

# Komplexe Analysis

Prof. Dr. A. Bobenko

Stand: 21. November 2006

# Inhaltsverzeichnis

1	Holomorphe Funktionen	3
2	Zusammenhang reeller und komplexer Differenzierbarkeit	5
3	Potenzreihen	9
4	Elementare Funktionen	12
5	Lineare Transformationen und die Riemann'sche Zahlensphäre	15
6	Kurvenintegrale	25
7	Der Cauchy'sche Integralsatz für Rechtecke	28
8	Die Cauchyformel	34
9	Der Potenzreihenentwicklungssatz	36
10	Der Satz von Morera	41
11	Nullstellen holomorpher Funktionen	45
12	Identitätssatz und Maximumsprinzip	49
13	Isolierte Singularitäten	53
14	Laurentreihen	56
15	Analytische Fortsetzung und der komplexe Logarithmus	62
16	Homotopie	66
17	Die Umlaufzahl	72
18	“Cauchy auf Zykeln”	75
19	Der Residuensatz	80
20	Residuenkalkül	85
21	Kompakte Konvergenz	91
22	Konvergenzsätze	94
23	Der Riemann'sche Abbildungssatz	97
24	Partialbruchentwicklung	102

<b>25</b>	<b>Produktentwicklung</b>	<b>107</b>
<b>26</b>	<b>Elliptische Funktionen: Allgemeine Eigenschaften</b>	<b>111</b>
<b>27</b>	<b>Die Weierstraß'sche <math>\wp</math>-Funktion</b>	<b>117</b>
<b>28</b>	<b>Die Weierstraß'schen Funktionen <math>\zeta</math> und <math>\sigma</math></b>	<b>120</b>
<b>29</b>	<b>Darstellung Elliptischer Funktionen durch Weierstraß'sche Funktionen</b>	<b>124</b>

Mitgeschrieben von Sander Wahls bis Kapitel 16, vervollständigt und überarbeitet von Christina Puhl und mit Bildern von Emanuel Huhnen-Venedey.

# 1 Holomorphe Funktionen

In diesem Kapitel lernen wir:

- Def.: komplex diffbar, holo, ganz
- Beispiele. Wichtig:  $f(z) = \bar{z}$  ist nicht holo, denn  $\frac{\bar{h}}{h}$  hat für  $h \rightarrow 0$  keinen eindeutigen Grenzwert
- Elementare Eigenschaften von holomorphen Funktionen
- Polynome sind ganz, Rationale Funktionen holo an den Stellen an denen der Nenner  $\neq 0$  ist

**Definition 1.1 (Komplexe Differenzierbarkeit)** Eine Funktion  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, heißt (komplex) differenzierbar an der Stelle  $z_0 \in \mathbb{C}$ , genau dann, wenn

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Ableitung von  $f$ . Ist  $f$  überall in  $U$  differenzierbar, so nennt man  $f$  holomorph auf  $U$ . Ist weiter  $U = \mathbb{C}$ , so nennt man  $f$  auch eine ganze Funktion.

**Beispiel 1.1** Wir betrachten wieder Funktionen  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen.

- $f(z) = c \in \mathbb{C}$  ist holomorph.
- $f(z) = z$  ist holomorph mit  $f'(z) = 1$
- $f(z) = \bar{z}$  ist nicht holomorph, denn es ist

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{-2i \arg h} = e^{-2i \arg h}$$

Dabei wird die Winkeldarstellung  $z = |z|e^{i \arg z}$  für komplexe Zahlen benutzt:

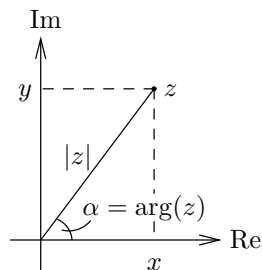


Abbildung 1: Winkeldarstellung der komplexen Zahlen

Wie man sieht ist die Ableitung von dem Winkel, in dem sich  $h$  dem Punkt  $z$  annähert, abhängig. Dieser Winkel ist aber nicht eindeutig und somit existiert kein Grenzwert  $f'(z)$ !

- $f(z) = z\bar{z} = |z|^2$  ist nicht holomorph.
- $f(z) = z + \bar{z}$  ist nicht holomorph
- $f(z) = z^2$  ist holomorph.

**Bemerkung** Es scheint, als ob holomorphe Funktionen nur von  $z$ , nicht aber von  $\bar{z}$  abhängen dürfen.

**Satz 1.1 (Elementare Eigenschaften holomorpher Funktionen)**

Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, holomorph. Dann gilt:

1.  $f$  ist stetig.

2.  $\mathcal{H}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$  ist ein komplexer Vektorraum, d.h.

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2) \in \mathcal{H}(U), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}, f_1, f_2 \in \mathcal{H}(U)$$

Außerdem ist auch die Ableitung linear:

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)' = c_1 f_1' + c_2 f_2', \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}, f_1, f_2 \in \mathcal{H}(U)$$

3.  $\mathcal{H}(U)$  ist abgeschlossen gegenüber Produktbildung, d.h.

$$f_1 f_2 \in \mathcal{H}(U), \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{H}(U)$$

Für die Ableitung eines Produktes gilt die Produktregel:

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2', \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{H}(U)$$

4. Ist  $0 \neq f(z) \in \mathcal{H}(U)$  für alle  $z \in U$ , so sind

$$\frac{1}{f} \text{ und } \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \in \mathcal{H}(U)$$

5. Es gilt die Kettenregel:

$$(g(f(z)))' = g'(f(z))f'(z), \quad \forall f \in \mathcal{H}(U), g \in \mathcal{H}(V) \text{ mit } f(U) \subset V$$

Zusätzlich ist die Verknüpfung selbst holomorph:  $g \circ f \in \mathcal{H}(U)$ .

**Beweis** Wie im reellen Fall. □

**Beispiel 1.2 (Wichtige holomorphe Funktionen)**

- Polynome  $P(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k$ ,  $a_k, z \in \mathbb{C}$  sind holomorph mit  $P'(z) = \sum_{k=1}^N a_k k z^{k-1}$ .
- Rationale Funktionen

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P, Q \text{ Polynome}$$

sind dort holomorph, wo  $Q(z) \neq 0$ .  $R'$  ist ebenfalls rational.

## 2 Zusammenhang reeller und komplexer Differenzierbarkeit

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Def.: reell diffbar
- Theorem: holo  $\Leftrightarrow$  reell diffbar + CR-Diffgl.
- Def.: harmonisch.  $f = u + iv$  holo  $\Rightarrow u, v$  harmonisch
- Holomorphe Funktionen sind durch Realteil und Imaginärteil bis auf Addition einer Konstante eindeutig bestimmt.
- Def.: Ableitung nach  $z$  und  $\bar{z}$ .  $f$  holo  $\Leftrightarrow f$  reell diffbar und  $\frac{df}{d\bar{z}} \equiv 0$
- Merke:  $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$  ist nicht holo.

Man kann die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  identifizieren (die beiden Räume sind isomorph) und eine komplexe Funktion  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, als eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^2$  interpretieren. Ein komplexes  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  entspricht dabei der reellen Zahl  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , die Funktion spaltet man analog in Realteil  $u$  und Imaginärteil  $v$  auf:  $f(z) = u(z) + iv(z) \in \mathbb{C}$  wird zu  $f(x, y) = (u(z), v(z)) \in \mathbb{R}^2$ . Diese reelle Funktion kann man nun, wie aus Analysis II bekannt, differenzieren:

$f$  heißt an der Stelle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  *reell differenzierbar*, wenn es eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gibt, so dass

$$f((x, y) + (p, q)) = f(x, y) + A(p, q) + o(|h|) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|h|)}{|h|} = 0$$

Dabei ist  $h = (p, q)$ , also  $|h| = \sqrt{p^2 + q^2}$ . Die lineare Abbildung  $A$  heißt dann *Differential* von  $f$  an der Stelle  $(x, y)$  und wird mit  $d_{(x,y)}f$  bezeichnet. Als Matrix ist  $A$  durch die Jacobi-Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Schreibt man jetzt die obige Gleichung aus, so erhält man

$$f((x, y) + (p, q)) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + o(\sqrt{p^2 + q^2})$$

Was hat jetzt diese reelle Differenzierbarkeit mit der komplexen zu tun?

**Satz 2.1 (Cauchy-Riemann'sche DGL, reell)** *Eine Funktion  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, ist genau dann holomorph, wenn sie reell differenzierbar ist und ihr Realteil  $u(z)$  sowie ihr Imaginärteil  $v(z)$  die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (z = x + iy) \quad (1)$$

**Bemerkung** Nachfolgend wird die kürzere Notation  $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$  verwandt.

**Beweis** Die reelle Ableitung  $A$  in Richtung  $h = (p, q) \in \mathbb{R}^2$

$$A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x p + u_y q \\ v_x p + v_y q \end{pmatrix}$$

schreibt sich komplex als

$$f'(z) \cdot h = (u_x p + u_y q) + i(v_x p + v_y q) \quad (2)$$

"  $\Rightarrow$  " Sei  $f$  holomorph. Wähle  $h = p + 0i$  (also ist der Imaginärteil  $q = 0$ ). Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &\stackrel{(2)}{=} \lim_{(p+iq) \rightarrow 0} \frac{(u_x p + u_y q) + i(v_x p + v_y q)}{p + iq} \\ &\stackrel{(q=0)}{=} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{u_x p + i v_x p}{p} \\ &= u_x + i v_x \end{aligned}$$

Wählt man dagegen  $h = 0 + iq$  (Realteil  $p = 0$ ), so erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &\stackrel{(2)}{=} \lim_{(p+iq) \rightarrow 0} \frac{(u_x p + u_y q) + i(v_x p + v_y q)}{p + iq} \\ &\stackrel{(p=0)}{=} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{u_y q + i v_y q}{iq} \\ &= v_y - i u_y \end{aligned}$$

Da  $f$  holomorph ist, müssen die beiden Grenzwerte gleich sein, d.h.

$$\forall z \in \mathbb{C} : u_x(z) + i v_x(z) = v_y(z) - i u_y(z) \Leftrightarrow u_x = v_y, v_x = -u_y \quad (= 1)$$

"  $\Leftarrow$  " Es sei (1) erfüllt, dann gilt  $u_x = v_y$  und  $v_x = -u_y$ . Für die Ableitung gilt mit  $h = p + iq$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &\stackrel{(2)}{=} \lim_{(p+iq) \rightarrow 0} \frac{(u_x p + u_y q) + i(v_x p + v_y q)}{p + iq} \\ &= \lim_{(p+iq) \rightarrow 0} \frac{(u_x + i v_x)p + (v_y - i u_y)iq}{p + iq} \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{(p+iq) \rightarrow 0} \frac{(u_x + i v_x)p + (u_x + i v_x)iq}{p + iq} \\ &= u_x + i v_x \quad (= v_y - i u_y) \end{aligned}$$

Also existiert der Limes und  $f$  ist holomorph. □

**Definition 2.1 (Harmonische Funktionen & Laplace Operator)** Eine Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $U$  offen, heißt harmonisch genau dann, wenn gilt:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

Mit Hilfe des Laplace Operators  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  lässt sich dies auch kurz als  $\Delta g = 0$  schreiben.

Laplace-Operatoren (harmonische Funktionen) werden in der Theorie der Differentialgleichungen häufig zum Lösen von Gleichungen verwendet. Genauso in der nichtlinearen Optimierung zur Bestimmung der Kuhn-Tucker-Gleichungen.

**Korollar 2.2** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  offen, holomorph. Dann sind  $u$  und  $v$  harmonische Funktionen ( $f$  ist aber i.A. nicht harmonisch).

**Beweis** Durch Differenzieren der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  ( $u, v$  sind zweimal stetig partiell differenzierbar) nach  $y$  bzw.  $x$  folgt

$$\begin{aligned} u_{xy} &= v_{yy} \\ u_{yx} &= -v_{xx} \end{aligned}$$

und da hier nach dem Satz von Schwarz  $u_{xy} = u_{yx}$  ist, folgt

$$v_{yy} = -v_{xx} \Leftrightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0 \Leftrightarrow \Delta v = 0$$

Analog zeigt man  $\Delta u = 0$ . □

**Definition 2.2 (Zusammenhängende Mengen)** Eine Menge  $X \subset \mathbb{C}$  heißt zusammenhängend, wenn es keine offenen Mengen  $A, B$  gibt mit  $A \neq \emptyset \neq B$ ,  $X \cap B \neq \emptyset$  und  $X \cap A \neq \emptyset$ ,  $X = A \cup B$  und  $A \cap B = \emptyset$ .

**Bemerkung** Die zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind genau:  $\emptyset$ ,  $\{a\}$ , alle Intervalle und  $\mathbb{R}$ .

Im folgenden Korollar wird deutlich, dass holomorphe Funktionen sehr unflexibel sind. Kennt man ihren Real- oder Imaginärteil, so kennt man schon die ganze Funktion bis auf eine Konstante.

**Korollar 2.3** Eine holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend, ist durch ihren Realteil (bzw. Imaginärteil) bereits bis auf Addition einer Konstante eindeutig bestimmt.

**Beweis** Seien  $g, h$  holomorphe Funktionen wie im Korollar; es sei  $g - h := iv$  rein imaginär. Dann ist die Funktion  $v$  ebenfalls holomorph und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen vereinfachen sich zu  $0 = v_y$ ,  $0 = v_x$ . Da nun  $U$  zusammenhängend ist, folgt daraus, dass  $v$  konstant ist.  $\square$

Die Ableitung nach  $z$  bzw.  $\bar{z}$  gibt uns ein weiteres Kriterium im reellen an, ob eine Funktion holomorph ist, oder nicht. Die Ableitung nach  $z$  ist i.A. nicht gleich der holomorphen Ableitung, wie in Kapitel 1, sondern nur, wenn  $\frac{df}{d\bar{z}} = 0$  (nächster Satz). Die Existenz von  $\frac{df}{dz}$  besagt auch noch nicht, dass  $f$  holomorph ist.

**Definition 2.3 (Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial z}$  und  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ )** Als Ableitung nach  $z$  bzw.  $\bar{z}$  einer holomorphen Funktion  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, mit  $z = x + iy \mapsto f(z)$  definieren wir

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

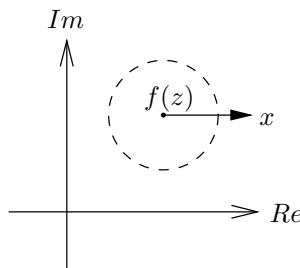


Abbildung 2: Idee der Richtungsableitung:  $\frac{df}{dx}$  schaut in Richtung der  $x$ -Achse, wie sich die Funktion ändert, wenn man sich etwas in  $x$ -Richtung bewegt.  $\frac{df}{dz}$  schaut hingegen rechts herum im Kreis, wie sich die Funktion verändert, wenn man sich etwas bewegt.

**Satz 2.4** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  offen, mit  $z = x + iy \mapsto f(z)$  ist holomorph genau dann, wenn  $f$  reell differenzierbar ist und  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ .

**Beweis** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  offen, reell differenzierbar (wir benutzen trotzdem die komplexe Schreibweise). Dann ist mit  $h = p + iq$  die Taylorentwicklung gleich:

$$f(z + h) = f(z) + f_x p + f_y q + O(|h|)$$

und somit ergibt sich:

$$f(z + h) - f(z) = \frac{\partial f}{\partial x} p + \frac{\partial f}{\partial y} q + o(|h|), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|h|)}{h} = 0$$



Beachtet man, dass  $\bar{h} = p - iq$ , so sieht man

$$p = \frac{h + \bar{h}}{2}, \quad q = \frac{h - \bar{h}}{2i}$$

Damit schreibt sich obige Gleichung als

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}}_{=-i} \right) h + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \underbrace{\frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}}_{=i} \right) \bar{h} + o(|h|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h} + o(|h|) \end{aligned}$$

Wir erhalten also für die Ableitung

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z-h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\bar{h}}{h} + \underbrace{\frac{o(|h|)}{h}}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} \end{aligned}$$

Wie verhält sich  $\frac{\bar{h}}{h}$ ? Da für

$$h \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = 1, \quad \text{aber für } ih \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = -1$$

existiert der Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$  nicht. Deshalb ist  $f$  genau dann holomorph, wenn  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ .  $\square$

**Bemerkung** Holomorphe Funktionen sind also die Funktionen, die nicht von  $\bar{z}$  abhängen. Für die Ableitungen nach  $z, \bar{z}$  gelten die gleichen Rechenregeln wie im reellen, wenn man  $z$  und  $\bar{z}$  als unabhängige Variablen betrachtet.

### Beispiel 2.1 (Ableitungen nach $\bar{z}$ )

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

- $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (1 + ii) = 0$ .
- $\frac{\partial |z|^2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial z \bar{z}}{\partial \bar{z}} = z$
- $\frac{\partial (z + \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 1$
- $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{1}{z}$

### 3 Potenzreihen

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Def. Potenzreihe, glm. konvergenz, Konvergenzradius
- Potenzreihen sind holo; Abl. wird gliedweise gebildet.

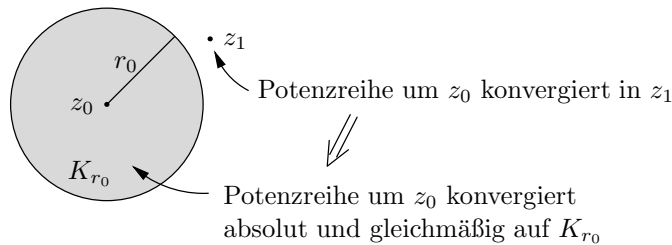
**Definition 3.1 (Potenzreihen)** Eine Reihe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ , wobei  $(a_k) \subset \mathbb{C}$  eine Folge ist und  $z, z_0 \in \mathbb{C}$  sind, heißt Potenzreihe.

**Bemerkung** Aus der Analysis I ist bekannt, dass man für  $U \subset \mathbb{C}$  und eine Funktionenfolge  $(f_n)$  mit  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  sagt,  $(f_n)$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in U : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oder kurz mit der Supremumsnorm, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$ . Insbesondere folgt, falls die Funktionenfolge  $f_n$  stetig auf  $D$  ist, dass es auch der Grenzwert  $f$  ist.

**Satz 3.1** Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  konvergiere für ein  $z_1 \in \mathbb{C}$  mit  $z_0 \neq z_1$ . Seien  $r_0 \in \mathbb{R}_+$  mit  $0 < r_0 < |z_1 - z_0|$  und  $K_{r_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r_0\}$ . Dann konvergiert die Potenzreihe absolut und gleichmäßig auf  $K_{r_0}$ .



**Beweis** Analysis I. □

**Definition 3.2 (Konvergenzradius)** Der Wert  $R := \sup\{|z - z_0| \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \text{ konvergiert}\}$  heißt Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ .

**Satz 3.2** Zu jeder Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  ( $a_n \in \mathbb{C}$  fest,  $z \in \mathbb{C}$ ) gibt es ein eindeutig bestimmtes  $R$ ,  $0 \leq R \leq \infty$  mit folgender Eigenschaft:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \begin{cases} \text{konvergiert} & \forall z : |z - z_0| < R \\ \text{divergiert} & \forall z : |z - z_0| > R \end{cases}$$

Über die Konvergenz bzw. Divergenz für  $|z - z_0| = R$  ist keine allgemeine Aussage möglich.  $R$  ist der Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  und  $K_R(z_0)$  heißt Konvergenzkreis. Es gilt:

$$R = \sup\{\rho \geq 0, (a_n \rho^n)_{n \geq 0} \text{ beschränkt}\}.$$

**Beweis**  $M := \{\rho > 0, (a_n \rho^n)_{n \geq 0} \text{ beschränkt}\}$  sei nach oben beschränkt,  $R := \sup M$ .

1. Fall: Sei  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z - z_0| < R$ .

Dann folgt:  $\exists \rho \in M : |z - z_0| < \rho < R$ . Deswegen gilt dann:  $(a_n \rho^n)_{n \geq 0}$  ist beschränkt. Zusammen mit dem Abelschen Lemma folgt daraus, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  absolut konvergiert.

2. Fall: Sei  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z - z_0| > R$ .

$\Rightarrow (a_n(z - z_0)^n)_{n \geq 0}$  ist unbeschränkt, denn wäre die Folge beschränkt, so gehörte  $|z - z_0| > R$  zu  $M$ .  
Widerspruch.  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  divergiert  $\square$

**Bemerkung** Im Folgenden sei o.B.d.A.  $z_0 = 0$ , d.h. die Potenzreihe habe die Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ .

**Satz 3.3** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ . Dann ist die durch

$$f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

gegebene Funktion holomorph und die Ableitung kann gliedweise gebildet werden:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

**Beweis** Wir zeigen die Holomorphie von  $f$  mit  $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ . Wir wissen, dass  $f$  stetig auf  $\{z \mid |z| < r\}$  ist. Außerdem ist aus Analysis I bekannt, dass die "formale Ableitung" ebenfalls eine Potenzreihe mit dem gleichen Konvergenzradius wie  $f$  ist.

**Lemma 3.4** Die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha a_n z^n$$

haben den gleichen Konvergenzradius.

**Beweis** Sei  $R$  der Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  und  $R_\alpha$  der Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha a_n z^n$ , o.B.d.A. sei  $\alpha \geq 0$ , sonst ersetze  $a_n \leftarrow n^{-\alpha} a_n$ . Für  $n \geq 1$  ist  $|a_n z^n| \leq |n^\alpha a_n z^n| \Rightarrow R_\alpha \leq R$ .

Umgekehrt: Sei  $|z| < R$ . Wir wählen ein  $w$  mit  $|z| < |w| < R$ .  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$  konvergiert.  $\Rightarrow$  (Abelsches Lemma)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a_n z^n$  konvergiert für jedes  $\alpha \geq 0$ ,  $\Rightarrow |z| < R_\alpha$ .

Also gilt:  $R = R_\alpha$   $\square$

Die Behauptung, dass  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ , folgt, wenn man zeigt, dass

$$\begin{aligned} R(z, h) &:= \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \\ &= \frac{1}{h} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+h)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \end{aligned}$$

für  $h \rightarrow 0$  gegen Null konvergiert. Schätze zunächst den Binominalkoeffizienten  $\forall k \geq 2$  ab:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &< k(k-1) \binom{n}{k} \\ &= k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} \\ &= n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \end{aligned} \tag{3}$$

Damit erhält man

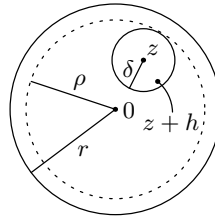
$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^{k-2} &\stackrel{(3)}{\leq} \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} |z|^{n-k} |h|^{k-2} \\ &= n(n-1)(|z| + |h|)^{n-2} \end{aligned} \quad (4)$$

Letzte Ungleichung mit Binomischer Formel:  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot z^{n-k} h^k = (z+h)^n$ .

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} &= \frac{1}{h} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \right) - \frac{z^n}{h} - nz^{n-1} \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right) - \frac{z^n}{h} - nz^{n-1} \\ &= \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \\ &= h \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2} \end{aligned} \quad (5)$$

Wähle jetzt ein  $\delta > 0$  so, dass  $|z| + \delta =: \rho < r$ :



Für alle  $h \in \mathbb{C}$  mit  $|h| < \delta$  gilt

$$\begin{aligned} |R(z, h)| &= \left| \frac{1}{h} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{h} ((z+h)^n - z^n) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \\ &\stackrel{(5)}{=} \left| \sum_{n=0}^{\infty} h a_n \left( \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2} \right) \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} |h| |a_n| \left( \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^{k-2} \right) \\ &\stackrel{(4)}{\leq} |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n(n-1) \underbrace{(|z| + |h|)^{n-2}}_{< \rho} \\ &\leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n(n-1) \rho^{n-2} \end{aligned}$$

Da  $\rho$  kleiner dem Konvergenzradius der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ , welcher gleichzeitig der der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k z^k$  ist, konvergiert diese und ihr Betrag ist beschränkt. Sei  $M \in \mathbb{R}$  eine Schranke für  $z = \rho$ . Dann ist weiter

$$\begin{aligned} |R(z, h)| &\leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n(n-1) \rho^{n-2} \\ &\leq |h| M \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

## 4 Elementare Funktionen

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Def. Exponentialfkt,  $\exp(z)' = \exp(z)$ ,  $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$
- Def. Cosinus, Sinus, Hyperbolisches, Eigenschaften, Additionstheoreme
- Exp-Funkt. und Cosinus, Sinus sind holomorph

**Definition 4.1 (Exponentialfunktion)** Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

heißt Exponentialfunktion.

