:

$$K = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2} \overset{\text{Gauß-Gl.}}{=} \frac{\omega_v - \eta_u}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}.$$

Die Stukturgleichung ergibt

$$\begin{aligned} \alpha_{1v} - \beta_{1u} &= -\eta\alpha_2 + \omega\beta_2 \\ \alpha_{2v} - \beta_{2u} &= \eta\alpha_1 - \omega\beta_1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1v} - \beta_{1u} \\ \alpha_{2v} - \beta_{2u} \end{pmatrix}.$$

mit $\det \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{pmatrix} \neq 0$, weil die Vektoren f_u und f_v linear unabhängig sind.

Also sind η und ω Funktionen, die nur von $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ abhängen, die Gaußsche Krümmung hängt somit nur von α und β ab.
Nach Lemma 9.4 kann man für isometrische Flächen α und β gleich wählen $\Rightarrow$ die Gaußsche Krümmung ist invariant unter lokaler Isometrie. □

Bemerkung Wie werden keine expliziten Formeln für K durch E, F und G im allgemeinen Fall angeben, da es leichter ist konkrete Fälle zu betrachten.

Satz 9.6 *Sei $f : M \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Parametrisierung, also $\langle f_u, f_v \rangle = 0$. Seien $E = \langle f_u, f_u \rangle$ und $G = \langle f_v, f_v \rangle$ die Koeffizienten der zugehörigen ersten Fundamentalform. Dann ist die Gaußsche Krümmung gegeben durch*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

Beweis In einer orthogonalen Parametrisierung kann man die Basis X, Y so wählen, dass

$$f_u = -\alpha_2 X, \; f_v = -\beta_1 Y \quad , \alpha_2, \beta_1 > 0, \text{ also } \alpha_1 = \beta_2 = 0.$$

Die Koeffizienten der 1. Fundamentalform sind dann

$$E = \langle f_u, f_u \rangle = \alpha_2^2 \text{ und } G = \langle f_v, f_v \rangle = \beta_1^2.$$

Also hat man $\alpha_2 = \sqrt{E}$, $\beta_1 = \sqrt{G}$ und für η und ω erhält man

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{E} & 0 \\ 0 & -\sqrt{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{G}_u \\ \sqrt{E}_v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \eta &= \tfrac{G_u}{2\sqrt{EG}} \\ \omega &= -\tfrac{E_v}{2\sqrt{EG}} \end{aligned}.$$

Für die Gaußsche Krümmung gilt somit

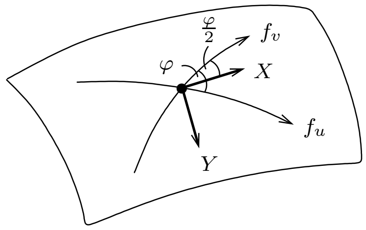
$$K = \frac{\omega_v - \eta_u}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

□

9.3 Flächen mit konstanter negativer Gaußscher Krümmung

Sei $f : M \to \mathbb{R}^3$ eine Asymptotenlinienparametrisierung einer immersierten Fläche. Das bedeutet f_v und f_u sind linear unabhängig und $II(f_u) = \langle N_u, f_u \rangle = 0 = \langle N_v, f_v \rangle = II(f_v)$.
Unter der Voraussetzung, dass die Gaußsche Krümmung konstant und negativ ist, können wir den euklidischen Rahmen so skalieren, dass $K \equiv -1$.
Wir bezeichnen durch $\varphi \in (0, \pi)$ den Winkel zwischen den Asymptotenlinien und wählen die Basis X, Y so, dass

$$\begin{aligned} f_u &= p\cos\frac{\varphi}{2}X + p\sin\frac{\varphi}{2}Y \\ f_v &= q\cos\frac{\varphi}{2}X - q\sin\frac{\varphi}{2}Y. \end{aligned}$$



Die Koeffizienten der 1. Fundamentalform sind damit

$$E = p^2, \qquad F = pq\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = pq\cos\varphi, \qquad G = q^2.$$

Weil $f(u,v)$ Asymptotenlinienparametrisierung ist, sind die Komponenten der 2. Fundamentalform

$$\begin{aligned} l &= -\langle f_u, N_u\rangle = 0 \\ n &= -\langle f_v, N_v\rangle = 0 \\ m &= -\langle f_u, N_v\rangle = -\langle f_v, N_u\rangle. \end{aligned}$$