**Satz 4.1** Die Exponentialfunktion ist ganz und es gilt

$$\exp'(z) = \exp(z)$$

**Beweis** Aus dem Quotientenkriterium

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| \rightarrow 0$$

folgt, dass die Potenzreihe  $\exp$  überall absolut konvergiert, also ist ihr Konvergenzradius unendlich. Nach Satz 3.3 ist sie holomorph auf ihrem Konvergenzradius, und damit auf ganz  $\mathbb{C}$ . Es gilt außerdem

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

□

**Satz 4.2** Es gilt für alle  $w, z \in \mathbb{C}$

$$\exp(w + z) = \exp(w) \exp(z)$$

**Beweis** 1. Fall: Betrachte die Funktion:

$$g(z) = \exp(z) \exp(-z)$$

Dann gilt:  $g'(z) = 0 \Rightarrow g$  ist konstant mit  $g(0) = 1$ . Daraus folgt:

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

2. Fall: Betrachte die Funktion

$$g(z) = \exp(w + z) \exp(-z)$$

Sie ist konstant, denn die Ableitung beträgt

$$g'(z) = \exp(w + z) \exp(-z) - \exp(w + z) \exp(-z) = 0$$

Weiterhin ist  $g(0) = \exp(w)$  und somit für alle  $w, z \in \mathbb{C}$

$$\exp(w + z) \exp(-z) = \exp(w) \Rightarrow_{1. \text{ Fall}} \exp(w + z) = \exp(w) \exp(z)$$

□

**Definition 4.2 (Hyperbolische und Trigonometrische Funktionen)** Wir definieren die folgenden Funktionen auf den komplexen Zahlen:

1. Cosinus Hyperbolicus

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

2. Sinus Hyperbolicus

$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. Cosinus

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cosh(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

4. Sinus

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{i} \sinh(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**Satz 4.3 (Eigenschaften der hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen)**

1. Im Komplexen gibt es keinen Unterschied zwischen trigonometrischen Funktionen und hyperbolischen Funktionen, denn es ist  $\cosh(iz) = \cos(z)$ ,  $\frac{1}{i} \sinh(iz) = \sin(z)$
2.  $\cosh z$ ,  $\sinh z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$  sind ganze Funktionen, d.h. sie sind holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ .
3. Es gilt

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z \end{aligned}$$

4.  $\cosh z$  und  $\cos z$  sind gerade Funktionen,  $\sinh z$  und  $\sin z$  ungerade.
5. Aus der Definition folgt

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= 1 \\ \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1 \end{aligned}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

6. Weiterhin gilt

$$e^{i\pi} = -1$$

7. Die aus dem reellen bekannten Additionstheoreme für trigonometrische und hyperbolische Funktionen folgen einfach aus Satz 4.2

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

spezieller Fall:  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

spezieller Fall:  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

8. Andere trigonometrische und hyperbolische Funktionen definiert man genau so wie im reellen, z.B.

$$\begin{aligned}\tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} \\ \tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z}\end{aligned}$$

Allerdings müssen diese Funktionen nicht mehr ganz sein,  $\tan z$  und  $\tanh z$  sind z.B. in  $z = \frac{\pi}{2}$  bzw.  $z = -\frac{i\pi}{2}$  nicht komplex differenzierbar.

**Beweis** Ohne Beweis.

□

## 5 Lineare Transformationen und die Riemann'sche Zahlensphäre

Was wir in diesem Kapitel lernen werden:

- Def. und Umformung "Riemann'sche Zahlensphäre" und  $\hat{\mathbb{C}}$
- Def. lineare Trafos
- Def. Doppelverhältniss  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$
- Es gilt:  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1, z_2, z_3, z_4 \in \text{Kreislinie}$
- Lineare Trafos sind biholo auf  $\hat{\mathbb{C}}$  und erhalten das Doppelverhältniss
- Die lin. Trafos bilden Gruppe  $PSL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C})/\sim$
- Jede lineare Trafo lässt sich aus Translationen, Drehstreckungen und Inversionen zusammensetzen
- Jede lin. Trafo  $\neq \text{id}$  hat genau einen oder zwei Fixpunkte
- Seien  $(z_1, z_2, z_3)$  paarw. versch. und  $(w_1, w_2, w_3)$  auch paarw. versch. in  $\hat{\mathbb{C}}$ . Dann gibt es genau eine lin. Trafo  $S$  mit  $S(z_i) = w_i$
- Lin Trafos führen Geraden/ Kreise in Geraden/ Kreise über

Ein wichtiges Thema in der Funktionentheorie sind konforme Abbildungen. Eine Funktion  $w = f(z)$  stellt genau dann eine konforme Abbildung des Gebietes  $D$  dar, wenn sie in diesem Gebiet 1. surjektiv ist, 2. holomorph ist und 3. injektiv. Aus 3. folgt: in jedem Punkt von  $D$  besitzt  $f$  eine von 0 verschiedene Ableitung  $f'(z)$ . (wenn  $f'(z_0) = 0$  für ein  $z_0 \in G$ , dann ist  $f(z_0)$  eine doppelte  $f(z_0)$ -Stelle, Widerspruch zu injektiv). Die zwei Haupteigenschaften von konformen Funktionen sind:

1. Jeder infinitesimale Kreis geht in einen infinitesimalen Kreis über, d.h., das Bild jeder (kleinen) Kreislinie ist bis auf eine von höherer Ordnung als der Kreisradius gegen Null strebende Abweichung wieder eine Kreislinie.
2. Der Schnittwinkel zweier Kurven stimmt mit dem Schnittwinkel ihrer Bilder überein (Winkeltreue).

Das Grundproblem der Theorie der konformen Abbildungen besagt folgendes: Gegeben seien zwei Gebiete  $D$  und  $D^*$ ; gesucht ist eine konforme Abbildung des Gebietes  $D$  auf das Gebiet  $D^*$ .

Die Lösung dieser Aufgabe ist im Allgemeinen nicht einfach anzugeben. Einen Ansatz hat Riemann in seinem Abbildungssatz gemacht, indem er zeigt, dass einfach zusammenhängende Gebiete durch eine konforme Abbildung in die Einheitskreisscheibe abgebildet werden können. Dies werden wir in Kapitel 23 sehen.

Eine der einfachsten konformen Abbildungen sind die linearen Transformationen der Form:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Eine andere konforme Abbildung ist die Wurzelfunktion von einer geschlitzten Ebene auf ihr Bild. Im folgenden Kapitel werden wir Lineare Transformationen ausführlich behandeln. Bevor wir aber dazu übergehen, erweitern wir unseren Betrachtungsraum  $\mathbb{C}$  noch um den "unendlich fernen" Punkt  $\infty$ .

Bis jetzt haben wir nur die endlichen Punkte der komplexen Zahlenebene betrachtet, für viele Fragen der Funktionentheorie spielt jedoch dieser unendlich ferne Punkt eine wichtige Rolle. Die Einführung dieses Punktes geschieht anschaulich mit Hilfe der stereographischen Projektion. Der Punkt  $z$  der komplexen Zahlenebene wird dabei vom Nordpol einer Kugel, die mit ihrem Südpol die Zahlenebene bei  $-1$  berührt, durch den Verbindungsstrahl in den Punkt  $Z$  dieser Kugel projiziert. Die stereographische Projektion liefert also eine eindeutige Abbildung der Zahlenebene auf diese Kugel, aus der der Nordpol entfernt



ist. Den Punkt  $Z$  nenne man das *sphärische Bild* der komplexen Zahl  $z$ , diese Kugel heißt *Riemann'sche Zahlenkugel*.

Um bei der stereographischen Projektion auch dem Nordpol einen Punkt in der Zahlenebene zuordnen zu können, führt man durch Definition in der Zahlenebene den unendlich fernen Punkt (bzw. den Wert  $z = \infty$ ) als Bild des Nordpols ein.

**Definition 5.1 (Riemann'sche Zahlensphäre)** Man nennt die Erweiterung der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  um einen Punkt  $\infty$  zu  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  die Riemann'sche Zahlensphäre.

**Bemerkung** Die Bezeichnung Sphäre ergibt sich mit der Methode der Stereographischen Projektion. Betrachtet man die Einheitsphäre

$$\mathbb{R}^3 \supset S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und eine Abbildung

$$\varphi : S^2 \setminus (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + ix_2)$$

so projiziert diese Punkte auf der Einheitsphäre auf die  $xy$ -Ebene, die  $\mathbb{C}$  entspricht. Die Gleichung  $\varphi$  ist leicht nachzuprüfen: Dabei bildet sie jedes  $p \in S^2$  auf den Schnittpunkt der Gerade durch den Nordpol  $(0, 0, 1)$  von  $S^2$  und durch  $p$  mit der  $xy$ -Ebene ab. Die angegebene Gleichung ist leicht zu verifizieren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}_1 = t \cdot x_1, \tilde{x}_2 = t \cdot x_2 \text{ mit } t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

Die Umkehrabbildung lautet dann

$$\varphi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad \varphi^{-1}(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)$$

Ergänzt man  $\varphi$  zu

$$\hat{\varphi} : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \varphi(\xi) & , \xi \neq (0, 0, 1) \\ \infty & , \xi = (0, 0, 1) \end{cases}$$

so erhält man einen Isomorphismus zwischen der Sphäre  $S^2$  und  $\hat{\mathbb{C}}$ .

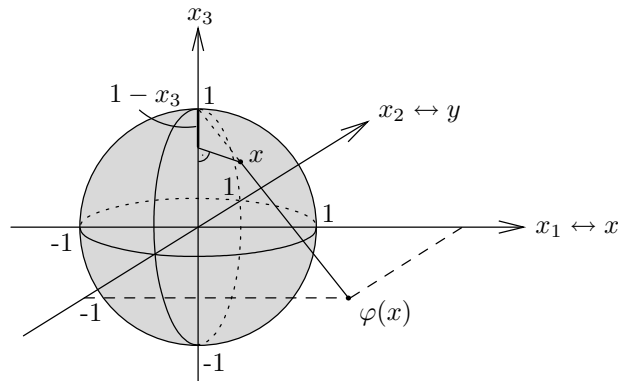


Abbildung 3: Stereographische Projektion

**Definition 5.2 (Lineare Transformationen)** Funktionen der Form

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

heißen (gebrochen) lineare Transformationen oder auch Möbiustransformation (im Deutschen). Dabei setzt man

$$f(\infty) := \frac{a}{c}, \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$$

**Bemerkung**

- Wir müssen  $ad - bc \neq 0$  fordern, damit die Funktion biholomorph ist. Ansonsten wäre sie nicht surjektiv. Dies hängt mit der Determinante der zu  $f$  assoziierten Matrix zusammen.
- Jetzt kann man die Motivation hinter der Erweiterung auf die Riemann'sche Zahlenebene erklären. Betrachten wir eine lineare Transformation  $f$  wie in der Definition, zuerst aber nur als Abbildung zwischen den Komplexen Zahlen. Betrachte zwei Fälle:

1. Sei  $c = 0$ . Dann hat  $f$  die Form

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad f^{-1}(z) = \frac{d}{a} \cdot z - \frac{b}{a}$$

Da  $c = 0$  folgt aus  $ad - bc \neq 0$ , dass  $a, d \neq 0$ . Also ist  $f$  biholomorph, d.h.  $f$  und die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  sind beide holomorph.

2. Sei  $c \neq 0$ . Dann ist  $f$  auf folgenden Definitions- und Wertebereich eingeschränkt biholomorph:

$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

Die Umkehrfunktion hat nämlich folgende Form

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) = z &= \frac{dw - b}{-cw + a} \\ \Leftrightarrow z(cw - a) &= -dw + b \\ \Leftrightarrow w(cz + d) &= az + b \\ \Leftrightarrow f(z) = w &= \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

und liegt somit in der selben Klasse wie  $f$ .

Ergänzt man nun die Komplexen Zahlen zur Riemann'schen Zahlensphäre und setzt man

$$f(\infty) := \frac{a}{c}, \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$$

so braucht man die beiden Fälle nicht mehr zu unterscheiden. Man erhält in beiden Fällen, also sowohl für  $c = 0$  als auch für  $c \neq 0$ , eine biholomorphe Funktion  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ .

- Die Linearen Transformationen sind die einzigen biholomorphen Funktionen auf der Riemann'schen Zahlenebene.  $\Rightarrow$  Lineare Transformationen sind auch die einzigen biholomorphen Funktion auf  $\mathbb{C}$ .
- Die Koeffizienten  $(a, b, c, d)$  liefern dieselbe Abbildung wie die Koeffizienten  $(-a, -b, -c, -d)$ . Außerdem ändern die Transformationen auf

$$a \mapsto \alpha a, \quad b \mapsto \alpha b, \quad c \mapsto \alpha c, \quad d \mapsto \alpha d$$

mit  $\alpha \neq 0$  die Lineare Transformation nicht. d.h. mit  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$  kann man  $\det A_T = 1$  erreichen.

**Satz 5.1** Die Linearen Transformationen bilden eine Gruppe, die isomorph zur Gruppe

$$PSL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C}) / \sim$$

ist. Dabei ist die Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  die der komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante Eins:

$$SL(2, \mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{2,2} \mid \det A = 1\}$$

Die Äquivalenzrelation  $\sim$  ist gegeben durch

$$A \sim B \Leftrightarrow A = \pm B, \quad A, B \in SL(2, \mathbb{C})$$

**Beweis** Um eine Gruppenisomorphie zu zeigen, zeigen wir

1.  $\exists$  eine bijektive Zuordnung  $f$ .

Ordne der Linearen Transformation  $S$  die Matrix  $A_S$  zu:

$$S(z) := \frac{az + b}{cz + d} \rightsquigarrow A_S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

$S$  ist invertierbar, da lin. Transformation. Es ist

$$S^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a} \rightsquigarrow A_{S^{-1}} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

Da nach Definition von  $SL(2, \mathbb{C})$  die Determinante  $\det A_{S^{-1}} = 1$  ist, folgt  $\frac{1}{ad-bc} = 1$  und so  $A_{S^{-1}} = A_S^{-1}$ .

2. zu zeigen  $f(S_2 \circ S_1) = f(S_2) \circ f(S_1)$ :

Seien

$$S_i(z) := \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}, \quad i = 1, 2$$

zwei Lineare Transformationen. Es ist

$$\begin{aligned} S_2 \circ S_1(z) &= S_2(S_1(z)) \\ &= \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} \\ &= \frac{a_2(a_1 z + b_1) + b_2(c_1 z + d_1)}{c_2(a_1 z + b_1) + d_2(c_1 z + d_1)} \\ &= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \\ &= A_{S_2} A_{S_1} \end{aligned}$$

□

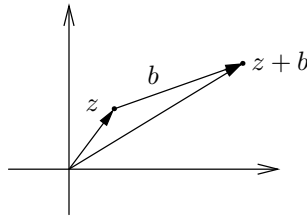
### Bemerkung

- Die Äquivalenzzuordnung ist wichtig, weil  $f(A) = f(-A)$ , also beide Matrizen die gleiche Lineare Transformation induzieren.
- Die Linearen Transformationen und  $SL(2, \mathbb{C})$  bilden keinen Körper, weil sie bezüglich der Addition nicht abgeschlossen sind.

**Beispiel 5.1 (Einfache Lineare Transformationen)**

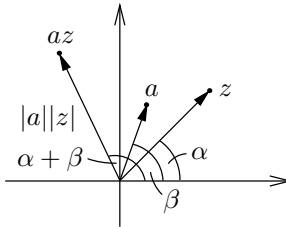
- Translation

$$z \mapsto z + b = \frac{z + b}{0z + 1} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}$$

Abbildung 4: Translation des Punktes  $z$  um  $b \in \mathbb{C}$ 

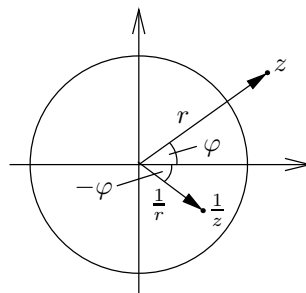
- Drehstreckung

$$z \mapsto az = \frac{az + 0}{0z + 1} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\det=1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Abbildung 5: Drehstreckung des Punktes  $z$  mit  $a \in \mathbb{C}$ 

- Inversion

$$z \mapsto \frac{1}{z} = \frac{0z + 1}{1z + 0} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\det=1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 6: Inversion des Punktes  $z$ 

**Satz 5.2** Jede Lineare Transformation lässt sich aus Translationen, Drehstreckungen und Inversionen zusammensetzen.

**Beweis** Betrachte eine Lineare Transformation

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Der Fall  $c = 0$  ist klar:  $z \mapsto a \cdot z + \frac{b}{a}$  ist eine Drehstreckung und Translation. Sei  $c \neq 0$ .

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(z + \frac{b}{a})}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{bc - ad}{c^2} \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} + \frac{a}{c}$$

Durch Verknüpfungen erhält man (da  $z$  nur an einer Stelle auftaucht)

$$z \mapsto z \xrightarrow{\text{Transl.}} z + \frac{d}{c} \xrightarrow{\text{Inv.}} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{Drehstr.}} \frac{bc - ad}{c^2} \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} \xrightarrow{\text{Transl.}} \frac{bc - ad}{c^2} \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} + \frac{a}{c}$$

die obige Umformung der Linearen Transformation. □

**Korollar 5.3** *Ist eine Abbildung invariant gegenüber Translationen, Drehstreckungen und Inversionen, so ist sie bereits invariant bezüglich aller Linearen Transformationen.*

**Definition 5.3 (Doppelverhältnis)** *Seien  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ . Die Größe*

$$\{z_1, z_2, z_3, z_4\} := \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}$$

*heißt das Doppelverhältnis von  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Die Reihenfolge ist dabei wichtig!*

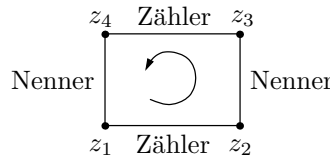


Abbildung 7: Eine einfache Regel um sich das Doppelverhältnis zu merken.

Eine Funktion, die das Doppelverhältnis für jeden Punkt  $z$  zu drei festen Punkten  $z_2, z_3, z_4$  angibt, ist eine besondere Lineare Transformation.

**Lemma 5.4** *Die Abbildung  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \{z, z_2, z_3, z_4\}$  ist diejenige Lineare Transformation, die  $z_2, z_3, z_4$  auf  $0, 1, \infty$  abbildet.*

**Beweis** 1. Die Abbildung ist eine Lineare Transformation:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{(z - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z)} \\ &= \frac{(z_3 - z_4) \cdot z - z_2 \cdot (z_3 - z_4)}{(z_3 - z_2) \cdot z + (z_2 - z_3) \cdot z_4} \end{aligned}$$

2.  $T(z_2) = 0, T(z_3) = 1, T(z_4) = \infty$ .

Betrachte  $z = z_2, z_3, z_4$ .

$$\begin{aligned} \{z_2, z_2, z_3, z_4\} &= \frac{(z_2 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_2)} \\ &= 0 \\ \{z_3, z_2, z_3, z_4\} &= \frac{(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_3)} \\ &= 1 \\ \{z_4, z_2, z_3, z_4\} &= \frac{(z_4 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_4)} \\ &= \infty \end{aligned}$$

□

**Bemerkung** Auf  $\hat{\mathbb{C}}$  definiert man das Doppelverhältnis so, wie man es auch intuitiv machen würde, man betrachtet  $\infty$  einfach als einen normalen Punkt, der allerdings die unendlichen Eigenschaften besitzt:  $\infty + a = \infty$ .

$$\begin{aligned} \{\infty, z_2, z_3, z_4\} &= \frac{(\infty - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - \infty)} \\ &= \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \\ \{z_1, \infty, z_3, z_4\} &= \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Korrekt betrachtet man eigentlich Folgen mit Grenzwert  $\infty$ , seien z.B.  $(w_1), (w_2) \subset \mathbb{C}$  Folgen gegen  $\infty$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \{\infty, \infty, z_3, z_4\} &= \lim_{w_2 \rightarrow \infty} \lim_{w_1 \rightarrow \infty} \{w_1, w_2, z_3, z_4\} \\ &= \lim_{w_2 \rightarrow \infty} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - w_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Lemma 5.5** *Alle Linearen Transformationen außer der Identität haben genau einen oder zwei Fixpunkte.*

**Beweis** Es gilt  $z = \frac{az+b}{cz+d}$ , genau dann, wenn

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow cz^2 + dz = az + b \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Im Fall  $c \neq 0$  gibt es also zwei Fixpunkte (die aber zu einem zusammenfallen können). Im Fall  $c = 0$  haben wir entweder  $d \neq a$  und so einen endlichen Fixpunkt, ansonsten  $a = d \Rightarrow f(\infty) = \infty$  d.h. Unendlich ist der einzige Fixpunkt. □

Aus dem Lemma können wir folgern: Es existiert keine lineare Transformation ohne Fixpunkt (weil  $f(\infty) = \infty$  auch einen Fixpunkt bilden) und keine mit mehr als zwei Fixpunkten, außer es handelt sich um die Identität. Außerdem gibt es keine lineare Abbildung die die Punkte des Einheitskreisringes wieder auf sich selber abbildet (also  $x = x \forall x \in \delta K_1(0)$ ) und ansonsten eine Inversion entlang des Einheitskreises darstellt (zu viele Fixpunkte).

**Satz 5.6** Sind  $(z_1, z_2, z_3)$  und  $(w_1, w_2, w_3)$  zwei Tripel untereinander paarweise verschiedener Punkte in  $\hat{\mathbb{C}}$ , so gibt es genau eine Lineare Transformation  $S$  mit  $S(z_k) = w_k$  für  $k = 1, 2, 3$ .

**Beweis** Zuerst zur Existenz. Betrachte

$$z \mapsto T(z) = \{z, z_1, z_2, z_3\}, \quad w \mapsto \tilde{T}(w) = \{w, w_1, w_2, w_3\}$$

Nach Lemma (5.4) gilt jetzt

$$T(z_1) = \tilde{T}(w_1) = 0, \quad T(z_2) = \tilde{T}(w_2) = 1, \quad T(z_3) = \tilde{T}(w_3) = \infty$$

Da die Linearen Transformationen eine Gruppe bilden ist

$$S := \tilde{T}^{-1} \circ T$$

eine lineare Transformation. Es gilt

$$S(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, 3$$

Nun zur Eindeutigkeit. Seien  $S, \tilde{S}$  Lineare Transformationen mit

$$S(z_k) = w_k = \tilde{S}(z_k), \quad k = 1, 2, 3$$

Dann ist auch  $R := \tilde{S}^{-1} \circ S$  eine Lineare Transformation. Für sie gilt  $R(z_k) = z_k$  für  $k = 1, 2, 3$ . Sie hat die drei Fixpunkte  $z_1, z_2, z_3$  und muss somit nach Lemma (5.5) die Identität sein.  $\square$

Der folgende Satz sagt aus: Das Doppelverhältnis von vier Punkten ändert sich nicht, wenn man sie alle mittels der gleichen Linearen Transformation abbildet und dann wieder das Doppelverhältnis betrachtet.

**Satz 5.7** Lineare Transformationen erhalten das Doppelverhältnis, d.h. für eine beliebige Lineare Transformation  $S$  gilt

$$\{S(z_1), S(z_2), S(z_3), S(z_4)\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

**Beweis** Diesen Satz kann man auf viele Arten beweisen:

1. Anwendung des Satzes über die Eindeutigkeit einer linearen Transformation wenn gilt  $S(z_i) = w_i$  für  $i = 1, \dots, 3$ , mit  $(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3)$  und  $(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$ .

Betrachte

$$R := z \mapsto \{S(z), S(z_2), S(z_3), S(z_4)\}$$

Das ist eine Komposition von  $z \mapsto S(z)$  und  $w \mapsto \{w, S(z_2), S(z_3), S(z_4)\}$ . Also gilt nach Lemma (5.4)

$$R(z_2) = 0, \quad R(z_3) = 1, \quad R(z_4) = \infty$$

Die Lineare Transformation  $z \mapsto T(z) := \{z, z_2, z_3, z_4\}$  hat die gleichen Eigenschaften. Aus der Eindeutigkeit in Satz (5.6) folgt  $R(z) = T(z)$  und mit  $z = z_1$  insbesondere die Behauptung.

2. Man kann auch überprüfen, ob das Doppelverhältnis invariant gegen Translation, Drehstreckung und Inversion ist, s.h. Korollar (5.3). Für Translation  $((z_1 + b - (z_2 + b)) \dots)$  und Drehstreckung  $\frac{(az_1 - az_2)(az_3 - az_4)}{(az_2 - az_3)(az_4 - az_1)}$  ist das offensichtlich. Bei der Inversion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  erhält man

$$\frac{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_4}\right)}{\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{z_4} - \frac{1}{z_1}\right)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

wobei  $\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{z_2 - z_1}{z_1 \cdot z_2}$  ist.

3. Den Satz kann man auch direkt nachrechnen.

□

**Satz 5.8 (Geometrische Eigenschaften der Möbiustransformationen)** *Lineare Transformationen führen Geraden und Kreislinien in Geraden oder Kreislinien über (also auch Kreise in Gerade und umgekehrt).*

**Beweis** Anstatt es für eine beliebige Transformation zu zeigen, zeigen wir die Aussage für Translationen, Drehstreckungen und Inversionen. Für Translationen (verschieben des Kreises um eine Konstante) und Drehstreckungen (den Kreis drehen und dann den Radius vergrößern oder verkleinern) ist die Behauptung klar. Bleibt die Behauptung für die Inversion zu zeigen.

Betrachten wir aber erstmal, was für Eigenschaften Punkte, die auf einem Kreis liegen, erfüllen müssen:

$$\begin{aligned} |z - z_0|^2 &= r^2 \quad r \in \mathbb{R}_+ \text{ der Radius des Kreises, } z_0 \text{ der Mittelpunkt} \\ (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) &= z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 \\ 0 &= z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 - r^2 \end{aligned}$$

mit  $\bar{z}_0 = -\frac{b}{a}$ , und  $\frac{c}{a} = z_0\bar{z}_0 - r^2$  ergibt sich dann folgende Gleichung, die für alle Punkte auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt  $z_0$  und dem Radius  $r$  erfüllt sein muss:

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \quad a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}. (*)$$

Außerdem gilt für die Konstanten  $a, b, c$  noch:

$$\begin{aligned} r^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow z_0\bar{z}_0 - \frac{c}{a} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{\bar{b}}{a} &> \frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow b\bar{b} &> ac (**) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Inversion  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ . Es ist zu prüfen:  $\forall z \in \text{Kreis}$ , die deswegen auch die Gleichungen (\*) und (\*\*) erfüllen, gibt es dann auch ein  $a', c' \in \mathbb{R}, b' \in \mathbb{C}$ , so dass  $\forall \frac{1}{z}$  die beiden Gleichungen erfüllt sind. Durch einfaches Umformen ergibt sich, dass solche Konstanten existieren:

$$\begin{aligned} az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c &= 0 \\ \Leftrightarrow a + \frac{b}{z} + \frac{\bar{b}}{z} + \frac{c}{z\bar{z}} &= 0 \\ \Leftrightarrow cf(z)f(\bar{z}) + bf(\bar{z}) + \bar{b}f(z) + a &= 0 \end{aligned}$$

mit  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Die neuen Konstanten sind also:  $a' = c, b' = \bar{b}, c' = a$  und damit ist Gleichung (\*) und auch Gleichung (\*\*) erfüllt. □

**Bemerkung** Man kann Geraden auch als Kreislinien von Kreisen betrachten, deren Mittelpunkt in  $\infty$  liegt.

**Satz 5.9** *Es ist  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn  $z_1, z_2, z_3, z_4$  auf einer Kreislinie liegen.*

**Beweis** Betrachte zuerst die Funktion:

$$T : z \rightarrow \{z, z_2, z_3, z_4\}, \quad T(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z)}$$

Sie ist eine lineare Transformation. Nach Satz 5.16 erhalten lineare Transformationen das Doppelverhältnis. Also gilt:

$$\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \{T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\}$$



"  $\Rightarrow$  " Sei nun  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \in \mathbb{R}$ . Da  $T(z_2) = 0, T(z_3) = 1, T(z_4) = \infty$  folgt

$$\{T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\} = \{T(z_1), 0, 1, \infty\} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow T(z_1) \in \mathbb{R}.$$

Die Werte  $T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)$  liegen also auf einer Geraden, der reellen Achse. Wenden wir nun die Umkehrfunktion von  $T$ , die Funktion  $T^{-1}$ , auf  $T$  an, so bildet sie jede Gerade oder jeden Kreis wieder auf einen Kreis oder eine Gerade ab. Da  $T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)$  auf einer Gerade lagen, müssen jetzt die Werte  $z_1, z_2, z_3, z_4$  auf einem Kreis oder eine Gerade liegen.

"  $\Leftarrow$  " Seien  $z_1, z_2, z_3, z_4$  Elemente eines Kreises. Betrachte wieder die lineare Transformation  $T$  wie oben. Es gilt wieder  $T(z_2) = 0, T(z_3) = 1, T(z_4) = \infty$ . Da eine lineare Transformation Kreise/Geraden auf Kreise/Geraden abbildet, bildet  $T$  den Kreis um  $z_1, z_2, z_3, z_4$  auf eine Gerade ab.  $\Rightarrow T(z_1)$  liegt auch auf der Geraden durch  $0, 1, \infty \Rightarrow T(z_1) \in \mathbb{R}$ . Behauptung.  $\square$

**Beispiel 5.2 (Doppelverhältniss eines Quadrates)** Sind  $z_1, z_2, z_3, z_4$  die Eckpunkte eines Quadrates im Gegenuhrzeigersinn, so gilt  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = -1$ .

Das Doppelverhältnis für alle Quadrate ist gleich, da sie aus Drehstreckungen und Translationen des Einheitsquadrates entstehen. Betrachte also das entsprechende Doppelverhältnis des Einheitsquadrates.

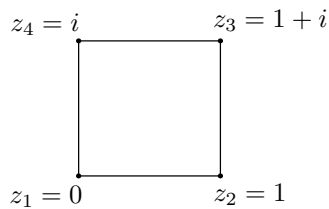


Abbildung 8: Das Einheitsquadrat

Das Doppelverhältnis ist:

$$\frac{(0-1)((1+i)-i)}{(1-(1+i))(i-0)} = -1.$$

## 6 Kurvenintegrale

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Def. Integrationsweg/Kurve, wichtige Beispiele (Kreislinie, Strecke)
- Def Länge von  $\gamma$ , Kurvenintegral, Integral über komplexe Funktion
- Wichtiges Beispiel:  $\int_{|z|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$
- Man kann Kurven auch hintereinander schalten und rückwärts durchlaufen und lineare Kombinationen bilden.

**Definition 6.1 (Integrationsweg & Spur)** Ein Integrationsweg oder eine Kurve in  $U \subset \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, ist eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow U$$

Die Bildmenge  $\gamma([a, b])$  heißt Spur, man schreibt

$$Sp(\gamma) := \gamma([a, b]) \subset U.$$

Man sagt,  $\gamma$  parametrisiert  $Sp(\gamma)$ .

Spezialfälle von Integrationswegen sind:

- Immersionen:  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ : d.h.  $\gamma$  ist streng monoton
- Geschlossene Kurven:  $\gamma(a) = \gamma(b)$
- Einfach geschlossene Kurven:  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ,  $\gamma|_{[a,b]}$  ist injektiv

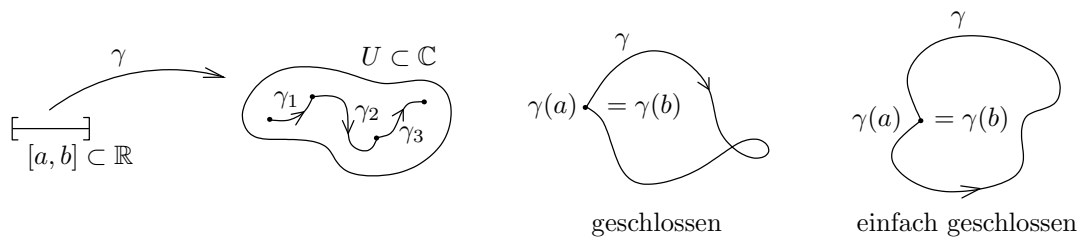


Abbildung 9: Integrationsweg, geschlossene Kurve, einfach geschlossene Kurve

### Beispiel 6.1 (Parametrisierte Kurven)

- Die geschlossene Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) := z_0 + re^{it}, \quad z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, r > 0$$

ist die *positiv orientierte Kreislinie*. d.h. sie geht gegen den Uhrzeigersinn. Wichtig: die Kurve ist *nicht* die Menge ihres Bildes. Zu der Kurve gehört auch die Parametrisierung, d.h. wie Schnell die Spur durchlaufen wird und wie oft jeder Punkt des Bildes überlagert wird.

- Die nicht geschlossene Kurve

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) := (1-t)z_1 + tz_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

ist die Verbindungsstrecke zwischen  $z_1$  und  $z_2$ . Der rückwärtslaufende Weg ist

$$\gamma^{-1}(t) = tz_1 + (1-t)z_2$$

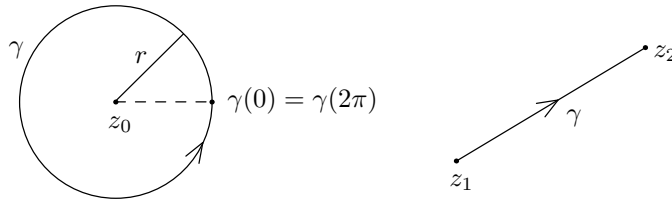


Abbildung 10: positiv orientierte Kreislinie, Verbindungsstrecke

**Definition 6.2 (Länge einer Kurve)** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Kurve. Man nennt

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

die Länge von  $\gamma$ .

**Bemerkung** zur physikalischen Interpretation: Weg ist Geschwindigkeit mal Zeit. Allerdings können wir da vorwärts und rückwärts gehen. Uns interessiert aber der absolute Weg, den wir zurücklegen. Also betrachte den Betrag der Geschwindigkeit über einen festen Zeitraum. Allgemein entspricht dies dem  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$ , quasi der zeitlichen Betrachtung von  $a$  nach  $b$  mit der Geschwindigkeit  $\gamma'(t)$ .

**Bemerkung** Die Ableitung von  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$  ist zu verstehen als

$$\gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)$$

Dabei sind  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Der Betrag ist also

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}$$

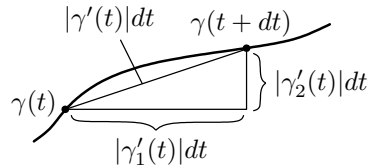


Abbildung 11: Ableitung einer Kurve

**Definition 6.3 (Kurvenintegral)** Es seien  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Integrationsweg und  $f : Sp(\gamma) \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ ,  $U$  offen eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

das Kurvenintegral über  $f$  längs  $\gamma$ .

**Bemerkung** Das Integral einer komplexen Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$  mit  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig berechnet sich als

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b g_1(t) dt + i \int_a^b g_2(t) dt$$

**Beispiel 6.2** Sei  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$  die positiv orientierte Kreislinie, s. Beispiel (6.1). Dann ist

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i$$

Interessanterweise ist der Integralwert unabhängig vom Radius des Kreises.

**Satz 6.1** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  stetig,  $U \subset \mathbb{C}$  offen.  $\tau : [A, B] \rightarrow [a, b]$  sei eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\tau(A) = a$  und  $\tau(B) = b$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  eine Kurve. So gilt  $\gamma \circ \tau : [A, B] \rightarrow U$  und

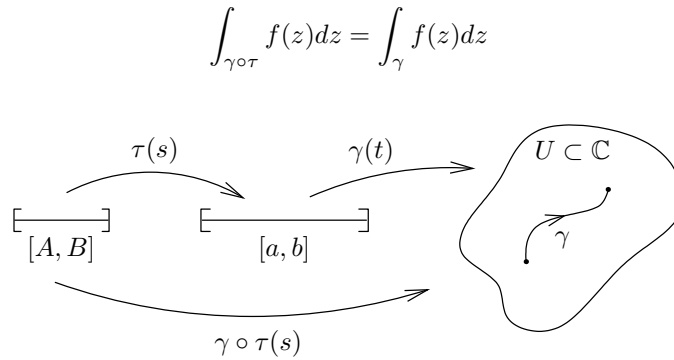


Abbildung 12: Verknüpfte Kurven

**Beweis**

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \tau} f(z) dz &= \int_A^B f(\gamma \circ \tau(s)) \frac{d\gamma \circ \tau(s)}{ds} ds \\ &= \int_A^B f(\gamma(\tau(s))) \frac{d\gamma(\tau(s))}{ds} ds \\ &\stackrel{t=\tau(s)}{=} (*) \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{d\gamma(t)}{\frac{dt}{\tau'(s)}} \tau'(s) \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{d\gamma(t)}{dt} dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

(\*): Eigentlich Substitution mit  $ds = \frac{dt \cdot ds}{d\tau(s)}$  und  $\frac{d\tau(s)}{ds} = \tau'(s)$  konkret berechenbar.  $\square$

**Bemerkung** Kehrt man die Durchlaufrichtung um, d.h.  $\tau(A) = b, \tau(B) = a$ , so ist

$$\int_{\gamma \circ \tau} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Die Spur von  $\gamma$  zusammen mit der Durchlaufrichtung bestimmen also das Integral.

**Definition 6.4 (Ketten)** Als Kette bezeichnen wir eine endliche formale Linearkombination von Kurven  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ :

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N n_i \gamma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Man setzt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^N n_i \int_{\gamma_i} f(z) dz$$

Insbesondere ist dann  $-\Gamma$  anders herum orientiert als  $\Gamma$ , d.h.  $\Gamma$  hat die entgegengesetzte Durchlaufrichtung.

## 7 Der Cauchy'sche Integralsatz für Rechtecke

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- $f$  holo hat Stammfunkt  $\Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$
- $f$  holo,  $\gamma$  Randkurve eines vollständig im Def.bereich enthaltenen Rechtecks  $\Rightarrow \int_\gamma f = 0$
- Integral holo Fkt. über stetig diffbares Bild eines Rechtecks ist 0
- Cauchy-Satz über Kreisscheiben und Kreise.

**Lemma 7.1** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, stetig. Weiter sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  die Verbindungsstrecke zwischen  $z_1 \in \mathbb{C}$  und  $z_2 \in \mathbb{C}$ . Besitzt  $f$  eine Stammfunktion  $F$ , d.h. es gilt  $F' = f$ , so gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

**Behauptung** Es reicht, dass  $f$  stetig ist und  $\gamma$  eine stückweise stetig differenzierbare Funktion ist.

**Beweis** Es reicht die Definition für Kurvenintegrale mit der Definition des Riemannintegrals zu bringen:

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung** Im Lemma 7.1 kennen wir die Stammfunktion schon, im folgenden Satz 7.2. nicht, und trotzdem können wir Aussagen über das Integral machen. Allerdings integrieren wir in 7.1. wirklich nur über eine Verbindungsstrecke.

Später können wir sogar sagen, dass  $f$  genau dann holomorph ist, wenn das Integral über bestimmte Kurven immer verschwindet, bzw. dass eine Menge  $G$  eine bestimmte Form hat (ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist), genau dann wenn jede holomorphe Funktion auf  $G$  eine Stammfunktion besitzt.

**Satz 7.2 (Der Cauchy'sche Integralsatz für Rechtecke)** Sei  $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{C}$  die Randkurve eines Rechteckes  $Q \subset U \subset \mathbb{C}$ ,  $U$  offen. Weiter sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

**Beweis** Eigentlich ist das eine Folgerung aus dem Satz von Stokes,<sup>1</sup> welcher besagt wann und wie man anstatt über eine Menge über deren Rand integrieren kann.

<sup>1</sup> **Satz von Stokes:** Seien  $M$  eine  $k$ -dimensionale kompakte, orientierte berandete Untermannigfaltigkeit in einem Vektorraum  $V$  und  $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ . Der Rand  $\partial M$  trage die induzierte Randorientierung. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Wir zeigen das hier direkt.  $f$  ist holomorph, also gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \chi(z), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\chi(z)}{|z - z_0|} = 0$$

und somit

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z_0) dz + \int_{\gamma} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{\gamma} \chi(z) dz$$

Da  $f(z_0) = \text{const.}$  und  $f'(z_0)(z - z_0)$  als lineare Funktion Stammfunktionen besitzen, folgt mit Lemma (7.1), dass

$$\int_{\gamma} f(z_0) dz = \int_{\gamma} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0$$

Deshalb ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \chi(z) dz$$

Die Idee ist jetzt, das Rechteck  $Q$  in vier gleich große Rechtecke zu zerlegen.

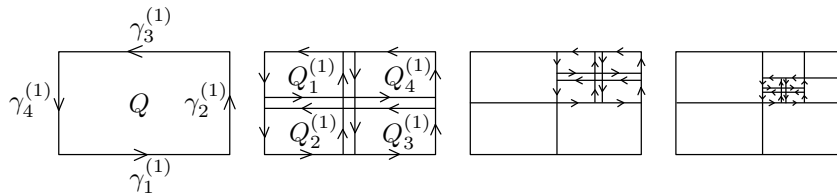


Abbildung 13: Zerlegung des Rechtecks

Sind nun  $\gamma_i^{(1)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  entsprechende Berandungen von  $Q$ , so ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1^{(1)}} f(z) dz + \int_{\gamma_2^{(1)}} f(z) dz + \int_{\gamma_3^{(1)}} f(z) dz + \int_{\gamma_4^{(1)}} f(z) dz$$

Betrachte jetzt das Teilrechteck mit dem größten Integral

$$i_1 := \max_{k=1, \dots, 4} \int_{\gamma_k^{(1)}} f(z) dz$$

Wir erhalten die Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\gamma_{i_1}^{(1)}} f(z) dz \right|$$

Zerlegen wir jetzt immer wieder das größte Rechteck analog wie zuvor, so erhalten wir einerseits eine absteigende Folge von Rechtecken  $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_n$  und gleichzeitig eine Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\gamma_{i_1}^{(1)}} f(z) dz \right| \leq \dots \leq 4^n \left| \int_{\gamma_{i_n}^{(n)}} f(z) dz \right| \quad (= 4^n \left| \int_{\gamma_{i_n}^{(n)}} \chi(z) dz \right|)$$

Sei jetzt  $\{z_0\} := \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ . Der Punkt  $z_0$  ist eindeutig bestimmt und in allen  $Q_k$  enthalten (Cauchy-Folge). Sei  $\varepsilon > 0$ .

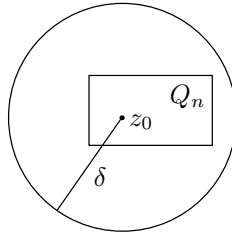
Wähle ein  $\delta > 0$  so, dass

$$|\chi(z)| < \varepsilon |z - z_0| \quad \forall z : |z - z_0| < \delta$$

da  $\frac{\chi(z)}{|z - z_0|} \xrightarrow{|z - z_0| \rightarrow 0} 0$ .

Wähle weiter  $n$  so gross, dass  $Q_n \subset \{z \mid |z - z_0| < \delta\}$ . Dann gilt für alle  $z \in Q_n$

$$|\chi(z)| < \varepsilon 2^{-n} d$$

Abbildung 14: Die Delta-Umgebung um  $Q_n$ 

Dabei ist  $d$  der Durchmesser des ursprünglichen Rechtecks  $Q$ . Setzt man außerdem  $l$  als Länge von  $\gamma$ , so ist  $2^{-n}l$  die Länge von  $\gamma^{(n)}$  und man erhält

$$\left| \int_{\gamma^{(n)}} \chi(z) dz \right| < \varepsilon 2^{-n} d 2^{-n} l$$

Also gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| < 4^n \varepsilon d l 2^{-n} 2^{-n} = \varepsilon d l \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Die Idee des Beweises ist also: Die großen Teile  $f(z_0)$ ,  $(z - z_0)f'(z_0)$  haben Stammfunktionen und fallen deswegen weg, und den Rest können wir kontrollieren.  $\square$

**Satz 7.3** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Weiter sei  $\varphi : Q \rightarrow U$  stetig differenzierbar für eine Rechteck  $Q \subset \mathbb{C}$  mit Randkurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .  $\varphi$  ist also eine stetige Deformierung von  $\gamma$ . Dann gilt

$$\int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz = 0.$$

**Beweis** Der Beweis geht genau so wie der zu Satz (7.2). Man muss lediglich die Jacobiabbildung von  $\varphi$ , welche auf der kompakten Menge  $Q$  beschränkt ist, zusätzlich abschätzen.  $\square$

### Beispiel 7.1 (Anwendungen)

1. Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, seien  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow U$  zwei stetig differenzierbare Kurven. Betrachte

$$\varphi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(t, \tau) := \alpha(t)(1 - \tau) + \tau\beta(t)$$

Das Bild von  $\varphi([a, b] \times [0, 1])$  sei eine Teilmenge von  $U$ .  $\varphi$  nimmt dann folgende Funktionen an:

$$\tau = 0 \Rightarrow \varphi(t, 0) = \alpha(t)$$

$$\tau = 1 \Rightarrow \varphi(t, 1) = \beta(t)$$

$$t = a \Rightarrow \varphi(a, \tau) = \delta_2$$

$$t = b \Rightarrow \varphi(b, \tau) = \delta_1$$

Der Rand von  $\varphi$  bildet also ein deformiertes Rechteck. Dann gilt

$$\int_{\alpha} f(z) dz + \int_{\delta_2} f(z) dz - \int_{\beta} f(z) dz - \int_{\delta_1} f(z) dz = 0$$

und somit

$$\int_{\alpha} f(z) dz - \int_{\beta} f(z) dz = \int_{\delta_1} f(z) dz - \int_{\delta_2} f(z) dz$$

2. Haben  $\alpha$  und  $\beta$  den gleichen Anfangs- und Endpunkt, so haben  $\delta_1$  und  $\delta_2$  die Länge 0 und wir erhalten

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz$$

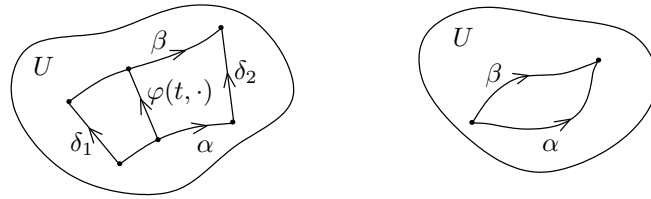


Abbildung 15: Skizzen zum Beispiel 7.1.

**Bemerkung** Integrale von holomorphen Funktionen sind also fast vom Integrationsweg unabhängig. Ist  $U$  allerdings nicht einfach zusammenhängend, d.h. nicht jede geschlossene Kurve kann zu einem Punkt deformiert werden, so kann

$$\int_{\alpha} f(z) dz \neq \int_{\beta} f(z) dz$$

sein, falls die Bedingung  $\varphi([a, b] \times [0, 1]) \subset U$  nicht erfüllt ist.

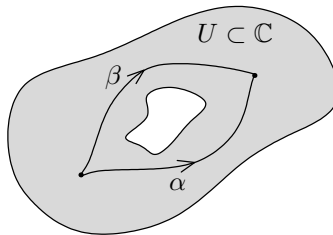


Abbildung 16: Nicht einfach zusammenhängendes Gebiet  $U$ , in dem die geschlossene Kurve  $(\beta^{-1} \circ \alpha)$  nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

**Beispiel 7.2 (Randkurve eines Dreiecks)** Sei  $\gamma$  die Randkurve eines Dreiecks. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für alle holomorphen  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen.

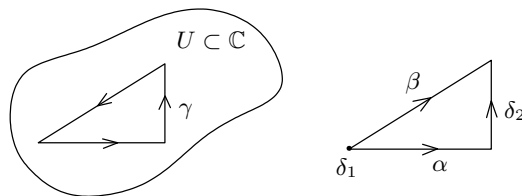


Abbildung 17: Dreieckskurve



Wählt man nämlich Kurven  $\alpha, \beta, \delta_1$  und  $\delta_2$  wie in Abb. 17 ( $\delta_1 = z_0 = \text{const}$ ), so ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(z)dz + \int_{\delta_2} f(z)dz &= \int_{\beta} f(z)dz \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha} f(z)dz + \int_{\delta_2} f(z)dz - \int_{\beta} f(z)dz &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\text{Dreieck}} f(z)dz &= 0 \end{aligned}$$

**Beispiel 7.3** Seien  $\alpha, \beta$  geschlossene Kurven.  $\Rightarrow \delta_1 - \delta_2 = 0$ . Dann ist

$$\int_{\alpha} f(z)dz - \int_{\beta} f(z)dz = \int_{\delta_1} f(z)dz - \int_{\delta_2} f(z)dz = 0$$

und deshalb

$$\int_{\alpha} f(z)dz = \int_{\beta} f(z)dz$$

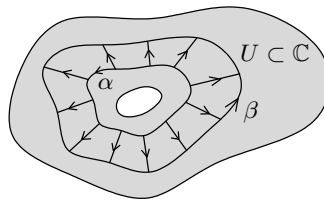


Abbildung 18: Skizze zum Beispiel 7.3

**Bemerkung** Die Bezeichnung

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz := \int_{\gamma} f(z)dz$$

ist so zu verstehen, dass

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}$$

eine positiv orientierte Kreislinie ist.