Also erhält man für die Gaußsche Krümmung:

$$\begin{aligned} K &= -1 \\ &\overset{\text{Lemma 8.13}}{=} \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \\ &= -\frac{m^2}{p^2q^2 - p^2q^2\cos^2\varphi} \\ &= -\frac{m^2}{p^2q^2\sin^2\varphi} \\ \Leftrightarrow \quad & m = \pm pq\sin\varphi. \end{aligned}$$

Falls nötig vertauschen wir die Koordinaten u, v, so dass

$$m = -\langle f_u, N_v\rangle = -\langle f_v, N_u\rangle = pq\sin\varphi.$$

In der Darstellung $(X, Y, N) \leftrightarrow \Phi^{-1}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})\Phi$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f_u &= -ip\Phi^{-1}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\frac{\varphi}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right)\Phi \\ &= -ip\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi \\ f_v &= -iq\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi \\ N &= -i\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Phi, \end{aligned}$$

und damit

$$\alpha = -ipe^{-i\frac{\varphi}{2}}, \qquad \beta = -iqe^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Die Vektoren N_u und f_u sind orthogonal, $\langle N_u, f_v\rangle = 0$, daraus folgt

$$N_u = \xi\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi.$$

Den Koeffizienten ξ berechnet man mittels

$$\begin{aligned} -pq\sin\varphi &= \langle N_u, f_v\rangle \\ &= -\frac{1}{2}tr\,(N_u f_v) \\ &= \frac{iq\xi}{2}tr\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{iq\xi}{2}(-2i\sin\varphi) \\ &= q\xi\sin\varphi \\ \Rightarrow \quad & \xi = -p, \end{aligned}$$

also
$$N_u = -p\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi.$$
Analog erhält man
$$N_v = q\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi.$$
Die Koeffizienten $a = \langle N_u, X - iY\rangle$ und $b = \langle N_v, X - iY\rangle$ berechnet man mit Hilfe von
$$\begin{aligned} \mathcal{I} - i\mathcal{J} &= -2i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad X - iY &= -2i\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Phi. \end{aligned}$$
also
$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(N_u(X-iY)) = -ip\cdot\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = -ipe^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ b &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(N_v(X-iY)) = iqe^{i\frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$
Also gilt
$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = -ipe^{-i\frac{\varphi}{2}}, & \beta = -iqe^{i\frac{\varphi}{2}} \\ a = -ipe^{-i\frac{\varphi}{2}}, & b = iqe^{i\frac{\varphi}{2}} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha = a \\ \beta = -b. \end{array}$$
Die Symmetriegleichung ist also automatisch erfüllt.

Die Strukturgleichung und die Codazzi-Gleichung geben uns:
$$\begin{aligned} a_v - i\eta a &= -b_u + i\omega b \\ a_v - i\eta a &= b_u - i\omega b \end{aligned}$$
also gilt
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_v - i\eta a &=& 0 \\ b_u - i\omega b &=& 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} p_v - \frac{i\varphi_v}{2} - i\eta &=& 0 \\ q_u + \frac{i\varphi_v}{2} - i\omega &=& 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} p_v = q_u = 0 & \\ \eta = -\frac{\varphi_v}{2}, & \omega = \frac{\varphi_u}{2} \end{array}\right\}.$$
Dann sind die Gauß-Codazzi Gleichungen:
$$\begin{array}{l} \omega_v - \eta_u + \mathrm{Im}(b\bar{a}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_{uv} - pq\sin\varphi = 0 \\ p_v = q_u = 0. \end{array}$$
Nach der Bemerkung zu Begin von Kapitel 9.1 lauten die zugehörigen Rahmengleichungen:
$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\frac{\varphi_u}{2} & -ipe^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -ipe^{i\frac{\varphi}{2}} & -i\frac{\varphi_u}{2} \end{pmatrix} \\ V &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\frac{\varphi_v}{2} & iqe^{i\frac{\varphi}{2}} \\ iqe^{-i\frac{\varphi}{2}} & i\frac{\varphi_v}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Die Funktion
$$p = |a| = |\langle N_u, X + iY\rangle|$$
hängt nur von u ab, $p \neq 0$, und
$$q = |b| = |\langle N_v, X + iY\rangle|$$
hängt nur von v ab, $q \neq 0$.