**Satz 7.4 (Cauchy'scher Integralsatz für einen Kreisring)** Seien  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $U \subset \mathbb{C}$  offen, sowie der Kreisring

$$K_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z - z_0| \leq R\} \subset U, \quad z_0 \in U$$

gegeben. Dann ist

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz = \int_{|z-z_0|=R} f(z)dz$$

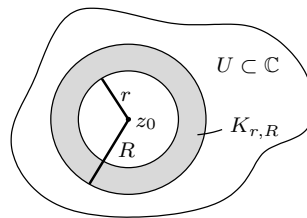


Abbildung 19: Kreisring  $K_{r,R}$

**Beweis** Ohne Beweis. □

**Korollar 7.5 (Cauchy'scher Integralsatz für die Kreisscheibe)** Seien  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $U \subset \mathbb{C}$  offen, sowie die Kreisscheibe

$$K_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\} \subset U, \quad z_0 \in U$$

gegeben. Dann ist

$$\int_{|z-z_0|=R} f(z)dz = 0$$

**Beweis** Ohne Beweis.

□

## 8 Die Cauchyformel

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- die Cauchyintegralformel:  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=R} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$
- den Mittelwertsatz:  $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$

**Satz 8.1 (Die Cauchy-Integralformel)** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $U \subset \mathbb{C}$  offen. In  $U$  sei die Kreisscheibe

$$K_R(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq R\}, \quad a \in U$$

enthalten. Dann gilt für alle  $z_0 \overset{\circ}{\in} K_R$  (d.h. aus dem Inneren von  $K_R$ )

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Die Funktionswerte auf dem Rand des Kreises bestimmen also bereits die Funktion auf dem Inneren des Kreises.

**Beweis** Die Funktion  $\frac{f(z)}{z-z_0}$  ist, abgesehen von  $z_0$ , holomorph. Wähle ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\} \subset K_R$  ist.

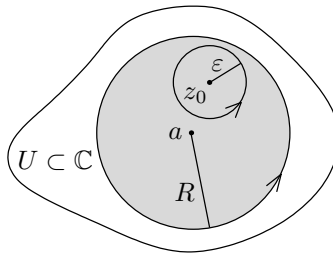


Abbildung 20: Epsilon-Umgebung um  $z_0$

Mit dem Cauchy'schen Integralsatz für Bilder von Rechtecken (7.3) ergibt sich

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Betrachte den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Da  $f$  holomorph ist, gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \chi(z), & \frac{\chi(z)}{z - z_0} &\xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \\ \Rightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \underbrace{f'(z_0)}_{\in \mathbb{C}} + \underbrace{\frac{\chi(z)}{z - z_0}}_{\rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow z_0} \end{aligned}$$

und somit ist  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  beschränkt auf  $|z - z_0| = \varepsilon$  für  $\varepsilon > 0$  klein genug. Da der Kreisumfang für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen Null geht, ist deshalb

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz}_{=0} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz \\
 &= 0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_0) \underbrace{\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{z-z_0} dz}_{=2\pi i \text{ nach Beispiel (6.2)}} \\
 &= 2\pi i f(z_0)
 \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung aus:

$$2\pi i f(z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

□

**Korollar 8.2 (Mittelwertsatz für holomorphe Funktionen auf einer Kreisscheibe)**

Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $U \subset \mathbb{C}$  offen. In  $U$  sei die Kreisscheibe

$$K_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\} \subset U, \quad R > 0$$

enthalten. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt$$

**Beweis** Mit der Parametrisierung der Kreislinie zu  $z : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K_R, z(t) = z_0 + Re^{it}$  ergibt der Cauchy-Integralsatz mit  $z_0 \in \mathbb{C}$  als Zentrum des Kreises

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} \underbrace{Re^{it}}_{=z'(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt$$

□

## 9 Der Potenzreihenentwicklungssatz

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Jede holomorphe Funktion kann in einer Umgebung aus  $z_0$  in eine Potenzreihe entwickelt werden.
- holo  $\Rightarrow$  beliebig oft db.
- Satz von Goursat
- Satz von Liouville
- Fundamentalsatz der Algebra

**Satz 9.1** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Dann gibt es eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$  mit positivem Konvergenzradius, die in einer Umgebung von  $z_0 \in U$  die Funktion  $f$  darstellt. Für die Koeffizienten gilt

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

sofern  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$  in  $U$  enthalten ist.

**Bemerkung** Das Theorem bildet die Umkehrung des Satzes, dass Potenzreihen holomorphe Funktionen sind. Die Potenzreihe, die  $f$  auf einem Kreis mit dem Radius  $r$  darstellt, kann allerdings einen Konvergenzradius  $R$  besitzen mit  $r < R$ .

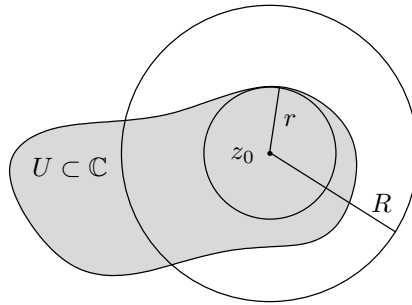


Abbildung 21:  $f$  kann auf dem Gebiet  $K_r(z_0)$  durch die Potenzreihe dargestellt werden. Allerdings kann die Potenzreihe auch auf dem Gebiet  $K_R(z_0)$  konvergieren.

**Beweis** O.B.d.A. sei  $z_0 = 0$ . Definiere  $K_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\} \subset K_{r+\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r + \varepsilon\} \subset U$ . Für  $|\xi| = r + \varepsilon$  und  $\forall z \in K_r$  ergibt sich aus der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^k$$

Diese Reihe konvergiert dann absolut und gleichmäßig. Mit der Cauchyformel für die Kreisscheibe, Satz (8.1), folgt  $\forall z \in K_r$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r+\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r+\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\xi}\right)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r+\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} \left(\frac{z}{\xi}\right)^k d\xi \end{aligned}$$

Da  $f$  holomorph und insbesondere stetig ist, ist es auch  $\frac{f(\xi)}{\xi}$ . Vor allem ist dieser Ausdruck auch auf der kompakten Menge  $|\xi| = r + \varepsilon$  beschränkt und wir erhalten weiter

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r+\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} \left(\frac{z}{\xi}\right)^k d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r+\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \end{aligned}$$

mit

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r+\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi$$

□

**Korollar 9.2 (Satz von Goursat)** *Jede holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, ist beliebig oft differenzierbar und es ist*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \text{ mit } c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

für ein  $z_0 \in U$ .

**Beweis** Stelle die holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, als Potenzreihe entwickelt um  $z_0 \in U$  dar:  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ . Potenzreihen sind in ihrem Konvergenzkreis beliebig oft differenzierbar, s. Satz (3.3). Also ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ f'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (z - z_0)^{k-1} \\ f''(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) (z - z_0)^{k-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) (z - z_0)^{k-n} \end{aligned}$$

Betrachtet man jetzt  $f^{(n)}(z_0)$ , so erhält man

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) (z_0 - z_0)^{k-n} \\ &= c_n n(n-1)(n-2) \cdots (n-n+1) (z_0 - z_0)^{n-n} \\ &= c_n n! \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

**Korollar 9.3 (Integralformel für Ableitungen)** Sei  $f$  eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge  $U$ . Sei  $K_r(z_0) \subset U$  und  $K_R(a) \subset U$  so dass ebenfalls  $z_0 \in K_R(a)$ . Dann gilt

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz.$$

**Korollar 9.4** Ist  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$  eine in

$$K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$$

konvergente Potenzreihe, so kann  $f(z)$  in jedem Punkt  $z_1 \in K_R(z_0)$  in einer Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_1)^k$$

entwickelt werden, d.h.  $f(z) = F(z)$  für alle  $z \in K_r(z_1) \cap K_R(z_0)$ . Dabei ist  $r$  der Konvergenzradius der Reihe  $F(z)$ . Er beträgt mindestens

$$r \geq R - |z_0 - z_1|$$

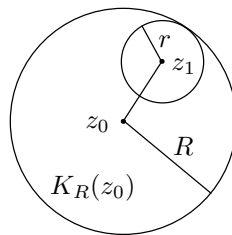


Abbildung 22: Um jedes  $z_1 \in K_R(z_0)$ , kann eine Potenzreihe entwickelt werden. Ihr Konvergenzradius geht mindestens bis an den Rand von  $K_R(z_0)$ .

**Beweis** Beweisidee: Großer Umordnungssatz (s. Elstrodt S. 31) □

**Beispiel 9.1** Betrachte  $f(z) = \frac{1}{z-1}$ . Entwickle die Potenzreihe nach Korollar (9.2) um  $z_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\frac{1}{(z-1)^2} \\ f''(z) &= \frac{2}{(z-1)^3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(z) &= (-1)^k \frac{k!}{(z-1)^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z_0) = f'(0) &= -1 \\ f''(0) &= -2 \\ &\vdots \\ f^{(k)}(0) &= -k! \end{aligned}$$

Also haben die Reihenoeffizienten die Form

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{-k!}{k!} = -1$$

und die gesuchte Reihe lautet

$$f(z) = \frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = - \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Sie hat offensichtlich Konvergenzradius 1.

**Satz 9.5** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f$  holomorph und beschränkt durch eine Konstante  $M > 0$  auf dem Rand einer Kreisscheibe

$$K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset U, \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

d.h.  $|f(z)| < M$  für alle  $z \in K_r$  mit  $|z - z_0| = r$ . Dann gilt für die Potenzreihenentwicklung  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$

$$|c_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

**Beweis** Aufgrund der Cauchyformel (8.1), ist

$$\begin{aligned} c_k &\stackrel{(8.1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \\ \Rightarrow |c_k| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right| \\ &\stackrel{(\Delta\text{-Ugl.})}{\leq} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^{k+1}|} dz \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} \underbrace{|f(z)|}_{\leq M} \underbrace{\frac{1}{|z-z_0|^{k+1}}}_{=1/r^{k+1}} dz \\ &\leq \frac{1}{2\pi} M \frac{1}{r^{k+1}} \underbrace{2\pi r}_{\text{Länge d. Kurve } |z-z_0|=r} \\ &= \frac{M}{r^k} \end{aligned}$$

□

**Satz 9.6 (Liouville)** Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion. Außerdem sei  $f$  beschränkt durch eine Konstante  $M > 0$ , d.h.  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  eine konstante Funktion. (Also: beschränkt & ganz  $\Rightarrow$  konstant)

**Beweis** Da die Funktion  $f$  ganz ist, lässt sie sich als Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  entwickeln, welche auf beliebig großen Kreisscheiben  $K_r(0)$  konvergiert. Da  $f$  nach Voraussetzung beschränkt ist, existiert ein  $M \in \mathbb{R}$ , so dass  $|f(z)| < M$  auf dem Rand jeder solchen Kreisscheibe. Nach Satz (9.5) gilt  $|c_k| \leq \frac{M}{r^k}$ . Da wir  $r$  beliebig groß wählen können, muss  $|c_k| = 0$  für alle  $k > 0$  gelten und es ist  $f(z) \equiv c_0$ . □

**Satz 9.7 (Fundamentalsatz der Algebra)** Jedes Polynom in  $\mathbb{C}$  vom Grad  $\geq 1$  hat mindestens eine Nullstelle.

**Beweis** O.B.d.A. sei das Polynom  $P(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \dots + p_0$  vom Grad  $n \geq 1$  normiert, d.h. der führende Koeffizient ist  $p_n = 1$ . Angenommen,  $P(z)$  hätte keine Nullstelle. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \dots + p_0} = \frac{1}{z^n} \frac{1}{1 + p_{n-1}\frac{1}{z} + \dots + p_0\frac{1}{z^n}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{1} = \frac{1}{z^n}$$



holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ , also ganz. Da  $f(z)$  gegen  $\frac{1}{z^n}$  für  $z \rightarrow \infty$  konvergiert, existiert eine Kreisscheibe

$$K_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$$

mit  $R > 0$  so, dass  $|f(z)| < 1$  für  $z \notin K_R$ . Nun ist aber  $K_R$  eine kompakte Menge und  $f(z)$  holomorph und so insbesondere stetig. Also nimmt  $f(z)$  auf  $K_R$  Minimum und Maximum an. Also ist  $f(z)$  auf und außerhalb  $K_R$  beschränkt, also ist sie auch auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt. Da  $f(z)$  auch ganz ist, folgt mit dem Satz von Liouville (9.6), dass  $f(z) \equiv c \in \mathbb{C}$  konstant ist. Dann wäre  $f(z)$  aber ein Polynom vom Grad 0. Widerspruch!  $\square$

## 10 Der Satz von Morera

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Satz von Morera
- Das Spiegelungsprinzip

**Satz 10.1 (Morera)** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen,  $f$  stetig mit

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jede in  $U$  enthaltene Dreiecksfläche mit Randkurve  $\gamma$ . Dann ist  $f$  holomorph.

**Bemerkung** Der Satz von Morera stellt eine Umkehrung des Cauchy'schen Integralsatzes dar und ist ein wichtiges Kriterium um die Holomorphie einer Funktion  $f$  zu zeigen.

**Beweis** Holomorphie ist eine lokale Eigenschaft, also genügt es zu zeigen dass  $f$  für jeden Punkt  $a \in U$  in einer kleinen Umgebung  $U_a$  von  $a$  holomorph ist (d.h.  $f$  muss in jedem Punkt  $z_0 \in U_a$  holomorph sein). Durch verschieben können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $a = 0$  und  $U = U_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ . Seien nun  $z \neq z_0 \in U$  beliebig. Die Punkte  $0, z, z_0$  bilden ein Dreieck, dessen Rand wir wie in Abb. 23 parametrisieren.

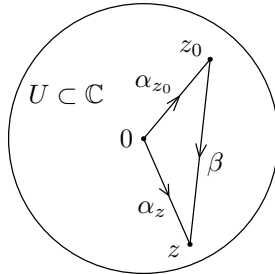


Abbildung 23: Parametrisierung des Dreiecks

Wir zeigen, dass

$$F : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) := \int_{\alpha_z} f(\xi) d\xi$$

holomorph in  $z_0$  ist und  $F'(z) = f(z)$ . Es gilt

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\int_{\alpha_z} f(\xi) d\xi - \int_{\alpha_{z_0}} f(\xi) d\xi}{z - z_0} = \frac{\int_{\beta} f(\xi) d\xi}{z - z_0}$$

da das Integral über den Rand  $\partial D \subset U$  des Dreiecks Null ist, d.h.

$$0 = \int_{\partial D} f(\xi) d\xi = \int_{\alpha_z} f(\xi) d\xi - \int_{\beta} f(\xi) d\xi - \int_{\alpha_{z_0}} f(\xi) d\xi \Leftrightarrow \int_{\alpha_z} f(\xi) d\xi - \int_{\alpha_{z_0}} f(\xi) d\xi = \int_{\beta} f(\xi) d\xi$$

Parametrisiere  $\beta$  als

$$[0, 1] \ni t \mapsto \xi(t) = (1-t)z_0 + tz \in U$$

Damit kann man jetzt das Kurvenintegral  $\int_{\beta} f(\xi) d\xi$  berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\beta} f(\xi) d\xi &= \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) \frac{d\xi}{dt} dt \\ &\stackrel{\left(\frac{d\xi}{dt} = z - z_0\right)}{=} (z - z_0) \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) dt \end{aligned}$$

Daher ist

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) dt \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f(z_0) \quad (f \text{ stetig})$$

Da die Definition von  $F$  unabhängig von dem beliebig gewählten  $z_0 \in U$  war, ist  $F$  holomorph auf  $U$  und  $F' = f$ . Da die Ableitung einer holomorphen Funktion selbst wieder holomorph ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Um den Beweis des nächsten Satzes richtig zu verstehen, brauchen wir noch ein paar Hilfsmittel:

**Definition** (Elstrodt S. 56) Besondere Kurvenintegrale:

$$\int_{\gamma} f|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

$$\int_{\gamma} f d\bar{z} = \int_a^b f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}dt$$

**Satz** (Elstrodt S. 58) Sind  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig differenzierbar,  $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig so gilt:

$$\overline{\int_{\gamma} f dz} = \int_{\gamma} \bar{f} d\bar{z}$$

**Satz 10.2 (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und spiegelsymmetrisch bzgl.  $z \mapsto \bar{z}$ . Setze

$$\begin{aligned} U_1 &:= U \cap H, & H &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \\ U_2 &:= U \cap \bar{H}, & \bar{H} &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\} \\ U_0 &:= U \cap \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ist weiterhin  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig mit  $f|_{U_0}$  reellwertig, sowie auf  $U_1 \setminus U_0$  holomorph, so ist die durch

$$\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & , z \in U_1 \\ \overline{f(\bar{z})} & , z \in U_2 \end{cases}$$

definierte Funktion holomorph.

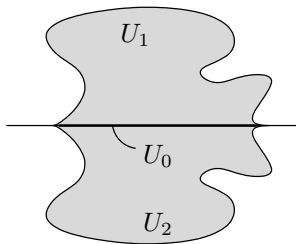


Abbildung 24: Spiegelsymmetrische Menge

**Beweis** Zeige die Holomorphie mittels des Satzes von Morera. Zu zeigen ist also

$$\int_{\partial D} \tilde{f}(z) dz = 0$$

für alle Dreiecke  $D \subset U$ . Unterscheide drei Fälle:

1. Sei ein Dreieck  $D \subset U_1 \setminus U_0$  gegeben. Dann ist die Behauptung klar.

2. Für jedes Dreieck  $D \subset U_2 \setminus U_0$  gilt.

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \tilde{f}(z) dz &= \int_{\partial D} \overline{f(\bar{z})} dz \\ &= \overline{\int_{\partial D} f(\bar{z}) d\bar{z}} \\ &= \overline{\int_{\overline{\partial D}} f(z) dz} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Sei nun also ein Dreieck  $D \subset U$  mit  $D \cap U_1 \neq \emptyset \neq D \cap U_2$  gegeben. Definiere

$$D_1 := D \cap U_1, \quad D_2 := D \cap U_2$$

und betrachte gleich orientierte Randkurven  $\gamma$  von  $D$ ,  $\gamma_1$  von  $D_1$  und  $\gamma_2$  von  $D_2$ . Es gilt

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = \int_{\gamma_1} \tilde{f}(z) dz + \int_{\gamma_2} \tilde{f}(z) dz$$

Um zu zeigen dass diese Integrale verschwinden, betrachten wir für  $\varepsilon > 0$  die Mengen

$$D_i^\varepsilon := D_i \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \geq \varepsilon\} \text{ mit Randkurven } \gamma_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

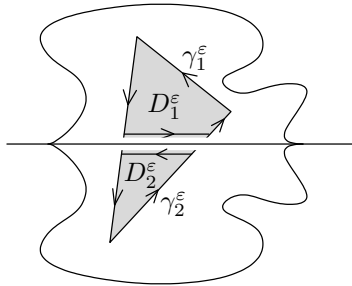


Abbildung 25: Approximation des Dreiecks durch  $D_1^\varepsilon$  und  $D_2^\varepsilon$

Da wir nach 1. & 2. bereits wissen, dass  $\tilde{f}$  auf genügend kleinen Umgebungen von  $D_1$  und  $D_2$  holomorph ist, gilt nach Cauchy, dass

$$\int_{\gamma_i^\varepsilon \subset U_i \setminus U_0} \tilde{f}(z) dz = 0$$

Andererseits ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_i^\varepsilon} \tilde{f}(z) dz = \int_{\gamma_i} \tilde{f}(z) dz = 0$$

denn  $\tilde{f}$  ist stetig auf  $U$ . Also ist

$$\int_{\partial D} \tilde{f}(z) dz = 0.$$

Somit ist  $\tilde{f}$  aufgrund des Satzes von Morera holomorph, da alle Integrale über Randkurven von Dreiecken in  $U$  verschwinden.  $\square$

**Bemerkung** Warum wurde im Beweis im Integral  $d\bar{z}$  verwendet?

- $g_1(z) = f(\bar{z})$  ist nicht holomorph. Z.B. ist  $z \mapsto \bar{z}$  nicht holomorph, aber  $\bar{z} \mapsto \bar{\bar{z}}$ .
- $g_2(z) = \overline{f(z)}$  ist nicht holomorph.
- Aber:  $g_3(z) = \overline{f(\bar{z})}$  ist holomorph. Man sieht das anhand der Potenzreihenentwicklung:

$$\overline{f(\bar{z})} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k} z^k$$

- Sei  $\tau$  die Abbildung  $z \mapsto \bar{z}$  und  $f$  sei holomorph. Dann sind  $f \circ \tau$  und  $\tau \circ f$  nicht holomorph aber  $\tau \circ f \circ \tau$  ist wieder holomorph.

## 11 Nullstellen holomorpher Funktionen

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Def. Ordnung/Vielfachheit einer Nullstelle
- $f$  holomorph um  $z_0$  mit  $f'(z_0) \neq 0$  dann lokal biholomorph
- $f$  holomorph lässt sich lokal um eine  $k$ -fache Nullstelle darstellen als  $(h(z))^k$
- Nullstellen endl. Ordnung einer holo. Funkt. sind isoliert
- Um eine  $k$ -fache nullstelle nimmt  $f$  jeden Wert  $k$ -mal an.

**Definition 11.1 (Vielfachheiten von Nullstellen)** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, holomorph sowie  $z_0 \in U$  mit  $f(z_0) = 0$ . Die Nullstelle  $z_0$  heißt einfach, falls  $f'(z_0) \neq 0$ . Allgemein nennt man die kleinste natürliche Zahl  $k \in \mathbb{N}$  mit  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$  die Ordnung oder Vielfachheit der Nullstelle. Existiert ein solches natürliches  $k$  nicht, sagt man auch, die Ordnung ist unendlich.

**Satz 11.1 (Lokale Invertierbarkeit)** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, holomorph und es existiere ein  $z_0 \in U$  mit  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann ist  $f$  um  $z_0$  lokal biholomorph, d.h. es existiert eine holomorphe Inverse.

**Bemerkung** Der Satz gilt unabhängig davon, ob  $f(z_0) = 0$  oder nicht. Wichtig ist nur, dass  $f'(z_0) \neq 0$  ist.

**Beweis** Betrachte  $f$  als Funktion vom  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Dann lässt sich der aus Analysis II bekannte Satz über inverse Funktionen anwenden. Also existieren  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen mit  $z_0 \in U$  sowie  $V \subset \mathbb{R}^2$  offen mit  $f(z_0) = w_0 \in V$  so, dass  $f : U \rightarrow V$  bijektiv und  $g = f^{-1} : V \rightarrow U$  differenzierbar mit  $g(w_0) = z_0$  ist. Für die Jakobimatrix  $J_g$  von  $g$  gilt

$$J_g = (J_f)^{-1}$$

Dies sieht man, wenn man  $g(f(z)) = z$  mit der Kettenregel differenziert:

$$J_g J_f = Id$$

Setze jetzt

$$z := x + iy, \quad w := u + iv = f(z) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad g := g_1 + ig_2$$

Damit ist

$$\begin{aligned} J_f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow J_g = (J_f)^{-1} &= \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um die Holomorphie von  $g$  zu zeigen, müssen wir die Cauchy-Riemann'schen Gleichungen (2.1) für  $g$  zeigen:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = -\frac{\partial g_2}{\partial x}$$

Rechnet man das aus, sieht man, dass sie äquivalent zu denen von  $f$  sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Da  $f$  holomorph ist, gelten diese und somit ist auch  $g$  holomorph. □

**Satz 11.2 (Lokale Darstellung holomorpher Funktionen)** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, holomorph mit einer  $k$ -fachen Nullstelle  $z_0 \in U$  gegeben. Dann gibt es in einer offenen Umgebung  $U_0 \subset U$  von  $z_0$  eine holomorphe Funktion  $h : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$  mit einer einfachen Nullstelle bei  $z_0$  so, dass

$$f(z) = (h(z))^k, \quad \forall z \in U_0$$

**Beweis** O.B.d.A. sei  $z_0 = 0$ . Betrachte die Potenzreihenentwicklung von  $f$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Da für die Koeffizienten der Potenzreihe nach dem Satz von Goursat (9.2)

$$c_l = \frac{f^{(l)}(0)}{l!}$$

gilt und  $z_0 = 0$  eine  $k$ -fache Nullstelle ist, folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n \\ &= z^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} c_n z^{n-k}}_{=:g(z)} \end{aligned}$$

$g$  ist als Potenzreihe natürlich holomorph und es gilt insbesondere  $g(0) \neq 0$  (sonst wäre  $z_0 = 0$  eine Nullstelle von Ordnung mindestens  $k+1$ ). Die Idee ist jetzt, das gesuchte  $h$  als

$$h(z) = z \sqrt[k]{g(z)}$$

zu definieren. Die  $k$ -ten Wurzeln einer komplexen Zahl  $w = r e^{i\theta}$  sind dabei definiert als

$$\left( \sqrt[k]{w} \right)_{l=0, \dots, k-1} = \sqrt[k]{r} e^{i \frac{\theta}{k} + \frac{2\pi i}{k} l}$$

Sei nun  $z_w$  eine der  $k$ -ten Wurzeln von  $g(0) \neq 0$ . Die Funktion  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(z) = z^k$  ist holomorph mit  $\varphi'(z) \neq 0$  für alle  $z \neq 0$ . Also ist  $\varphi$  insbesondere nach Satz (11.1) an den  $k$ -ten Wurzeln von  $g(0) \neq 0$  lokal biholomorph und es existieren offene Umgebungen  $U_w$  von  $z_w$  und  $V$  von  $g(0)$  so dass  $\varphi^{-1} : V \rightarrow U_w$  biholomorph ist.

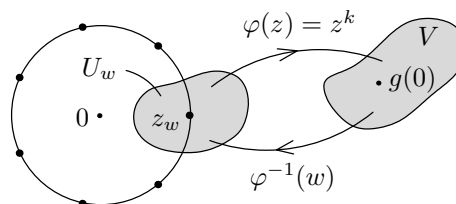


Abbildung 26: Die Funktion  $\varphi = z^k$  bildet die  $k$ -ten Wurzeln von  $g(0)$  auf  $g(0)$  ab. In einer kleinen Umgebung um eine beliebige Wurzel  $z_w$  ist sie biholomorph.

Definiere jetzt

$$h(z) := z \cdot \varphi^{-1}(g(z))$$

Dann ist  $h$  holomorph und hat eine einfache Nullstelle bei  $z = 0$ , denn es ist  $h'(0) = \varphi^{-1}(g(0)) = w \neq 0$ . Also ist  $h$  die gesuchte Funktion:

$$\begin{aligned} (h(z))^k &= z^k(\varphi^{-1}(g(z)))^k \\ &\stackrel{id=(\varphi^{-1})^k}{=} z^k g(z) \\ &= f(z) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung** Für  $k > 1$  ist die Funktion  $h(z)$  nicht eindeutig, da wir willkürlich auswählen welche Wurzel  $z_w$  wir betrachten.

**Korollar 11.3** Nullstellen endlicher Ordnung einer holomorphen Funktion  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, sind isoliert. D.h. ist  $f(z_0) = 0$  für ein  $z_0 \in U$ , so existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $z_0$  so, dass  $f(z) \neq 0$  für alle  $z \in U \setminus \{z_0\}$ .

**Beweis** Stelle  $f$  nach Satz (11.2) dar als  $f(z) = (h(z))^k$ . Dann hat  $h$  eine einfache Nullstelle in  $z_0$ , d.h.  $h'(z_0) \neq 0$ . Nach Satz (11.1) existiert dann eine Umgebung  $U_0$  um  $z_0$ , so dass  $h(z)$  biholomorph, also insbesondere injektiv ist. Also ist  $h(z) \neq 0 \forall z \in U_0 \setminus z_0$ . □

**Bemerkung** Das Korollar besagt, dass holomorphe Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit Nullstellen endlicher Ordnung nicht auf ganz  $U$  verschwinden. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass auf zusammenhängenden Mengen auch die Umkehrung gilt: Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf einer offenen und zusammenhängenden Menge  $U$ , und habe eine unendliche Nullstelle, dann ist die Funktion  $f \equiv 0$ . Oder allgemeiner: unendliche Nullstellen liegen nicht isoliert.

**Korollar 11.4 (Blätterzahl einer Nullstelle)** Sei  $z_0 \in U$  eine  $k$ -fache Nullstelle einer holomorphen Funktion  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Dann gibt es Umgebungen  $U_0$  von  $z_0$  und  $V_0$  von  $0$ , so dass  $f$  jeden Wert aus  $V_0 \setminus 0$  genau  $k$ -mal in  $U_0$  annimmt. D.h. für alle Werte  $w \in V_0 \setminus 0$  existieren genau  $k$  Stellen  $z_1, \dots, z_k \in U_0$  mit  $f(z_l) = w, l = 1, \dots, k$ .

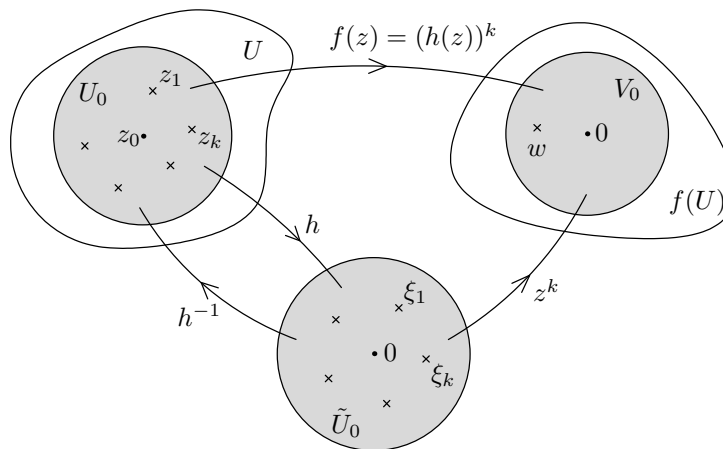


Abbildung 27: Auf  $U_0$  lässt sich  $f(z)$  als  $(h(z))^k$  darstellen, wobei  $h : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$  biholomorph ist.  $\tilde{U}_0$  wiederum wird von  $z^k$  auf  $V_0$  abgebildet, so dass alle  $w \in V_0 \setminus 0$  genau  $k$  Urbilder  $\xi_1 \dots \xi_k$  in  $\tilde{U}_0$  besitzen. Demnach bildet  $f$  die paarweise verschiedenen Stellen  $z_1 \dots z_k$  alle auf  $w$  ab.

**Beweis** Schreibe  $f(z)$  nach Satz (11.2) lokal um  $z_0$  als

$$f(z) = (h(z))^k, \quad \begin{aligned} h : U_0 &\rightarrow \tilde{U}_0 \\ h(z_0) &= 0, h'(z_0) \neq 0 \end{aligned}$$



$h(z)$  hat dann in  $z_0$  eine einfache Nullstelle, und wenn wir  $U_0$  klein genug wählen ist  $h$  nach Satz (11.1) biholomorph. Weiterhin wissen wir von der Abbildung  $z \mapsto z^k$ , dass jedes  $w \in V_0 \setminus 0$  genau  $k$  Urbilder  $\xi_1, \dots, \xi_k$  in  $\tilde{U}_0$  hat (die  $k$ -ten Wurzeln von  $w$ ). Definiere

$$z_l := h^{-1}(\xi_l), \quad l = 1, \dots, k$$

Man erhält also  $k$  paarweise verschiedene Punkte mit  $f(z_l) = w, l = 1, \dots, k$ . □

## 12 Identitätssatz und Maximumsprinzip

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Zwei holo. Funktionen  $f, g$  stimmen auf  $T \subset G$  mit Häufungspunkt überein  $\Rightarrow f \equiv g$  auf ganz  $G$
- Satz über Gebietstreue
- Maximumprinzip
- Schwarz'sches Lemma
- $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, auf  $G \setminus M$ ,  $M$  diskret, holo  $\Rightarrow f$  auf  $G$  holo.

**Definition 12.1 (Gebiet)** Eine Menge  $G \subset \mathbb{C}$  heißt Gebiet, falls sie offen und zusammenhängend ist.

**Satz 12.1 (Identitätssatz)** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet sowie  $T \subset G$  eine Teilmenge von  $G$  mit einem Häufungspunkt in  $G$ . Gilt für zwei holomorphe Funktionen  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$f|_T = g|_T$$

so folgt bereits

$$f \equiv g$$

auf  $G$ .

**Beweis** Sei  $z_0 \in G$  ein Häufungspunkt von  $T$ . Die Funktion  $h := f - g$  ist holomorph in  $z_0$ . Die Funktion  $h$  hat nach Konstruktion in  $z_0$  eine Nullstelle unendlicher Ordnung, denn angenommen diese Nullstelle hätte nur endliche Ordnung, dann wäre sie nach Korollar (11.3) isoliert. Nach Voraussetzung ist jedoch  $z_0$  ein Häufungspunkt von Nullstellen. Also ist die Menge  $M$  der Nullstellen unendlicher Ordnung von  $h$  nicht leer. Es gilt

- $M$  ist offen: Wir können  $h$  in jedem Punkt  $y \in M$  in eine Potenzreihe entwickeln (die Differenz der Potenzreihen von  $f$  und  $g$ ). Diese Potenzreihe ist identisch Null, da  $y$  eine Nullstelle unendlicher Ordnung ist, und sie konvergiert auf einer offenen Menge  $K \subset U$  gegen  $h$ . Demnach ist  $h|_K \equiv 0$ , d.h.  $K \subset M$ . Also ist  $M$  offen.
- $M$  ist abgeschlossen  $\Leftrightarrow G \setminus M$  ist offen: Sei  $y \in G \setminus M$  mit  $h(y) \neq 0$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $U_y$  um  $y$ , so dass  $h(z) \neq 0 \forall z \in U_y$ , da  $h$  stetig ist. Sei nun  $h(y) = 0$ . Dann ist die Nullstelle endlich, weil sonst  $y \in M$  wäre. Nach Satz (11.2) gibt es eine offene Umgebung  $U_y$  von  $y$ , auf der sich  $h$  als  $\tilde{h}^k$  darstellen lässt und in der keine weitere Nullstelle von  $h$  liegt. Demnach ist  $G \setminus M$  offen und  $M$  somit auch abgeschlossen.

Da also  $M \neq \emptyset$  gleichzeitig offen und abgeschlossen ist, folgt  $M = G$  da  $G$  zusammenhängend ist. Also ist  $h \equiv 0$  auf ganz  $G$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 12.2** Seien  $f, g$  holomorphe Funktionen auf einem Gebiet  $G$  mit  $f^{(m)}(z_0) = g^{(m)}(z_0) \forall m \geq 0$ . Dann gilt  $f \equiv g$  auf ganz  $G$ . Insbesondere gilt für eine auf einem Gebiet definierte holomorphe Funktion  $h$  mit einer unendlichen Nullstelle  $h \equiv 0$ .

**Beweis** Im Beweis von Satz (12.1) haben wir bereits verwendet, dass eine holomorphe Funktion  $h$  mit einer unendlichen Nullstelle in  $z_0$  in einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  verschwindet,  $h|_U \equiv 0$ . Nach dem Identitätssatz ist dann  $h \equiv 0$ .

$h = f - g$  hat an der Stelle  $z_0$  eine unendliche Nullstelle. Also  $h \equiv 0$  auf ganz  $G$  und  $f \equiv g$ .  $\square$

**Beispiel 12.1 (Teilmengen mit und ohne Häufungspunkte)** Teilmengen eines Gebiets  $G$  mit Häufungspunkt in  $G$  sind z.B. eine Kurve oder eine Folge in  $G$ . Keinen Häufungspunkt in  $G$  besitzt dagegen z.B. eine Folge in  $G$ , welche nur einen Häufungspunkt auf dem Rand von  $G$  besitzt.

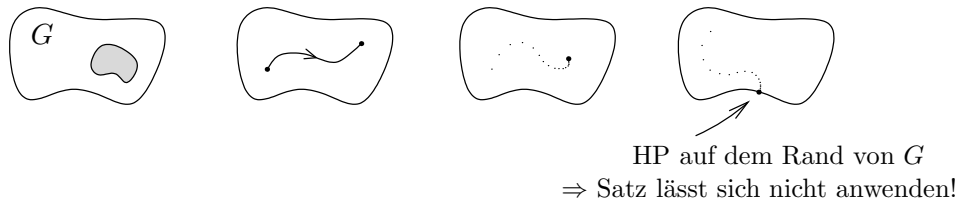


Abbildung 28: Zum Identitätssatz

**Satz 12.3 (Gebietstreue)** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G$  ist ein Gebiet, holomorph und nicht konstant. Dann ist auch  $f(G)$  ein Gebiet.

**Beweis 1.** zu zeigen: Zusammenhang von  $f(G)$ :  $f$  ist holomorph, also insbesondere stetig. Also erhält  $f$  Zusammenhang, d.h.  $f(G)$  ist schon mal zusammenhängend.

**2.** zu zeigen:  $f(G)$  ist offen: Sei  $z_0 \in G$ , setze  $w_0 := f(z_0)$ . Dann hat  $f(z) - w_0$  eine Nullstelle endlicher Ordnung (denn  $f \neq \text{const}$ ) in  $z_0$ . Mit Korollar (11.3) folgt die Behauptung. ( $\exists \varepsilon > 0$ ,  $\forall |w - w_0| < \varepsilon \exists z \in U, f(z) = w$ . d.h. um jeden Punkt  $w_0 \in f(G)$  gibt es eine offene Umgebung  $\subset f(G)$ ).  $\square$

**Satz 12.4 (Maximumsprinzip)** Sei  $G$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \neq \text{const}$ , holomorph. Dann hat  $f$  in  $G$  kein Betragsmaximum, d.h. es existiert kein  $z_0 \in G$  so, dass

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in G$$

**Beweis** Angenommen, es existiert  $z_0 \in G$  so, dass  $|f(z_0)| \geq |f(z)|$  für alle  $z \in G$ . Dann ist

$$f(G) \subset K_{R:=|f(z_0)|} := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq R\} \subset \mathbb{C}$$

Nach Satz (12.3) ist  $f(G)$  ein Gebiet, also offen. Aber für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$K_\varepsilon(f(z_0)) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - f(z_0)| < \varepsilon\} \not\subset K_R \Rightarrow K_\varepsilon(f(z_0)) \not\subset f(G)$$

d.h.  $f(G)$  ist nicht offen. Widerspruch!  $\square$

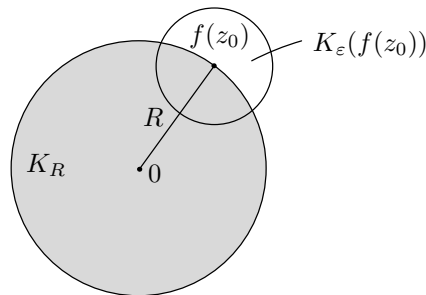


Abbildung 29: Das Betragsmaximum liegt auf dem Rand und wird nicht angenommen.

**Bemerkung** Das Maximumsprinzip ist auch eine lokale Eigenschaft, denn hätte  $f$  ein Betragsmaximum auf  $U \subset G$  offen, wählt man einfach  $U$  als Gebiet und erhält einen Widerspruch.

**Korollar 12.5** Sei  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G$  Gebiet,  $f$  sei stetig und nicht konstant auf  $\overline{G}$ . Weiter sei  $f$  holomorph auf  $G$ . Dann existiert ein  $z_0 \in \partial G$  so, dass

$$|f(z_0)| > |f(z)| \quad \forall z \in G$$

**Beweis** Da  $\overline{G}$  kompakt und  $f$  stetig ist, existiert ein  $z_0 \in \overline{G}$  so, dass  $|f|$  dort ein Maximum annimmt. Da aufgrund des Maximumsprinzips (12.4)  $z_0 \notin G$  folgt  $z_0 \in \partial G$ .  $\square$

**Bemerkung** Interessiert man sich für die Minima von  $|f|$ , so kann man, falls  $|f|$  keine Nullstellen hat, einfach die Maxima von  $|\frac{1}{f}|$  betrachten. Also liegen auch die Betragsminima, falls  $|f|$  keine Nullstellen hat, auf dem Rand. Über den Fall, dass  $f$  eine Nullstelle besitzt, haben wir schon mehrere Aussagen getroffen.

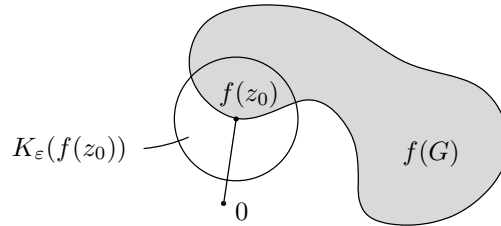


Abbildung 30: Wenn  $f$  keine Nullstelle besitzt, wird auch das Betragsminimum nicht angenommen.

**Satz 12.6 (Schwarz'sches Lemma)** Es sei  $f : E \rightarrow E$  eine holomorphe Funktion mit  $f(0) = 0$ , wobei  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  den offenen Einheitskreis bezeichne. Dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1, \quad |f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in E.$$

Ist darüber hinaus  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \neq 0$ , so ist

$$f(z) = z \cdot e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

**Beweis** Es ist  $f(0) = 0$ , außerdem ist  $f(z)$  holomorph. Entwickelt man  $f(z)$  als Potenzreihe um 0, so sieht man wegen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \stackrel{(f(0)=0)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k = z \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1}$$

dass man  $f(z)$  darstellen kann als  $f(z) = zg(z)$  mit  $g(z)$  holomorph. Für alle  $z \in E$  ist  $r = |z| < 1$ . Es gilt aufgrund der Voraussetzung  $|f(z)| < 1$

$$|f(z)| = |zg(z)| = r|g(z)| < 1 \Rightarrow |g(z)| < \frac{1}{r}$$

Mit dem Satz über die Maximumannahme auf dem Rand erhalten wir

$$\forall z \in E: |z| \leq r : \quad |g(z)| < \frac{1}{r}$$

Da  $r < 1$  beliebig gewählt werden kann folgt  $|g(z)| \leq 1$  für alle  $z \in E$ . Mit der Produktregel sieht man  $f'(0) = g(0)$  und aufgrund der Definition von  $g$  erhalten wir wie behauptet

$$|f(z)| \leq |z|, \quad |f'(0)| \leq 1$$

Jetzt zum Fall, dass Gleichheit an einer Stelle  $z_0 \in E$ ,  $z_0 \neq 0$  auftritt. Dann ist  $|g(z)|$  maximal in  $z_0$ . Dann folgt mit dem Maximumsprinzip (12.4)  $g \equiv \text{const}$  und somit

$$f(z) = \underbrace{a}_{\in \mathbb{C}} z \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow f(z) = e^{i\theta} z, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$\square$

**Definition 12.2 (Diskrete Menge)** Eine Teilmenge  $D \subset M$  heißt diskret in  $M$ , falls es für alle  $a \in M$  eine Umgebung  $U$  von  $a$  gibt, so dass  $U$  höchstens einen Punkt aus  $D$  enthält. D.h.  $|U \cap D| \leq 1$ .

**Satz 12.7** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Ist  $M \subset G$  eine diskrete Menge und  $f : G \setminus M \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so ist auch  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.

**Beweis** (Vergleiche mit dem Beweis des allgemeinen Cauchy-Satzes)

Zu zeigen ist, dass  $f$  in jedem Punkt  $z_0 \in M$  holomorph ist. Wir benutzen den Satz von Morera.

Sei also  $z_0 \in M$ . Wir wählen  $\rho > 0$ , so dass  $K_\rho(z_0) \subset G$  und  $K_\rho(z_0) \cap M = \{z_0\}$ .  $\Rightarrow f|_{K_\rho(z_0) \setminus z_0}$  ist holomorph, ausserdem ist  $f$  in  $z_0$  stetig.

**z.z.** Für jedes abgeschlossene Dreieck  $\Delta \subset K_\rho(z_0)$  gilt:  $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$ .

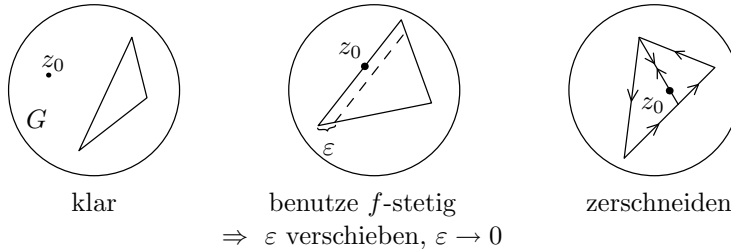


Abbildung 31: Skizze zur Beweisidee

1. Fall:  $z_0 \notin \Delta \subset K_\rho(z_0)$ . Dann ist das Integral gleich 0, weil die Funktion dort holomorph ist.
2. Fall: Sei  $z_0 \in \partial\Delta \subset K_\rho(z_0)$ . Betrachte Dreiecke  $\Delta_\varepsilon$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_\varepsilon = \Delta$  mit Randkurven  $\gamma_\varepsilon$  und  $z_0 \notin \Delta_\varepsilon \forall \varepsilon$ . Es gilt:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f dz = 0$$

$$\stackrel{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} \int_{\gamma} f dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f dz = 0$$

3. Fall:  $z_0 \in \Delta \subset K_\rho(z_0)$ . Teile das Dreieck in zwei Teildreiecke auf, so dass  $z_0 \in \partial\Delta_1$  und  $z_0 \in \partial\Delta_2 \rightsquigarrow$  2. Fall.

Nach dem Satz von Morera ist  $f|_{K_\rho(z_0)}$  holomorph. □

## 13 Isolierte Singularitäten

Was wir in diesem Kapitel lernen werden:

- Def.: isolierte Singularität, hebbar, Pol, wesentlich
- Def. meromorph, Charakterisierung de. isolierten Singularitäten
- Menge der meromorphen Funktionen auf Gebiet  $G$  bilden einen Körper

**Definition 13.1 (Singularität: isoliert, hebbar, wesentlich; Pol)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $D := U \setminus \{z_0\}$ . Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so heißt  $z_0$  Singularität von  $f$ . Existiert eine offene Umgebung  $B \subset U$  von  $z_0$  so, dass  $f$  keine weitere Singularität in  $B$  hat, spricht man von einer isolierten Singularität. Eine isolierte Singularität  $z_0$  nennt man

- hebbar, wenn es eine holomorphe Funktion

$$\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \tilde{f}|_D = f|_D$$

gibt

- einen Pol, wenn  $z_0$  nicht hebbar ist und ein  $m \in \mathbb{N}$  so existiert, dass

$$(z - z_0)^m f(z)$$

eine hebbare Singularität in  $z_0$  hat. Das kleinste solche  $m$  heißt Ordnung des Pols.

- wesentlich, wenn  $z_0$  weder hebbar noch ein Pol ist.

### Beispiel 13.1 (Singularitäten)

- Ist  $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, holomorph, so hat  $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $z_0 \in U$  beliebig eine hebbare Singularität in  $z_0$ .
- Die Funktionen  $z \mapsto z$ ,  $z \mapsto \sin z$  sind ganze Funktionen, also ist

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

holomorph. Die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0 \end{cases}$$

ist nach Satz (12.7) holomorph, da sie auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph und auf ganz  $\mathbb{C}$  stetig ist. Sie erfüllt

$$f|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} = \tilde{f}|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$$

Also hat  $f$  eine hebbare Singularität in  $z_0 = 0$ .

- Sei  $g : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, holomorph. Weiter sei  $z_0 \in U$ ,  $g(z_0) \neq 0$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Dann hat

$$f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $m$ .

- Betrachte  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ .  $f$  hat eine isolierte Singularität in  $z_0 = 0$ . Da

$$|z^m e^{\frac{1}{z}}| \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$$

ist  $z_0$  kein Pol. Weiter ist

$$\left| e^{\frac{1}{z}} \right| = \left| e^{\frac{\bar{z}}{|z|^2}} \right| \stackrel{(z:=x+iy)}{=} \left| e^{\frac{x-iy}{|z|^2}} \right| = e^{\frac{x}{|z|^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

und damit der  $\lim_{z \rightarrow 0}$  nicht eindeutig. Also ist  $z_0$  nicht hebbar. Also ist  $z_0$  eine wesentliche Singularität.

**Bemerkung** Um isolierte Singularitäten komplexer Funktionen zu veranschaulichen, kann man sie auf Geraden einschränken und wie reelle Funktionen betrachten.

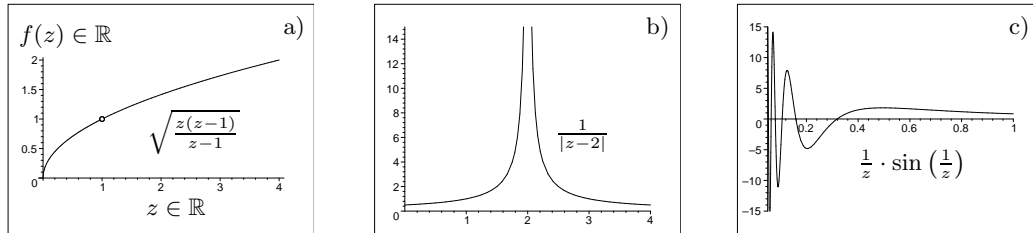


Abbildung 32: Veranschaulichung isolierter Singularitäten: a) hebbar, b) Pol, c) wesentlich.