Man kann also die Fläche reparametrisieren ($u \to \widetilde{u}(u)$, $v \to \widetilde{v}(v)$), so dass
$$p = q = 1.$$
Dann ist die Gauß-Gleichung die *Sinus-Gordon-Gleichung*
$$\varphi_{uv} - \sin\varphi = 0.$$

Zusammenfassung: Die folgenden zwei Probleme sind äquivalent

1. Finde immersierte Flächenstücke mit $K \equiv -1$.

2. a) Finde Lösungen $\varphi : M \to (0, \pi)$, $M \subset \mathbb{R}^2$ der Sinus-Gordon-Gleichung

$$\varphi_{uv} = \sin \varphi.$$

   b) Integriere die linearen Differentialgleichungen

$$\Phi_u = U\Phi, \qquad \Phi_v = V\Phi$$

   und finde

$$\Phi \in \mathrm{SU}(2)$$

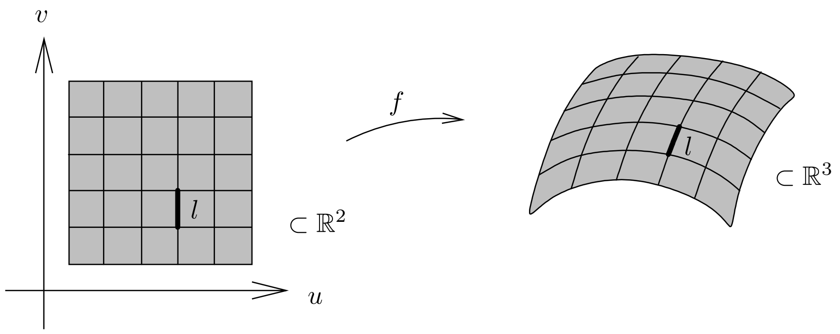
   wobei $U, V \in \mathrm{su}(2)$ durch die Rahmengleichungen gegeben sind. Der Koeffizient $\varphi(u, v)$ von U, V ist eine Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung. Damit hat man $(X, Y, N) \rightsquigarrow f_u, f_v)$.

   c) Integriere f_u, f_v und N und finde die Immersion $f(u, v)$.

Bemerkung Was passiert, wenn $\varphi(u, v)$ eine Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung ist und $\sin \varphi(u, v)$ Nullstellen hat?
Die Rahmengleichungen lassen sich immer integrieren, das heißt man erhält X, Y, N, f_u, f_v und f, aber $f(u, v)$ ist keine Immersion an den Nullstellen von $\sin \varphi(u, v)$.

Definition 9.3 $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$ *heißt* Tschebyscheff-Netz, *wenn* $|f_u| = |f_v| = 1$.

Die Parameterkurven $f(u, v = \text{const})$, $f(u = \text{const}, v)$ eines Tschebyscheff-Netzes sind nach der Bogenlänge parametrisiert und alle "Kanten" haben dieselbe Länge.



Satz 9.7

a) Jede Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit $K \equiv -1$ lässt lokal eine Asymptotenlinienparametrisierung $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$,die gleichzeitig ein Tschebyscheff-Netz ist, zu.

b) In diesem Fall ist $N : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{S}^2$ ein Tschebyscheff-Netz.

Beweis

a) Oben haben wir gesehen, dass man die Parametrisierung $f(u, v)$ so wählen kann, dass gilt

$$|f_u| = p = |f_v| = q = 1.$$

b) In diesem Fall haben wir

$$N_u = -\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \qquad N_v = \Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi$$

und $|N_u| = |N_v| = 1$.

□

9.3.1 Geometrie der Asymptotenlinien

Zur Erinnerung: Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ mit Rahmen $(N, B, T = \gamma')$ (d.h. positiv orientierte ONB zu jedem Zeitpunkt) hatten wir

$$\begin{aligned} N' &= \tau B - \kappa T \\ B' &= -\tau N - \eta T \\ T' &= \kappa N + \eta B. \end{aligned}$$

Der Rahmen heißt *Frenet-Rahmen*, wenn $\eta = \langle T', B\rangle = 0$. Dann ist $\kappa = \langle T', N\rangle$ die Krümmung und $\tau = \langle N', B\rangle$ die Torsion. Achtung: N ist keine Flächennormale!