**Definition 13.2 (Meromorphe Funktionen)** Sei  $f : \mathbb{C} \supset U \setminus \{z_0, z_1, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, holomorph. Sind die isolierten Singularitäten  $z_0, z_1, \dots$  alle hebbar oder Pole (also nicht wesentlich), so nennt man  $f$  meromorph.

**Bemerkung** Holomorphe Funktionen sind meromorph.

**Beispiel 13.2 (Meromorphe Funktionen)**

- Sei  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann ist

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}, \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

meromorph. Z.B. hat

$$\frac{\sin z}{z - 1}$$

einen Pol der Ordnung 1 in  $z_0 = 1$  und ist meromorph.

- Hauptbeispiele für meromorphe Funktionen sind Funktionen der Form

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

als Quotient holomorpher Funktionen  $g, h : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen. Dabei habe  $g$  nur Nullstellen endlicher Ordnung.

**Lemma 13.1** Seien  $h, g : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen, holomorph mit einer Nullstelle  $z_0 \in U$  der Ordnung  $m$  bzw.  $n$ . Dann ist

$$f = \frac{h}{g} : U \rightarrow \mathbb{C}$$

eine meromorphe Funktion mit einer isolierten Singularität in  $z_0$ . Diese Singularität ist

- ein Pol der Ordnung  $n - m$  falls  $n > m$
- eine hebbare Singularität falls  $n \leq m$ .

Inbesondere ist im Falle  $n < m$   $z_0$  eine Nullstelle der Fortsetzung mit Ordnung  $k = m - n$ .

**Beweis** Betrachtet man Potenzreihenentwicklungen von  $h, g$  und die Definition von Nullstellen  $m$ -ter Ordnung, so sieht man, dass man  $h, g$  als

$$h(z) = (z - z_0)^m \tilde{h}(z), \quad g(z) = (z - z_0)^n \tilde{g}(z) \text{ mit } \tilde{h}, \tilde{g} \text{ holomorph und } \tilde{h}(z_0), \tilde{g}(z_0) \neq 0$$

darstellen kann. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^{m-n} \underbrace{\frac{\tilde{h}(z)}{\tilde{g}(z)}}_{\neq 0, \neq \infty}$$

Jetzt sieht man leicht die Behauptungen. □

**Definition 13.3** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann bezeichnet

$$\mathcal{M}(G)$$

die Menge der meromorphen Funktionen auf  $G$ .

**Lemma 13.2** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet weiter seien  $f, g \in \mathcal{M}(G)$ . Dann ist

$$f + g \in \mathcal{M}(G), \quad f \cdot g \in \mathcal{M}(G)$$

**Beweis** Hier nur die Idee: Schwierig sind nur die Punkte, in denen sowohl  $f$  als auch  $g$  einen Pol haben. Sei  $z_0 \in G$  ein solcher Punkt mit  $m$  als Ordnung des Pols von  $f$  und  $n$  als Ordnung des Pols von  $g$  in  $z_0$ . Dann ist auch  $z_0$  auch Polstelle von  $f + g$  mit Ordnung  $\leq \max\{m, n\}$  und von  $f \cdot g$  mit Ordnung  $m + n$ . □

**Satz 13.3** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann ist  $\mathcal{M}(G)$  ein Körper bzgl.  $+/\cdot$ .

**Beweis** Ohne Beweis. □

**Bemerkung** Wir müssen fordern, dass  $G$  ein Gebiet, bzw. zusammenhängend ist. Sonst wären in  $\mathcal{M}(G)$  meromorphe Funktionen enthalten, welche auf manchen Zusammenhangskomponenten verschwinden aber auf anderen nicht. Diese Funktionen wären in dem Körper nicht das neutrale Element der Addition, aber sie besäßen auch keine meromorphe Inverse.



## 14 Laurentreihen

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Definition: Laurentreihe, Hauptteil, Nebenteil.
- $f$  meromorph hat Stammfunktion  $\leftrightarrow c_{-1} = 0$
- Laurentreihe kann gliedweise abgeleitet und integriert werden
- konvergiert eine Laurentreihe gegen eine Funktion, so gilt  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$
- Ist  $f : K_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann ist sie dort in Laurentreihe entwickelbar
- Falls  $f$  beschränkt auf  $z : |z - z_0| = \xi$ , so gilt  $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$
- Riemann'scher Hebbarkeitssatz:  $f$  auf  $K_{0,R}(z_0)$  holomorph und beschränkt  $\Rightarrow z_0$  ist hebbare Singularität
- Casorati-Weierstraß: Sei  $f$  holomorph auf  $U \setminus \{z_0\}$ ,  $z_0$  wesentliche Singularität. Dann ist das Bild jeder punktierten  $\varepsilon$ -Scheibe um  $z_0$  unter  $f$  dicht in  $\mathbb{C}$

**Definition 14.1 (Laurentreihe)** Eine Laurentreihe um  $z_0 \in \mathbb{C}$  ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

oder genauer gesagt die Summe zweier Reihen, dem Hauptteil und dem Nebenteil

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

Die Laurentreihe konvergiert genau dann, wenn beide Reihen, also Haupt- und Nebenteil konvergieren (analoges gilt natürlich für absolute Konvergenz, etc).

### Bemerkung

- Zur Schreibweise des Hauptteils:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

- Haupt- und Nebenteil tragen ihre Namen aufgrund ihrer Größe in der Nähe von  $z_0$ .
- Der Nebenteil ist eine Potenzreihe in  $z - z_0$ , der Hauptteil eine in  $\frac{1}{z - z_0}$ .

Aus den Konvergenzradien des Haupt- und Nebenteils können wir direkt den Bereich ableiten in dem eine Laurentreihe konvergiert:

**Satz 14.1** Sei  $\frac{1}{r}$  der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^n \quad (\rightsquigarrow \text{Hauptteil})$$

und  $R$  der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (\rightsquigarrow \text{Nebenteil})$$

Dann konvergiert die Laurentreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

für alle  $z \in K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$  und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.

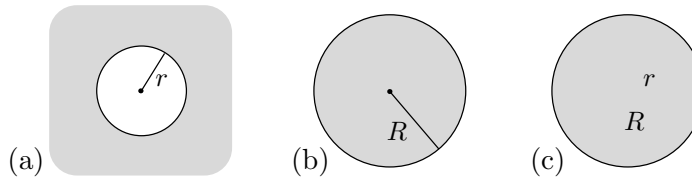


Abbildung 33: (a) Der Hauptteil konvergiert außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius  $\frac{1}{r}$ . (b) Der Nebenteil konvergiert innerhalb der offenen Kreisscheibe mit Radius  $R$ . (c) Die Laurentreihe konvergiert folglich auf dem Kreisring  $K_{r,R}$ .

**Beweis**  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^n$  konvergiert  $\forall z : |z - z_0| < \frac{1}{r} \Leftrightarrow$  konvergiert  $\forall z : \frac{1}{|z - z_0|} > r$   
 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$  konvergiert  $\forall z : |z - z_0| > r.$   $\square$

**Bemerkung** Im Falle  $r > R$  konvergiert die Laurentreihe nirgendwo.

#### Korollar 14.2

1. Laurentreihen kann man in ihrem Konvergenzring  $K_{r,R}(z_0)$  gliedweise differenzieren.
2. Ist  $c_{-1} = 0$  so hat die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

die Stammfunktion

$$F(z) = \sum_{n=-\infty, n \neq -1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

d.h.  $F(z)$  ist holomorph auf  $K_{r,R}(z_0)$  und es gilt  $F'(z) = f(z)$ .

**Beweis** O.B.d.A. sei  $z_0 = 0$ .

1. Ist klar, da man sowohl Haupt- als auch Nebenteil als Potenzreihen gliedweise differenzieren kann, Satz (3.3).
2. Sei  $\rho \in (r, R)$ . Ist  $n \neq -1$ , so ist

$$\int_{|z|=\rho} z^n dz = 0$$

Im Fall  $n \geq 0$  ist nämlich  $z^n$  holomorph für  $|z| < R$  und man kann den Cauchy'schen Integralsatz (7.3) anwenden. Im Falle  $n \leq -2$  ist  $(z)^n$  holomorph auf  $|z| > r$ . Man benutzt dann den

Cauchy'schen Integralsatz für die Funktion mit  $w = \frac{1}{z}$ .  
 Man kann aber auch einfach nachrechnen. Mit  $z = \rho e^{it}$  ist

$$\begin{aligned} \int_{|z|=\rho} z^n dz &= \int_0^{2\pi} \rho^n \rho e^{int} i e^{it} dt \\ &= i \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it} dt \\ &= \begin{cases} i \rho^{n+1} \frac{e^{(n+1)it}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0 & , n \neq -1 \\ i \rho^0 t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i & , n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{|z|=\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n dz = 2\pi i c_{-1}$$

und es kann im Falle  $c_{-1} \neq 0$  keine Stammfunktion geben, da dann das Integral über die geschlossene Kurve  $|z| = \rho$  Null ergeben müsste ( $\int_{\gamma: |z|=\rho} f(z) dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0))$ ). Ist dagegen  $c_{-1} = 0$  so ist

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$$

eine Stammfunktion von  $f$ , denn nach 1. kann ja gliedweise differenziert werden.

□

**Lemma 14.3 (Cauchyformel für die Koeffizienten der Laurentreihe)** *Konvergiert die Laurentreihe  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  in einem Kreisring um  $z_0$ , also für  $r < |z - z_0| < R$ , und stellt dort die Funktion  $f$  dar, so gilt*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \rho \in (r, R)$$

**Beweis** O.B.d.A. sei  $z_0 = 0$ . Wie im Beweis zu Korollar (14.2) sieht man, dass  $\int_{|\xi|=\rho} c_n \xi^n d\xi = 0$  für  $n \neq -1$ . Also ist

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi &= \int_{|\xi|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \xi^{k-(n+1)} d\xi \\ &= \int_{|\xi|=\rho} c_n \xi^{n-(n+1)} d\xi \\ &= 2\pi i c_n \end{aligned}$$

□

**Beispiel 14.1** Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \underbrace{-\frac{1}{z}}_{\text{Hauptteil für } z_0=0} + \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{Nebenteil für } z_0=0}$$

Sie hat Pole in  $z = 0$  und  $z = 1$ . Stelle  $f$  als Laurentreihe um  $z_0 = 0$  dar. Für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  ist

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow f(z) = -\underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Hauptteil für } z_0=0} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}_{\text{Nebenteil für } z_0=0}$$

Analog kann man  $\frac{1}{z}$  als Potenzreihe um  $z - 1$  entwickeln und  $f$  um  $z = 1$  darstellen.

## Die Laurentreihenentwicklung

**Satz 14.4** Sei  $f : K_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Dabei ist  $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ . Dann gilt für jedes  $z \in K_{r,R}(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall \rho \in (r, R)$$

**Beweis** O.B.d.A. sei  $z_0 = 0$ . Sei  $z \in K_{r,R}(0)$ . Dann existiert für ein  $\varepsilon > 0$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung im Konvergenzring  $K_\varepsilon(z) \subset K_{r,R}(0)$ . Dort gilt aufgrund der Cauchyformel (8.1)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\beta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\xi| = R - \delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{|\xi| = r + \delta} \frac{f(\xi)}{z - \xi} d\xi \right) \end{aligned}$$

Da

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}}}_{|\cdot| < 1} = \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^k, \quad \frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\xi}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{z}\right)^k$$

für  $|\xi| = R - \delta$  bzw.  $|\xi| = r + \delta$  gilt, erhalten wir als Nebenteil

$$\frac{1}{2\pi i} \int \sum_{k=0}^{\infty} z^k \xi^{-k-1} f(\xi) d\xi$$

und für den Hauptteil

$$\frac{1}{2\pi i} \int \sum_{k=0}^{\infty} z^{-1-k} \xi^k f(\xi) d\xi.$$

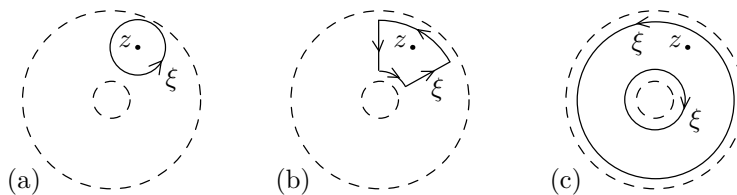


Abbildung 34: (a) Zuerst  $f(z)$  als  $\xi$ -Integral mittels Cauchyformel darstellen, dann den Integrationsweg des  $\xi$ -Integrals in zwei Schritten (b) und (c) mittels des Cauchy'schen Integralsatzes verändern.

□

**Korollar 14.5** Sei  $f : K_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion,  $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ , mit Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Existieren eine Konstante  $M < \infty$  und ein  $\rho \in (r, R)$  so, dass

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = \rho$$

so gilt

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

**Beweis** Ohne Beweis, wie bei Potenzreihenentwicklung. □

**Beispiel 14.2 (Anwendung auf isolierte Singularitäten)** Betrachte die punktierte Kreisscheibe

$$K_{0,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}, \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

Sei  $f : K_{0,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann hat  $f$  eine isolierte Singularität in  $z_0$ . Sei

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

die Laurententwicklung von  $f$ . Dann ist  $z_0$

- eine hebbare Singularität genau dann, wenn für

$$n > 0 \Rightarrow c_{-n} = 0$$

also wenn der Hauptteil identisch Null ist.

- ein Pol, genau dann wenn  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$   $N_2 \leq N_1$  existieren, so dass

$$n > N_1 \Rightarrow c_{-n} = 0, \quad n = N_2 \Rightarrow c_{-n} \neq 0$$

also wenn wir einen endlichen Hauptteil haben.

- eine wesentliche Singularität, falls zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $n > N$  so existiert, dass

$$c_{-n} \neq 0$$

also wenn wir einen unendlichen Hauptteil haben.

**Satz 14.6 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz)** Sei  $f : K_{0,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ , holomorph und beschränkt. Dann hat  $f$  in  $z_0$  eine hebbare Singularität.

**Beweis** Nach Korollar (14.5) gilt

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

Betrachte dann  $\rho \rightarrow 0$ , woraus sich

$$c_n = 0$$

für alle  $n < 0$  ergibt. Nach dem vorherigen Beispiel haben wir dann eine hebbare Singularität. □

**Satz 14.7 (Casorati-Weierstrass)** Sei  $z_0 \in U$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  offen, eine wesentliche Singularität einer holomorphen Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist das Bild jeder beliebig kleinen punktierten  $\varepsilon$ -Kreisscheibe

$$K_{0,\varepsilon}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

unter  $f$  dicht in  $\mathbb{C}$ .

**Beweis** Angenommen es gäbe eine offene Kreisscheibe von einem Radius  $\delta > 0$  um ein  $w_0 \in \mathbb{C}$ , die keinen Punkt dieses Bildes enthält. Dann ist nach dem Riemann'sche Hebbbarkeitssatz  $z_0$  eine hebbare Singularität der auf der punktierten Kreisscheibe  $\{z \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$  definierten holomorphen Funktion

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

da  $h$  in einer Umgebung um die isolierte Singularität  $z_0$  beschränkt ist. Auf der Kreisscheibe gilt dann jedoch auch

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$$

und somit wäre  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $f$  oder ein Pol von  $f$ . Widerspruch.

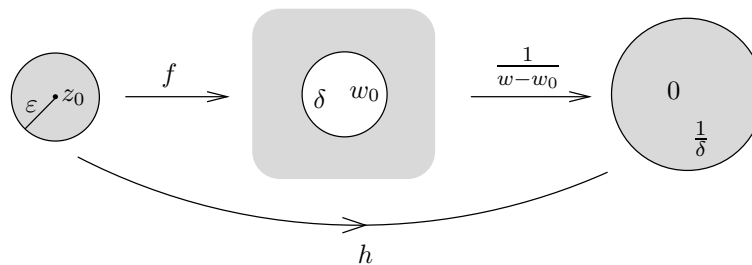


Abbildung 35: Die Abbildung  $w \mapsto (w - w_0)^{-1}$ , die wir  $f$  nachschalten, um  $h$  zu bilden, wirft das Komplement des kleinen Kreises um  $w_0$  in das Innere eines Kreises, also ist  $h$  beschränkt.

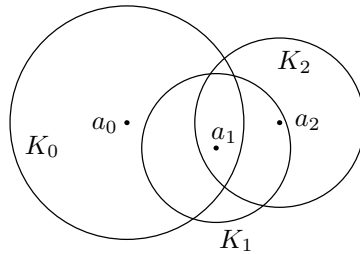
□

## 15 Analytische Fortsetzung und der komplexe Logarithmus

Was wir in diesem Kapitel lernen werden:

- Motivation zur analytischen Fortsetzung
- Fundamentalbeispiel:  $\log z \rightsquigarrow$  analytische Fortsetzung ist nicht eindeutig.

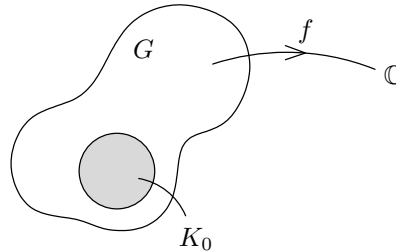
Sei  $f_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Daraus folgt, dass wir sie als Potenzreihe schreiben können. Wähle nun  $a_0 \in K_0$  und entwickle  $f_0$  in eine Potenzreihe bzgl.  $(z - a_1)$ , also  $f_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a_1)^k$ . Sei  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_1| < r_1\}$  die Konvergenzkreisscheibe der neuen Reihe und es gelte  $K_1 \not\subseteq K_0$ . Nehme  $a_2 \in K_1 \setminus K_0 \rightsquigarrow K_2$  und fahre so fort  $\rightsquigarrow a_3, K_3, \dots, a_n, K_n$ . Wir bekommen holomorphe Funktionen  $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{C}$  so dass  $f_i|_{K_i \cap K_j} = f_j|_{K_i \cap K_j}$  (Eindeutigkeitsatz für holomorphe Funktionen).



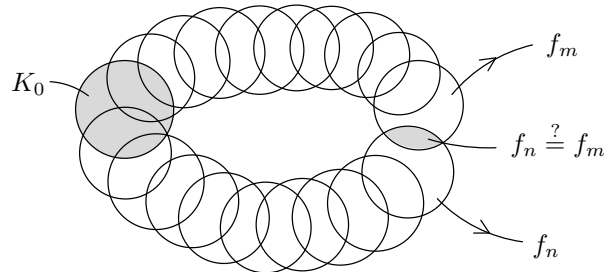
**Definition 15.1 (Analytische Fortsetzung)** Die Funktion  $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{C}$  wie oben beschreiben heißt dann analytische Fortsetzung von  $f_0$  längs der Kreiskette  $K_0, K_1, \dots, K_n$ .

**Bemerkung** Ideen und Fragen zur Verwendung der analytischen Fortsetzung:

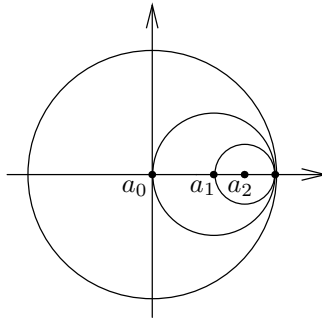
- Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.  $G$  einfach zusammenhängend. Nehmen wir an, wir kennen nur  $f : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$ . Die restlichen Informationen sind verloren gegangen. Dann kann man  $f$  von  $K_0$  aus auf ganz  $G$  analytisch fortsetzen.



- Wenn man weiß, dass  $f : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, dann ist nicht klar, wie weit bzw. ob man diese Funktion entlang jeder Kreiskette analytisch außerhalb von  $K_0$  fortsetzen kann. (Siehe Bsp. 15.1)
- Wie hängt die analytische Fortsetzung von der Kreiskette (dem Weg) ab? Müssen Funktionen, die entlang unterschiedlicher Kreisketten fortgesetzt worden sind, in ihrer Schnittmenge gleich sein?



**Beispiel 15.1 (Analytische Fortsetzung von  $\frac{1}{z-1}$ )** Will man diese Funktion ausgehend von  $a_0 = 0$  entlang der reellen Achse in positiver Richtung analytisch fortsetzen, so konvergiert die Folge der Kreismittelpunkte  $a_n \rightarrow 1$  und die Kreisradien  $r_n \rightarrow 0$ . Deswegen kann man in dieser Richtung keine neuen Punkte hinzugewinnen.



## Der Komplexe Logarithmus

Als erstes stellen wir einige Betrachtungen über die Stammfunktion von  $z \mapsto \frac{1}{z}$  an.

Sei  $g(z) := \frac{1}{z}$ ,  $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ .  $g$  ist holomorph, allerdings gibt es keine globale (d.h. auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) definierte Stammfunktion von  $g(z)$ .

Zur Erinnerung: Eine meromorphe Funktion besitzt genau dann eine Stammfunktion, wenn der Koeffizient  $c_{-1}$  der Laurentreihe verschwindet,  $c_{-1} = 0$ . Betrachten wir noch mal genauer, was das bedeutet:  $g(z) = \frac{1}{z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ . Nach Lemma (14.3) gilt  $2\pi i c_{-1} = 2\pi i = \int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz$ . Angenommen  $g$  hätte eine Stammfunktion  $F$ , dann würde gelten:  $\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = F(2\pi) - F(0) = 0 \neq 2\pi i$ . Widerspruch. Wir können aber lokale Stammfunktionen um jedes  $z_0 \neq 0$  bekommen, weil  $g$  in einer Umgebung von  $z_0$  holomorph ist.

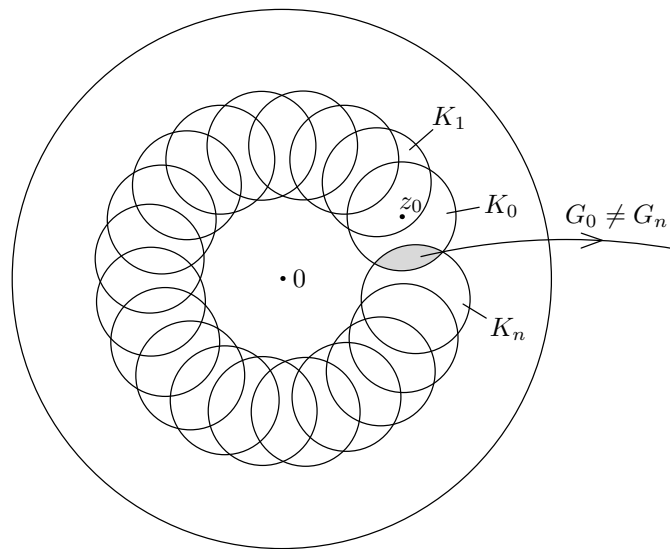


Abbildung 36: Die analytische Fortsetzung des Logarithmus ist nicht eindeutig! Wenn wir eine "lokale Stammfunktion"  $G_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$  wie auf dem Bild analytisch fortsetzen, so erhalten wir eine fortgesetzte Stammfunktion  $G_n : K_n \rightarrow \mathbb{C}$  welche auf  $K_0 \cap K_n$  nicht mit  $G_0$  übereinstimmt.

Betrachten wir nun die Umkehrfunktion von  $e^z$ :

Sei  $\exp : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$ . Wir wollen nun eine Menge  $U_0$  finden die möglichst groß ist, so dass  $\exp : U_0 \rightarrow \text{Bild}(\exp)$  biholomorph ist. Dafür bietet sich die offene Menge:  $\{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in$



$]k, 2\pi+k[$ ,  $k \in \mathbb{R}$  an, also ein  $2\pi$  breiter Streifen in  $\mathbb{C}$ . Dieser Streifen wird mit der Exponentialfunktion auf eine geschlitzte Ebene abgebildet.

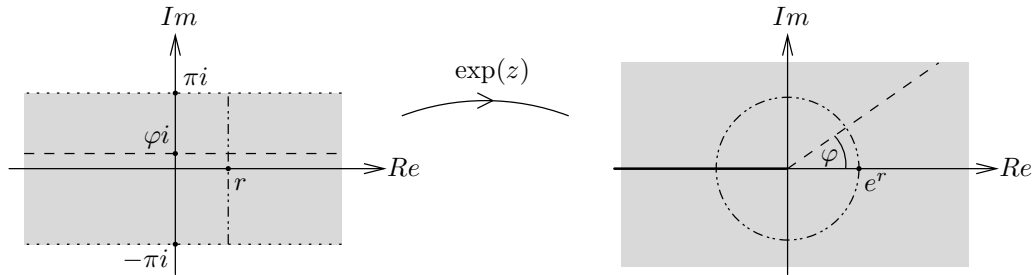


Abbildung 37: Der offene  $2\pi$  breite Streifen wird auf die “geschlitzte Ebene”  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$  abgebildet. Strecken parallel zur imaginären Achse werden dabei auf Kreise (ohne einen Punkt) abgebildet und zur reellen Achse parallele Geraden werden auf Strahlen abgebildet.

Im Folgenden zeigen wir, dass  $exp$  nicht mehr biholomorph wäre, wenn wir einen Rand mit hinzunehmen würden:

Sei  $f(z_0) = w \in \mathbb{R}^{\leq 0} \leftrightarrow$  “Schlitz von  $\mathbb{C}$ ” und  $f^{-1}$  die Umkehrfunktion. Betrachte eine Folge  $w_n \rightarrow w$  von “oben” und eine Folge  $w'_n \rightarrow w$  von “unten”, d.h.  $Im w_n > 0$  und  $Im w'_n < 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Da die Umkehrabbildung stetig ist, müsste gelten:  $f^{-1}(w_n) \rightarrow z_0$  und  $f^{-1}(w'_n) \rightarrow z_0$ , aber  $f^{-1}(w'_n) \rightarrow z_0 + 2\pi$ . Widerspruch.

Nun kommen wir zu dem Zusammenhang zwischen der Umkehrfunktion von  $exp$  und der Stammfunktion von  $g(z) = \frac{1}{z}$ :

Die Umkehrfunktion von  $exp$  sei  $\log w$ . Für die Funktion  $\log w$  gilt:

$$\begin{aligned} e^{\log w} &= w \\ \Rightarrow e^{\log w} \cdot (\log w)' &= 1 \\ \Leftrightarrow (\log w)' &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$

Also ist  $\log w$  eine lokale Stammfunktion von  $g$ .

Der kanonische Definitionsbereich der Logarithmusfunktion  $\log z$  ist  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$ , wie im obigen Bild eingezeichnet.

Was ist mit den anderen Argumenten von  $z$  von  $e^z$ ? Kann man  $e^z$  global invertieren?

$f(S_i)$  können und sollen in eine *Riemann'sche Fläche*  $\mathcal{R}$  “zusammengeklebt” werden.  $\log z : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.  $\mathcal{R}$  ist die Riemann'sche Fläche des komplexen Logarithmus, der natürliche Definitionsbereich nach analytischem Fortsetzen des reellen Logarithmus. (Vorstellen kann man sich die Riemansche Fläche als eine Wendeltreppe von  $\mathbb{C}$ -Ebenen, die an ihren Schlitzten zusammengeklebt werden)

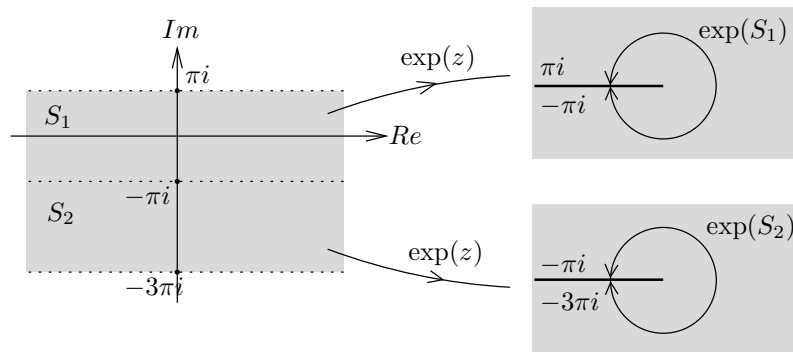


Abbildung 38: Die unterschiedlichen Logarithmusebenen

## Analytische Fortsetzung längs Wegen

Sei  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetiger Weg. Wir sagen, eine Kreiskette  $(K_0, K_1, \dots, K_n)$  verlaufe längs  $\gamma$ , wenn es eine Unterteilung  $t_0 = \tau_0 \leq \dots \leq \tau_n = t_1$  des Parameterintervalls gibt, so dass jeweils  $\gamma(\tau_i)$  der Mittelpunkt von  $K_i$  ist und der Wegabschnitt  $\gamma|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$  ganz in  $K_{i-1}$  verläuft. Die analytische Fortsetzung längs Kreisketten längs Wegen hängt dann nur vom Weg und nicht von der Kreiskette ab. Dies berechtigt uns dann von analytischer Fortsetzung längs des Weges zu sprechen, nämlich zu sagen, die holomorphe Funktion  $g$  bzw. deren Potenzreihe um  $\gamma(t_1)$  entstehe aus  $f$  durch analytische Fortsetzung längs  $\gamma$ .

Betrachten wir nun eine holomorphe Funktion  $f$ , die eine Stammfunktion  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  hat und ist  $\gamma : [t_0, t_1]$  stückweise  $C^1$ , so ist das Kurvenintegral durch  $\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0))$  gegeben. Zwar hat nicht jede holomorphe Funktion  $f$  auf  $G$  eine Stammfunktion, aber wir können stets eine Stammfunktion von  $f|_{K_0}$  wählen und längs  $\gamma$  analytisch fortsetzen und so das Integral bestimmen.

**Bemerkung** Die analytische Fortsetzung macht keinen Gebrauch von der stückweisen Differenzierbarkeit von  $\gamma$  und bietet uns daher eine Möglichkeit, das Kurvenintegral holomorpher Integranden auf den Fall stetiger Kurven auszuweiten.

**Definition 15.2 (Wegintegral für analytische Fortsetzungen)** Sei  $f$  holomorph.  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Sei  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow G \subset \mathbb{C}$  ein Weg, also stetig. Dann setzt man

$$\int_\gamma f(z) dz := F_n(\gamma(t_1)) - F_0(\gamma(t_0))$$

wenn  $F_n$  die analytische Fortsetzung längs  $\gamma$  von einer Stammfunktion  $F_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f$  ist.

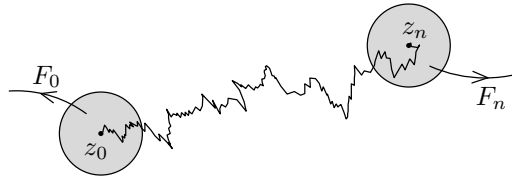


Abbildung 39: Eine holomorphe Funktion  $f$  längs eines stetigen, aber nicht differenzierbaren Weges fortzusetzen ist kein Problem. Deswegen kann auch die Lokale Stammfunktion  $F_0$  von  $f$  längs  $\gamma$  zu  $F_n$  fortgesetzt werden, und das Integral ist dann  $F_n(z_n) - F_0(z_0)$ .

## 16 Homotopie

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Def.: Weg, homotop, Fundamentalgruppe, nullhomotop, einfach zusammenhängend
- Monodromiesatz: Analytische Fortsetzung längs homotoper Wege ist eindeutig
- $G$  einf. zh,  $f_0 : K \subset G \rightarrow \mathbb{C}$  holo, längs jeden Weg in  $G$  analytisch fortsetzbar  $\Rightarrow f_0$  Einschränkung genau einer in  $G$  holo Funktion
- $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holo,  $\alpha$  und  $\beta$  homotop in  $G \Rightarrow \int_\alpha f = \int_\beta f$

**Bemerkung** Zur Erinnerung: Als Weg bezeichnen wir eine stetige Abbildung  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ .

**Definition 16.1 (Zusammensetzung von Wegen, Inverse & geschlossene Wege)** Seien  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  Wege mit  $\alpha(1) = \beta(0)$ .

- Den Weg

$$\alpha\beta(t) : [0, 1] \rightarrow U, \quad \alpha\beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

bezeichnet man als Zusammensetzung von  $\alpha$  und  $\beta$ .

- Der Inverse Weg zu  $\alpha$  ist gegeben durch

$$\alpha^{-1} : [0, 1] \rightarrow U, \quad \alpha^{-1}(t) := \alpha(1 - t)$$

- Der Weg  $\alpha$  heißt geschlossen, falls  $\alpha(0) = \alpha(1)$  ist.

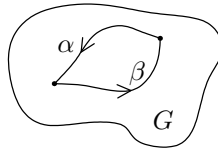


Abbildung 40: Zusammengesetzter, geschlossener Weg  $\alpha\beta = \beta\alpha$ .

**Definition 16.2 (Homotopie von Wegen)** Zwei Wege  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  mit gleichem Anfangspunkt  $z_0 := \alpha(0) = \beta(0)$  und gleichem Endpunkt  $z_1 := \alpha(1) = \beta(1)$  heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U, \quad (t, \tau) \mapsto h(t, \tau) =: h_\tau(t)$$

gibt, so dass

- $h(t, 0) = \alpha(t)$
- $h(t, 1) = \beta(t)$
- für alle  $\tau \in [0, 1]$  die Abbildung

$$h_\tau(\cdot) : [0, 1] \rightarrow U$$

ein Weg mit dem Anfangspunkt  $z_0$  und dem Endpunkt  $z_1$  ist.

Die Abbildung  $h$  nennt man Homotopie.

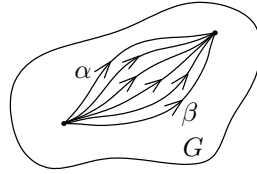


Abbildung 41: Zwei homotope Wege  $\alpha$  und  $\beta$ .

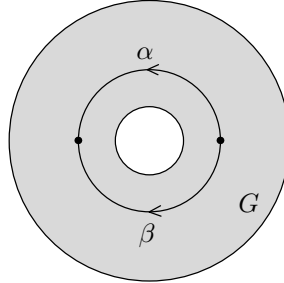


Abbildung 42: Nicht homotope Wege  $\alpha$  und  $\beta$ .

**Beispiel 16.1 (Nicht homotope Wege)** Seien  $G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in [\frac{1}{4}, 1]\} \subset \mathbb{C}$  ein Kreisring sowie  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow G$  Kurven mit

$$\alpha(t) := \frac{1}{2}e^{\pi it}, \quad \beta(t) = \frac{1}{2}e^{-\pi it}$$

Dann sind zwar  $\frac{1}{2} = \alpha(0) = \beta(0)$  sowie  $-\frac{1}{2} = \alpha(1) = \beta(1)$  aber die Kurven lassen sich nicht stetig in einander überführen.

**Bemerkung** Wie man leicht sieht, definiert Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kurven mit gleichen Anfangs- und Endpunkten.

Beweis:

- Reflexivität: Offensichtlich ist jeder Weg  $\alpha$  zu sich selber homotop ( $h_\tau = \alpha \forall \tau$ ).
- Symmetrie: Betrachte  $h(t, 1 - \tau)$ .
- Transitivität:

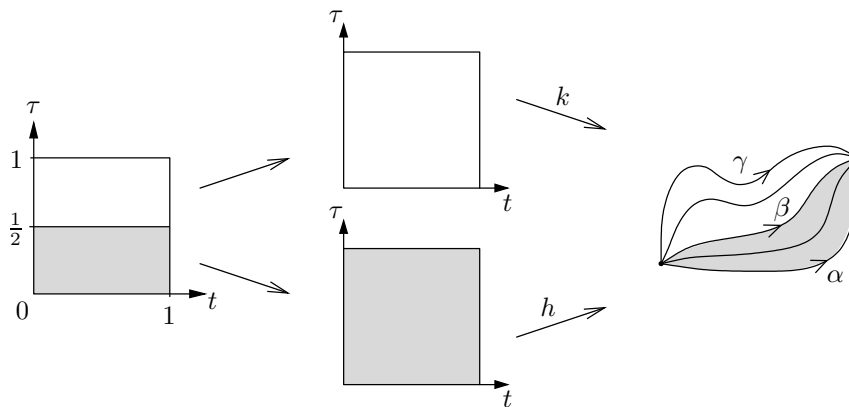


Abbildung 43:  $h$  ist Homotopie zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ ,  $k$  zwischen  $\beta$  und  $\gamma$ .

- Wohldefiniertheit: Man kann Homotopieklassen genau wie Wege zusammensetzen: hat man Wege  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow G \subset \mathbb{C}$  mit  $\alpha(1) = \beta(0)$  so ist

$$[\alpha\beta] =: [\alpha][\beta]$$

wohldefiniert, da dies unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

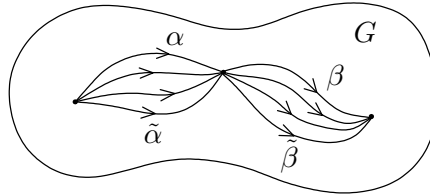


Abbildung 44: Skizze zur Wohldefiniertheit von  $[\alpha][\beta]$

Betrachtet man nur geschlossene Wege  $\alpha$  mit Anfangs- und Endpunkt  $z_0$ , so bilden deren Homotopieklassen eine Gruppe:

- $e = [z_0]$
- $[\alpha^{-1}] = [\alpha]^{-1}$ , d.h.  $[\alpha^{-1}][\alpha] = e = [z_0]$
- $[\alpha\beta\gamma] = [\alpha\beta][\gamma] = [\alpha][\beta\gamma]$

### Definition 16.3 (Homotopieklassen & Fundamentalgruppe)

- Die durch Homotopie definierten Äquivalenzklassen von Kurven nennt man Homotopieklassen.
- Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(G, z_0)$  eines topologischen Raumes  $G$  mit Basispunkt  $z_0 \in G$  ist die Menge aller Homotopieklassen geschlossener Wege durch  $z_0$  in  $G$ , mit der Zusammensetzung als Gruppenoperation.

### Bemerkung

- Die Homotopieklass  $[z_0]$ , also der konstante Weg, ist das neutrale Element in  $\pi_1(G, z_0)$ . Jede geschlossene Kurve durch  $z_0$ , die kein "Loch" von  $G$  umläuft, ist zu  $z_0$  homotop.
- In wegzusammenhängenden topologischen Räumen hängt die Fundamentalgruppe nicht von dem Basispunkt  $z_0$  ab. Für jeden beliebigen anderen Basispunkt  $z_1$  erhält man einen Gruppenisomorphismus zwischen  $\pi_1(G, z_0)$  und  $\pi_1(G, z_1)$  wie folgt: Nehme einen beliebigen Weg  $\alpha$  mit  $\alpha(0) = z_0, \alpha(1) = z_1$ . Dann gilt

$$\pi_1(G, z_0) \ni [\gamma] \leftrightarrow [\alpha\gamma\alpha^{-1}] \in \pi_1(G, z_1).$$

Man spricht deswegen oft nur von  $\pi_1(G)$ .

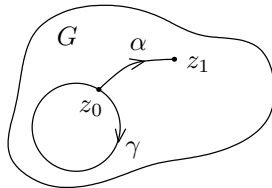


Abbildung 45: Meist ist die Fundamentalgruppe unabhängig vom Basispunkt.

**Definition 16.4 (Nullhomotope Wege & einfach zusammenhängende Mengen)** Ein geschlossener Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow G \subset \mathbb{C}$  heißt nullhomotop, wenn  $[\alpha] = e$ , d.h. falls  $\alpha$  auf einen Punkt deformiert werden kann.  $G$  heißt einfach zusammenhängend, falls alle geschlossenen Wege in  $G$  nullhomotop sind.

**Beispiel 16.2 (Fundamentalgruppen)**

1.  $G$  einfach zusammenhängend: Nach Definition ist jeder geschlossene Weg homotop zu dem konstanten Weg  $z_0$ . Also besteht die Fundamentalgruppe nur aus dem neutralen Element.

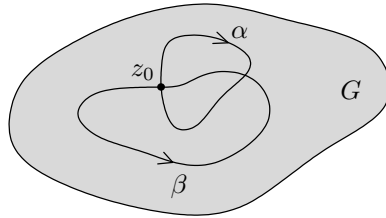


Abbildung 46:  $G$  einfach zusammenhängend  $\Rightarrow \pi_1(G) = e$ .

2.  $G$  nicht einfach zusammenhängend:  $G$  besitzt "Löcher". Geschlossene Wege gehören dann in die selbe Homotopieklasse, wenn sie um jedes "Loch" gleich oft herumlaufen. Generatoren der Fundamentalgruppe sind beliebige Kurven, welche um genau ein Loch genau einmal herumlaufen.

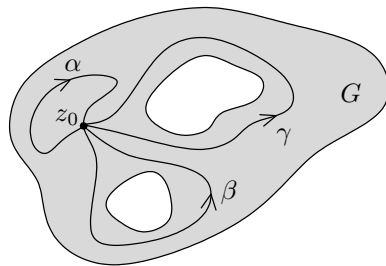


Abbildung 47:  $G$  nicht einfach zusammenhängend  $\Rightarrow \pi_1(G) \simeq \mathbb{Z}^{\#\text{Löcher}}$ .

3. Betrachte einen Torus  $T \subset \mathbb{R}^3$ : Nicht nullhomotope Kurven können entweder um das Loch in der Mitte, oder um den "Schlauch" herumlaufen. Sie werden also entsprechend der jeweiligen Umlaufzahlen in Homotopieklassen eingeteilt.

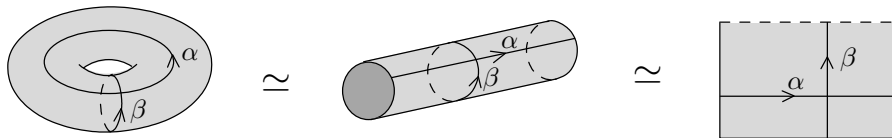


Abbildung 48: In der planaren Darstellung des Torus sieht man gut, dass  $\alpha$  und  $\beta$  nicht homotop sind. Jede geschlossene Kurve auf  $T$  ist homotop zu  $\alpha^m \beta^n$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , also  $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z}^2$ .

**Satz 16.1 (Monodromiesatz)** Die analytische Fortsetzung entlang homotoper Wege ist eindeutig.

D.h. sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $h_\tau(t) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  eine Homotopie zwischen Wegen

$$\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow G, \quad \alpha(0) = \beta(0) =: z_0, \quad \alpha(1) = \beta(1) =: z_1$$

mit gleichem Anfangspunkt  $z_0$  und Endpunkt  $z_1$ , sowie  $K_0$  eine offene Kreisscheibe um  $z_0$ . Weiter sei  $f_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$  eine auf  $K_0$  holomorphe Funktion, die für alle  $\tau \in [0, 1]$  längs  $h_\tau(t)$  analytisch fortsetzbar ist. Dann gilt: entstehen  $f_{10}$  und  $f_{11}$  durch analytische Fortsetzung von  $f_0$  längs  $\alpha = h_0$  bzw.  $\beta = h_1$ , so ist  $f_{10} = f_{11}$ .

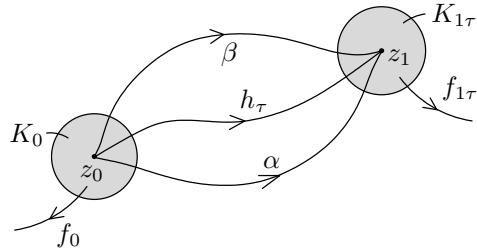


Abbildung 49: Analytische Fortsetzung längs  $h_\tau$  führt zu  $f_{1\tau}$ . Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt  $f_{1\tau} = f_{1\bar{\tau}}$ , also insbesondere  $f_{10} = f_{11}$  (Monodromie).

**Beweis** Nur die Idee. Es entstehe  $f_{1\tau}$  aus  $f_0$  durch analytische Fortsetzung längs  $h_\tau$ , bzw. einer entsprechenden Kreiskette  $\{K_i(\tau)\}$  längs  $h_\tau$ . Für genügend kleine  $\delta$  liegt  $h_{\tau+\delta}$  so nahe bei  $h_\tau$ , dass man nur die Radien der Kreise etwas zu verkleinern braucht, um eine Kreiskette längs  $h_{\tau+\delta}$  zu erhalten, deren Kreisscheiben  $K_i(\tau+\delta)$  jeweils in  $K_i(\delta)$  enthalten sind. Damit sind die analytischen Fortsetzungen längs  $h_\tau$  und  $h_{\tau+\delta}$  identisch. Dementsprechend erhält man von  $\tau = 0$  ausgehend dass  $f_{10} = f_{11}$ .

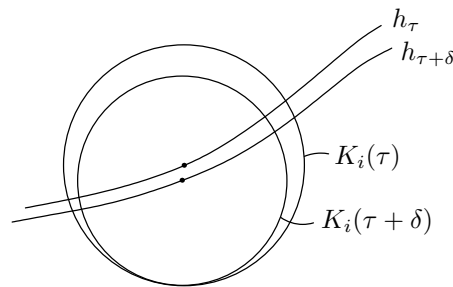


Abbildung 50: Zum Beweis des Monodromiesatzes

□

**Korollar 16.2** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $K \subset G$  eine Kreisscheibe sowie  $f_0 : K \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, die sich längs jedes Weges (bzw. jeder Kreiskette längs jedes Weges)  $\alpha$  in  $G$  analytisch fortsetzen lässt. Dann existiert eine eindeutige holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $f|_K \equiv f_0$ .

**Beweis** Alles ist homotop... □

**Bemerkung** Die Voraussetzung in Korollar (16.2), dass  $f_0$  entlang jedes Weges analytisch fortsetzbar ist, impliziert dass  $f$  weder Polstellen noch wesentliche Singularitäten in  $G$  besitzt.

**Lemma** (Elstrodt S. 107) Jede holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  hat eine Stammfunktion.

**Korollar 16.3** Sei  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G$  ist ein Gebiet,  $f$  holomorph und seien  $\alpha$  und  $\beta$  homotope Wege in  $G$ . Dann ist

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz$$

**Beweis**  $\alpha$  und  $\beta$  sind homotop  $\Rightarrow$  betrachte nur das Gebiet, das von  $\alpha$  und  $\beta$  aufgespannt wird. Dieses Gebiet ist einfach zusammenhängend und  $f$  ist darauf holomorph  $\Rightarrow f$  besitzt in dem aufgespannten Gebiet eine Stammfunktion.  $\square$



# 17 Die Umlaufzahl

Was wir in dem Kapitel lernen:

- Def. Umlaufzahl inkl. Anschauung und Formel
- Die Umlaufzahl ist ganzzahlig

Die Umlaufzahl  $n_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$  gibt an, wie oft eine geschlossene Kurve  $\gamma$  in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  den Punkt  $a$  im mathematisch positiven Sinn "umläuft".

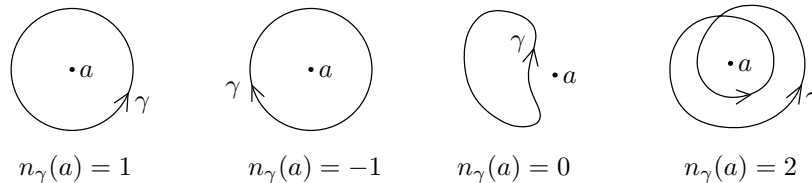


Abbildung 51: Beispiele von Umlaufzahlen

Wie berechnet man  $n_\gamma(a)$ ?

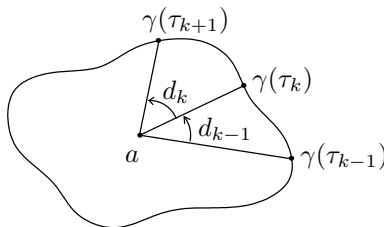


Abbildung 52: Aufteilung in die Winkel  $d_k$

Sei  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t_0) = \gamma(t_1)$  eine Kurve. Man wählt eine Unterteilung  $t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_n = t_1$  fein genug, so dass  $d_k \in (-\pi, \pi)$ .  $d_k$  gibt den Winkel zwischen  $\gamma(\tau_k)$  und  $\gamma(\tau_{k+1})$  an. Es gilt  $e^{id_k} = \frac{\gamma(\tau_{k+1})}{|\gamma(\tau_{k+1})|} \cdot \frac{|\gamma(\tau_k)|}{\gamma(\tau_k)}$ , was man an der folgenden Skizze gut sehen kann:

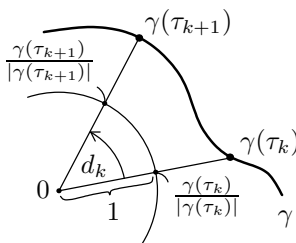


Abbildung 53: Zusammenhang zwischen  $d_k, \gamma(\tau_k)$  und  $\gamma(\tau_{k+1})$ .

Der "Winkel" einer Kurve  $\gamma$  um  $a$  ist:  $\angle_\gamma := d_\gamma := \sum_{k=1}^n d_k$  und ist unabhängig von der Unterteilung von  $[t_0, t_1]$ .