Satz 9.8 *Die Torsionen der Asymptotenlinien der beiden Familien $f(u, v = const)$ und $f(u = const, v)$ einer Fläche mit $K \equiv -1$ sind*

$$\tau(u) = -\tau(v) = -1.$$

Beweis Betrachte $\widetilde{\gamma}(u) = f(u, v = \text{const})$. Zeige:

$$\begin{aligned} \widetilde{N} &= N_u \\ \widetilde{B} &= N \\ \widetilde{T} &= f_u \end{aligned}$$

ist ein Frenet-Rahmen.

1. Es handelt sich um einen Rahmen:
   Da wir eine Asymptotenlinienparametrisierung betrachten gilt $\langle \widetilde{N}, \widetilde{T}\rangle = \langle N_u, f_u\rangle = 0$.
   Nach Satz 9.7 können wir dann $|\widetilde{N}| = |N_u| = 1 = |f_u| = |\widetilde{T}|$ annehmen und es ist

$$\begin{aligned} \widetilde{B} \times \widetilde{T} &\overset{\text{Korollar 5.8}}{=} \frac{1}{2}[N, f_u] \\ &= \frac{(-i)^2}{2}\left[\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Phi,\ \Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi\right] \\ &= -\frac{1}{2}\Phi^{-1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\right]\Phi \\ &= -\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi \\ &= N_u \\ &= \widetilde{N}. \end{aligned}$$

   Also ist $(\widetilde{N}, \widetilde{B}, \widetilde{T})$ eine positiv orientierte Orthonormal Basis zu jedem Zeitpunkt.

2. Der Rahmen ist ein Frenet-Rahmen, weil für die Krümmung η gilt

$$\begin{array}{rcl} \eta & = & \langle \widetilde{T}', \widetilde{B} \rangle \\ & = & -\langle \widetilde{N}, \widetilde{B}' \rangle \\ & = & -\langle f_u, N_u \rangle \\ & = & 0. \end{array}$$

   Die Torsion ist gleich

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\tau} & = & \langle \widetilde{N}', \widetilde{B} \rangle \\ & = & -\langle \widetilde{N}, \widetilde{B}' \rangle \\ & = & -\langle N_u, N_u \rangle \\ & = & -1. \end{array}$$

Analog erhält man, dass $(\widehat{N} = -N_v, \widehat{B} = N, \widehat{T} = f_v)$ ein Frenet-Rahmen der Kurve $\widehat{\gamma} = f(u = const, v)$ ist. Die Torsion ist in diesem Falle gleich

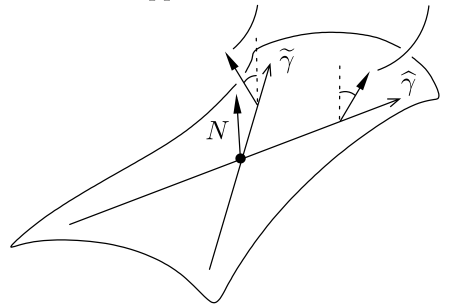
$$\begin{array}{rcl} \widehat{\tau} & = & \langle \widehat{N}', \widehat{B} \rangle \\ & = & -\langle \widehat{N}, \widehat{B}' \rangle \\ & = & \langle N_v, N_v \rangle \\ & = & 1. \end{array}$$

□

Bemerkung Der Satz gilt auch im allgemeinen Fall.
Für die Torsion der beiden Asymptotenlinien durch einen Punkt einer Fläche mit $K < 0$ gilt

$$\tau = \pm\sqrt{|K|}.$$

Das Normalenfeld kippt: nach links nach rechts



9.3.2 Lie-Transformationen

Die Transformation

$$p \to \lambda p, \qquad q \to \frac{1}{\lambda} q$$

erhält die Sinus-Gordon-Gleichung

$$\varphi_{uv} - pq \sin\varphi = 0.$$

Sie ändert allerdings die zugehörigen Rahmengleichungen und die entsprechende Immersion

$$\begin{aligned}
\Phi_u &= U(\lambda)\Phi \\
\Phi_v &= V(\lambda)\Phi \\
U(\lambda) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\frac{\varphi_u}{2} & -i\lambda p e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -i\frac{1}{\lambda}pe^{-i\frac{\varphi}{2}} & -i\frac{\varphi_u}{2} \end{pmatrix} \\
V(\lambda) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\frac{\varphi_v}{2} & i\frac{1}{\lambda}qe^{i\frac{\varphi}{2}} \\ i\frac{1}{\lambda}qe^{-i\frac{\varphi}{2}} & i\frac{\varphi_v}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$f(u,v) \to f(u,v,\lambda) \text{ mit } |f_u(u,v,\lambda)| = \lambda p \text{ und } |f_v(u,v,\lambda)| = \frac{1}{\lambda}q.$$

Satz 9.9 (Lie) *Jede Fläche $f(u,v)$ mit $K \equiv -1$ besitzt eine 1-Parameter Deformationsfamilie $f(u,v,\lambda)$. Die Deformation (*Lie-Transformation*) erhält die Winkel $\varphi(u,v)$ zwischen den Asymptotenlinien, die 2. Fundamentalform $m = pq\sin\varphi$ und die Gaußsche Krümmung. Sie variiert die 1. Fundamentalform wie folgt*

$$E(\lambda) = \lambda^2 p^2, \qquad F(\lambda) = pq\cos\varphi, \qquad G(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}q^2.$$

Beweis Wie zuvor ist

$$\begin{aligned}
f_u(u,v,\lambda) &= -i\lambda p \Phi^{-1}(u,v,\lambda)\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi(u,v,\lambda) \\
f_v(u,v,\lambda) &= -\frac{i}{\lambda}q\Phi^{-1}(u,v,\lambda)\begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}\Phi(u,v,\lambda) \\
N(u,v,\lambda) &= -i\Phi^{-1}(u,v,\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Phi(u,v,\lambda).
\end{aligned}$$

Um die Immersion $f(u,v,\lambda)$ zu bekommen, muß man die Ableitungen f_u und f_v integrieren. □

Im Fall $K \equiv -1$ braucht man diese Integration nicht, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 9.10 *Sei $\varphi(u,v)$ eine Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung und $\Phi(u,v,\lambda) \in SU(2)$ die zugehörige Lösung der Rahmengleichungen der Lie-Familie. Dann ist die entsprechende Immersion gegeben durch*

$$f(u,v,\lambda) = 2\Phi^{-1}(u,v,\lambda)\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,v,\lambda)$$

mit $\lambda = e^t$. Für die Gaußabbildung gilt

$$N(u,v,\lambda) = -i\Phi^{-1}(u,v,\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Phi(u,v,\lambda).$$

Beweis Zu zeigen: f_u und f_v haben die obige Form.

Die Parameter u, v und t sind unabhängig und es gilt

$$\begin{aligned}
f_u &= 2(\Phi^{-1}\Phi_t)_u \\
&= 2(\Phi^{-1})_u\Phi_t + 2\Phi^{-1}\Phi_{tu} \\
&= -2\Phi^{-1}\Phi_u\Phi^{-1}\Phi_t + 2\Phi^{-1}(U\Phi)_t \\
&= -2\Phi^{-1}U\Phi_t + 2\Phi^{-1}U_t\Phi + 2\Phi^{-1}U\Phi_t \\
&= 2\Phi^{-1}U_t\Phi.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\
&= \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix} e^t p \\
&= \frac{-i\lambda p}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also gilt wie oben

$$f_u = -i\lambda p \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix} \Phi$$

und analog

$$f_v = -\frac{iq}{\lambda} \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix} \Phi.$$

$\square$

Bemerkung Die Lösung $\Phi(u, v, \lambda)$ hängt von der Anfangsbedingung $\Phi_0(\lambda) = \Phi(u_0, v_0, \lambda)$ ab. Die Änderung der Anfangsbedingung ist äquivalent zu der Transformation

$$\Phi(u, v, \lambda) \to \Phi(u, v, \lambda) R(\lambda),$$

wobei $R(\lambda) \in \mathrm{SU}(2)$ nicht von u und v abhängt. Für die zugehörige Immersion erhält man

$$\begin{aligned}
f \to 2R^{-1}\Phi^{-1}(\Phi R)_t &= 2R^{-1}\Phi^{-1}\Phi_t R + 2R^{-1}R_t \\
&= R^{-1} f R + \rho \qquad , R \in SU(2), \rho = 2R^{-1}R_t \in su(2).
\end{aligned}$$

Die Änderung der Anfangbedingung $\Phi \to \Phi R$ bewirkt also eine euklidische Bewegung der zugehörigen Fläche.

Literatur

[1] Do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven & Flächen*, Vieweg.

[2] Kühnel, *Differentialgeometrie von Kurven & Flächen*, Vieweg.