**Definition 17.1 (Umlaufzahl)** Sei  $\gamma$  eine geschlossene Kurve in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ . Die Zahl

$$n_\gamma(a) := \frac{\angle_\gamma}{2\pi}$$

heißt Umlaufzahl der Kurve  $\gamma$  um  $a$ .

**Bemerkung** Die Umlaufzahl ist für die Punkte der Spur nicht definiert.

**Lemma 17.1** Die Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow G$  um einen Punkt  $a \in G \setminus Sp(\gamma)$  ist ganzzahlig:

$$n_\gamma = \frac{\angle \gamma}{2\pi} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \angle \gamma = 2\pi \cdot n_\gamma(a)$$

**Beweis** O.B.d.A.  $a = 0$ . Für  $\theta_i := \angle_{\gamma(\tau_{i-1})}^{\gamma(\tau_i)}$  ist also

$$e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_n)} \frac{|\gamma(t_0)|}{|\gamma(t_1)|} = \frac{|\gamma(t_1)|}{|\gamma(t_0)|},$$

und weil  $\gamma$  geschlossen ist, folgt daraus  $\angle \gamma = \sum \theta_i = 2\pi k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ , weil  $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ . □

**Beispiel 17.1 (Umlaufzahl eines Kreises)**  $\gamma(t) = a + re^{imt}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} n_\gamma(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{rim e^{itm}}{re^{itm}} dt \\ &= m \end{aligned}$$

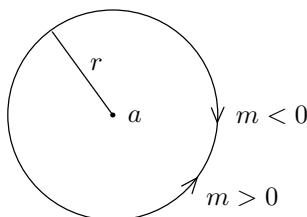


Abbildung 54: Umlaufzahl eines Kreises um den Punkt  $a$  in Abhängigkeit von  $m$ .

Das folgende Lemma kann auch als Definition für die Umlaufzahl angesehen werden:

**Lemma 17.2** Für geschlossene Kurven  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$  gilt:

$$n_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz.$$

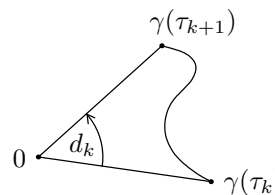
**Beweis** OBdA  $a = 0$ , **z.z.**  $n_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z}$ .

Das Integral betrachten wir als analytische Fortsetzung der Stammfunktion von  $\frac{1}{z}$  entlang  $\gamma$ . Dann gilt für den Logarithmus:

$$\log(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$$

wobei  $\log r$  den reellen Logarithmus bezeichnet und  $i\varphi$  durch die analytische Fortsetzung definiert wurde und bis auf  $2\pi\mathbb{Z}$  eindeutig ist.

$$\int_{\gamma|_{[\tau_k, \tau_{k+1}]}} \frac{dz}{z} = \log |\gamma(\tau_{k+1})| - \log |\gamma(\tau_k)| + i \cdot d_k$$



Dabei muss die Winkelunterteilung fein genug gewählt sein, so dass der Logarithmus zur Winkelbemessung geeignet ist.  $\gamma(\tau_{k+1})$  und  $\gamma(\tau_k)$  müssen also auf der gleichen Ebene des komplexen Logarithmus liegen und somit ist  $d_k$  kleiner als  $2\pi$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{dz}{z} &= \sum_k \int_{\gamma|_{[\tau_k, \tau_{k+1}]}} \frac{dz}{z} \\ &= i \sum_k d_k = 2\pi i \cdot n_{\gamma}(a). \end{aligned}$$

Die vorletzte Ungleichung gilt, weil die Auswertung des Integrals eine Teleskopsumme bildet und  $\gamma$  eine geschlossene Kurve ist, also  $\gamma(\tau_0) = \gamma(\tau_n)$ .  $\square$

Nun erweitern wir die Theorie, indem wir nicht mehr nur geschlossene Kurven betrachten, sondern Linearkombinationen aus ihnen, sogenannte *Zykel*:

**Definition 17.2 (Zykel)** Ein Zykel ist eine Linearkombination geschlossener Wege  $\gamma_i$  in einem Gebiet  $G$ .

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Wir definieren die Umlaufzahl des Zyklus um einen Punkt  $a \in G \setminus Sp(\gamma)$  als

$$n_{\gamma}(a) := \lambda_1 n_{\gamma_1}(a) + \dots + \lambda_n n_{\gamma_n}(a).$$

**Bemerkung** Die Umlaufzahl ist lokal konstant.

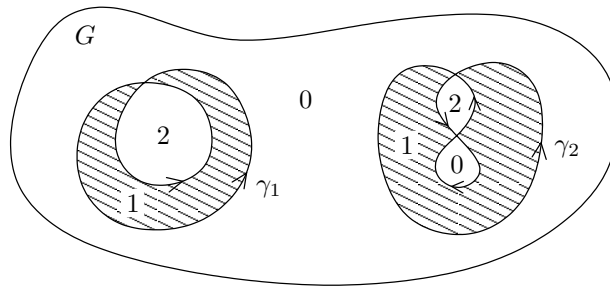


Abbildung 55:  $G$  wird durch den Zykel  $\gamma_1 + \gamma_2$  in Gebiete unterteilt, auf denen die Umlaufzahl konstant ist.

**Beispiel 17.2 (Zykel)**

- $\gamma$  bestehe nur aus einer einzigen geschlossenen Kurve
  - $\Rightarrow -\gamma$  parametrisiert die selbe Menge wie  $\gamma$ , ist jedoch anders herum orientiert.
  - $\Rightarrow 2\gamma$  ist  $\gamma$  2-mal durchlaufen
- Integration einer integrierbaren Funktion  $f$  über einen Zykel  $\gamma = \sum_i \lambda_i \gamma_i$

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_i \lambda_i \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

## 18 "Cauchy auf Zykeln"

Was wir in diesem Kapitel lernen werden:

- Def. von nullhomolog
- Beispiel zu homotop, homolog
- allgemeiner Cauchy'scher-Integralsatz
- $\gamma$  und  $\gamma'$  homolog, dann ist  $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma'} f$

Bisher haben wir schon bewiesen (Korollar (16.3) aus dem Monodromiesatz): Sei  $G$  ein Gebiet,  $\alpha \sim \beta$  zwei homotope Kurven in  $G$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz$$

Anders interpretieren können wir dies als:

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $G$  Gebiet,  $\gamma$ -nullhomotop in  $G$ , dann folgt:

$$\int_{\gamma=\alpha\beta^{-1}} f(z) dz = 0$$

Damit erhalten wir eine Verallgemeinerung des Cauchy-Integralsatzes. Wir können ausserdem die Bedingung "nullhomotop" abschwächen, indem wir das Ganze auf Zykel ausweiten.

**Definition 18.1 (Homologie von Zykeln & nullhomologe Zykel)** Ein Zykel  $\gamma \subset G$ , wobei  $G$  ein Gebiet ist, heißt nullhomolog in  $G$ , wenn  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus G$  die Umlaufzahl  $n_{\gamma}(z) = 0$  hat. Zwei Zykeln heißen homolog, wenn ihre Differenz nullhomolog ist.

**Bemerkung**  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind homolog  $\Leftrightarrow \gamma_1 - \gamma_2$  ist nullhomolog  $\Leftrightarrow \gamma_2 - \gamma_1$  ist nullhomolog.

### Beispiel 18.1 (Homologie von Zykeln)

1. Betrachte die einfachen Zykeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  aus Abb. 56, welche nur aus jeweils einer geschlossenen Kurve bestehen.

- $\gamma_1$  ist nullhomolog, da keine Punkte ausserhalb von  $G$  umlaufen werden.
- $\gamma_2$  ist nicht nullhomolog, weil das Loch in  $G$  umlaufen wird. Somit ist die Umlaufzahl für die Elemente in diesem Loch  $\neq 0$ .
- $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  ist ebenfalls nicht nullhomolog, also sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  nicht homolog.

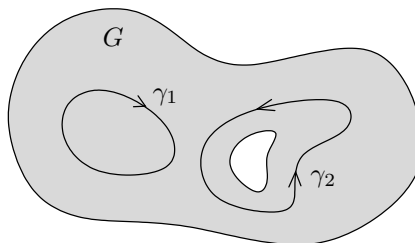


Abbildung 56:  $\gamma_1$  ist nullhomolog,  $\gamma_2$  ist es nicht. Insbesondere sind dann  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  nicht homolog.

2. Betrachte Zykel in  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ :

$\gamma(t) = r \cdot e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ist nicht nullhomolog.

Zwei Kreiskurven  $\gamma_1 = r_1 \cdot e^{it}$  und  $\gamma_2 = r_2 \cdot e^{it}$  ( $r_1, r_2 > 0$ ) sind homolog, weil für  $\tilde{\gamma} = \gamma_1 - \gamma_2$  die Umlaufzahl  $n_{\tilde{\gamma}}(0) = 0$  ist.

$\gamma_1 = r_1 \cdot e^{it}$  und  $\gamma_2 = r_2 \cdot e^{-it}$  ( $r_1, r_2 > 0$ ) sind hingegen nicht homolog.

**Bemerkung** Zwei homotope Kurven sind immer auch homolog. Aber: Aus nullhomolog folgt *nicht* nullhomotop!

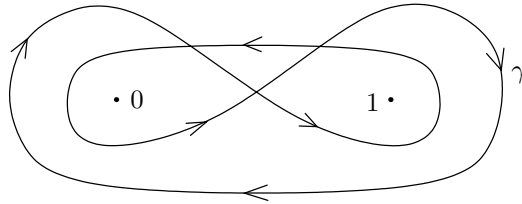


Abbildung 57:  $G = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .  $\gamma$  ist nullhomolog, da  $n_\gamma(0) = n_\gamma(1) = 0$ , aber nicht nullhomotop, da man  $\gamma$  nicht zu einem Punkt zusammenziehen kann.

**Satz 18.1 (Allgemeine Cauchy'sche Integralformel & Integralsatz)** Es sei  $\gamma$  ein nullhomologer Zykel im Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt:

1.  $\forall z \in G \setminus Sp(\gamma)$ :

$$n_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

2.  $\int_\gamma f(z) dz = 0$

**Beweis**

zu 1. Die Behauptung ist äquivalent zu

$$\int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0, \quad \forall z \in G \setminus Sp(\gamma)$$

weil  $n_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$ . Wir werden diese Aussage beweisen.

**1. Schritt:** Wir betrachten die Funktion

$$g : G \times G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(\xi, z) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{für } \xi, z \in G, z \neq \xi \\ f'(z) & \text{für } \xi = z \in G \end{cases}$$

*Behauptung:* Die Funktion  $g(\xi, z)$  ist stetig.

*Beweis:* Sei  $(\xi_0, z_0) \in G \times G$ : Ist  $z_0 \neq \xi_0$ , so ist  $g$  trivialerweise stetig in  $(z_0, \xi_0)$ .

Sei  $z_0 = \xi_0$ . Für  $z, \xi \in K_R(z_0)$ ,  $z \neq \xi$  mit  $\overline{K_R(z_0)} \subset G$  gilt:

$$\begin{aligned} g(\xi, z) &= \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \stackrel{\text{Cauchy-Formel}}{=} \frac{1}{2\pi i(\xi - z)} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\theta)}{(\theta - \xi)} - \frac{f(\theta)}{(\theta - z)} d\theta \\ &\Rightarrow g(\xi, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\theta)}{(\theta - \xi)(\theta - z)} d\theta. \end{aligned}$$

Die letzte Formel gilt auch für  $\xi = z$ . Daraus folgt:

$$g(\xi, z) - g(\xi_0, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \left( \frac{f(\theta)}{(\theta - \xi)(\theta - z)} - \frac{f(\theta)}{(\theta - z_0)^2} \right) d\theta$$

für  $(\xi, z) \rightarrow (\xi_0, z_0) = (z_0, z_0)$  geht das Integral gegen 0.  $\Rightarrow g$  ist stetig in  $(z_0, z_0)$ . Also  $g$  ist stetig.

**2. Schritt:** Betrachte die Funktion

$$h_0 : G \rightarrow \mathbb{C}, h_0(z) := \int_{\gamma} g(\xi, z) d\xi.$$

Da  $g(\xi, z)$  stetig auf  $G \times G$  ist, ist auch  $h_0(z) : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

*Behauptung:* Die Funktion  $h_0(z)$  ist holomorph.

*Beweis:* Um zu zeigen, dass die Funktion holomorph ist, benutzen wir den Satz von Morera. Es reicht also zu zeigen:

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z) dz = 0, \forall \Delta \subset G.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} h_0(z) dz &= \int_{\partial\Delta} \left( \int_{\gamma} g(\xi, z) d\xi \right) dz \\ &= \int_{\gamma} \left( \int_{\partial\Delta} g(\xi, z) dz \right) d\xi \end{aligned}$$

das Umdrehen der Integrale geht, weil  $g : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist.

Nach Definition von  $g$  ist für jedes festes  $\xi_0$ , die Funktion  $g(\xi_0, z)$  stetig und  $\forall z \neq \xi_0$  holomorph.

Da  $\{\xi_0\}$  eine diskrete Menge ist, gilt nach Satz (12.7), dass  $g(\xi_0, z)$  auch in  $z = \xi_0$  holomorph ist.

Mit dem Cauchy'schen Integralsatz für Dreiecke gilt dann  $\int_{\partial\Delta} g(\xi_0, z) dz = 0$ .

Da  $\xi_0$  beliebig war gilt also  $\int_{\partial\Delta} h_0(z) = 0$ .  $\Rightarrow h_0$  ist holomorph.

**Schritt 3:** Wir konstruieren uns eine ganze Funktion  $h(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Definiere zunächst die (offene) Menge  $G_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid n_{\gamma}(z) = 0\}$ .

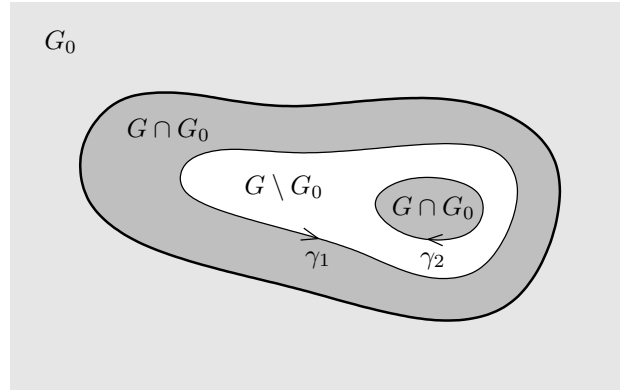


Abbildung 58: Wir betrachten den Zykel  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . Die Menge  $G_0$  enthält alle Punkte  $a$  mit  $n_{\gamma}(a) = 0$ . Die Menge  $G \setminus G_0$  enthält sowohl alle Punkte  $a$  mit  $n_{\gamma}(a) \neq 0$ , als auch die Spur von  $\gamma$  für deren Punkte die Umlaufzahl nicht definiert ist. Da  $G$  offen ist, und  $Sp(\gamma) \subset G$  abgeschlossen, schneiden sich  $G$  und  $G_0$  in einer offenen Menge.

Da  $G$  offen und der Rand des Zyklus  $\gamma$  abgeschlossen ist, müssen sich  $G$  und  $G_0$  in einer offenen Menge schneiden. Da  $\gamma$  nullhomolog ist, gilt:  $\mathbb{C} \setminus G \subset G_0 \Rightarrow G \cup G_0 = \mathbb{C}$ .

Wir definieren  $\forall z \in G_0$ :

$$h_1(z) = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Das Integral ist überall definiert, weil  $\forall z \in G_0$  gilt,  $z \notin Sp(\gamma)$ .

Für alle  $z \in G_0 \cap G$  ist  $h_1 = h_0$ , weil  $h_0(z) = \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = h_1(z)$ .

Die Gleichung gilt weil das zweite Integral bis auf die multiplikative Konstante  $f(z)\frac{1}{2\pi i}$  gleich der Umlaufzahl von  $\gamma$  um den Punkt  $z$  und somit  $= 0$  ist. Nun definieren wir auf ganz  $\mathbb{C}$  die Funktion

$$h(z) := \begin{cases} h_0(z) & z \in G \\ h_1(z) & z \in G_0 \end{cases},$$

Aus dem Identitätssatz folgt, dass  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, weil  $G$  und  $G_0$  sich auf einem Streifen schneiden. Demnach ist  $h$  ganz.

**Schritt 4:** Wir zeigen nun  $h \equiv 0$ .

*Beweis:* Sei  $R > 0$  so groß, dass der von  $\gamma$  eingeschlossene Bereich ganz in  $K_R(0)$  liegt.

Sei  $|z| > R$ .  $\Rightarrow z \in G_0$ . Deswegen gilt:

$$|h(z)| = \left| \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \max_{\xi \in \gamma} |f(\xi)| \cdot L(\gamma) \cdot \frac{1}{|z| - R}$$

$|\xi - z| > |z| - R$ , weil  $\xi$  innerhalb des Kreises liegt. Für  $|z| \rightarrow \infty$  geht  $|h(z)|$  gegen 0. Damit ist  $h(z)$ , da es innerhalb einer kompakten Menge ( $K_R(0)$ ) beschränkt ist, auch auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt. Da  $h(z)$  auch holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist, ist  $h(z)$  nach dem Satz von Liouville konstant.

Da  $\lim_{z \rightarrow \infty} |h(z)| = 0$  muss  $h(z) = 0$  sein.

**Ergebnis:**

$\forall z \in G \setminus Sp(\gamma)$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= h(z) \\ &= \int_{\gamma} g(\xi, z) d\xi \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \end{aligned}$$

zu 2. Sei  $a \in G \setminus Sp(\gamma)$ . Definiere  $F(z) := (z - a)f(z)$ .  $F$  ist holomorph auf  $G$  mit  $F(a) = 0$ . Mit dem was wir schon bewiesen haben gilt:

$$0 = n_{\gamma}(a)F(a) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

Also  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

□

**Korollar 18.2** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und seien  $\gamma, \gamma'$  homologe Zyklen in  $G$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma'} f(z) dz$$

**Beweis**  $\tilde{\gamma} = \gamma - \gamma'$  ist nullhomolog.  $\Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0 \Leftrightarrow$  Behauptung.

□

**Korollar 18.3 (Integration über nullhomologe Zyklen)** Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $\gamma$  ein Zykel in  $G$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\gamma$  ist nullhomolog
2.  $\forall f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph gilt:

$$n_{\gamma}(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \forall z \in Sp(\gamma)$$

3.  $\forall f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Beweis** Die Folgerungen (1. $\Rightarrow$ 2.) und (2. $\Rightarrow$ 3.) kann man direkt aus Satz (18.1) übernehmen.

zu 3. $\Rightarrow$ 1.: Für jedes  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$  ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$  holomorph. Also gilt nach Voraussetzung

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot n_{\gamma}(z_0).$$

Demnach ist  $n_{\gamma}(z_0) = 0 \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus G \Leftrightarrow \gamma$  ist nullhomolog bezgl.  $G$ .

□

### Bemerkung

- $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  sind homotop  $\Leftrightarrow \gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  sind stetig in einander deformierbar.
- $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  sind homolog  $\Leftrightarrow$  Für jedes holomorphe  $f$  gilt  $\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f$ .

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus G$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f d\xi = \int_{\tilde{\gamma}} f d\xi \quad \forall f \text{ holomorph} &\Leftrightarrow \gamma \text{ homolog } \tilde{\gamma} \\ &\Leftrightarrow n_{\gamma-\tilde{\gamma}}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus G \\ &\Leftrightarrow n_{\gamma}(z) = n_{\tilde{\gamma}}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus G \\ &\Leftrightarrow \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi-z} = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{d\xi}{\xi-z}. \end{aligned}$$



## 19 Der Residuensatz

Was wir in diesem Kapitel lernen werden:

- Def. Residuum + Formel für die Berechnung
- Residuensatz
- Def. logarithmische Ableitung und Anwendung
- Satz von Rouché
- Hauptsatz der Algebra

**Definition 19.1 (Residuum)** Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ . Dann heißt  $c_{-1} =: \text{res}_{z_0} f$  das Residuum von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .

Nach der Cauchyformel für die Koeffizienten der Laurentreihe (Lemma 14.3) ist

$$\text{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \varepsilon} f(\xi) d\xi$$

für  $\varepsilon > 0$  klein genug, d.h.  $K_\varepsilon(z_0) \subset U$  enthält keine weiteren Singularitäten.

**Satz 19.1 (Residuensatz)** Es sei  $f$  eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion auf einem Gebiet  $G$  und  $S \subset G$  die Menge der Singularitäten. Sei  $\gamma$  ein nullhomologer Zykel in  $G$ , der  $S$  nicht trifft. Dann umläuft  $\gamma$  nur endliche viele Punkte aus  $S$  und es gilt die Residuenformel:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in S} n_{\gamma}(a) \cdot \text{res}_a f$$

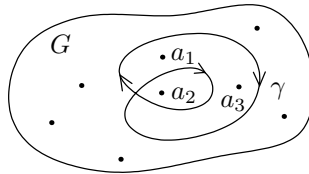


Abbildung 59: Der Zykel  $\gamma$  umschließt die Polstellen  $a_1, a_2, a_3$ .

**Bemerkung**  $f$  muss nicht meromorph sein, d.h. die isolierten Singularitäten können auch wesentlich sein. z.B. hat die Funktion  $e^{\frac{1}{z}}$  an der Stelle 0 eine wesentliche Singularität und das Residuum an dieser Stelle ist 1.

### Beweis

1. zu zeigen:  $\gamma$  umläuft endlich viele Singularitäten.

Die Spur von  $\gamma$  und der Bereich, der von  $\gamma$  umschlossen wird, ist eine kompakte Menge. Außerdem ist sie eine Teilmenge von  $G$ .  $S$  ist eine diskrete Menge  $\Rightarrow$  es liegt kein Häufungspunkt von  $S$  in dem Bereich, den  $\gamma$  umläuft.

2. zu zeigen: Die Residuenformel stimmt.

Betrachte alle Punkte  $a_k$ , die  $\gamma$  umläuft.

$$\gamma_k(t) := a_k + \varepsilon \cdot e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

Für  $\varepsilon > 0$  klein genug liegen diese Kurven  $\gamma_k(t)$  in  $G$ .

Definiere nun:  $\tilde{\gamma} = \gamma - \sum_k n_\gamma(a_k)\gamma_k$ .  $\tilde{\gamma}$  ist ein Zykel und umläuft in  $G$  keine Singularität und keinen Punkt aus  $\mathbb{C} \setminus G$ .  $\tilde{\gamma}$  ist nach Konstruktion nullhomolog in  $G \setminus S$ .  $\Rightarrow$  Cauchysatz für  $\tilde{\gamma}$  anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz - \sum_k n_\gamma(a_k) \int_{\gamma_k} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma} f(z)dz - 2\pi i \sum_k n_\gamma(a_k) \operatorname{res}_{a_k} f \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

**Bemerkung** Aus  $S = \emptyset$  folgt  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ . Der Residuensatz enthält also den Cauchy'schen Integralsatz als Spezialfall. Ersetzt man dann noch  $f$  durch  $\frac{f(\xi)}{\xi-z}$  ( $f$  holomorph auf  $G \setminus \operatorname{Sp}(\gamma)$ ,  $S = \emptyset$ ), so liegt genau eine isolierte Singularität vor, und zwar in  $z$ . Diese ist ein Pol 1. Ordnung mit  $\operatorname{res}_z \frac{f(\xi)}{\xi-z} = f(z)$ . Setzt man dieses nun in die Residuenformel ein, so erhält man die allgemeine Cauchy'sche Integralformel:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = n_\gamma(z) f(z)$$

Allerdings ist der Cauchy'sche Integralsatz nicht etwa überflüssig, da wir ihn im Beweis des Residuensatzes benutzen.

**Definition 19.2 (Logarithmische Ableitung)** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine meromorphe Funktion. Die Funktion  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  heißt logarithmische Ableitung von  $f$ .

Als erstes zählen wir mit Hilfe des Residuensatzes, angewendet auf die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion  $f$ , deren Null- und Polstellen:

Die Polstellen von  $f$  und deren Ableitung  $f'$  sind gleich (Laurententwicklung). Sei  $z \in G$  keine Nullstelle/Polstelle von  $f \Rightarrow$  die logarithmische Ableitung  $\frac{f'}{f}$  ist holomorph in  $z$ . Die Pol- und Nullstellen von  $f$  bilden die Polstellen von  $\frac{f'}{f}$ . Sei  $z_0$  eine Nullstelle/Polstelle von  $f$ . Dann gilt  $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , wobei  $g$  eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet um  $z_0$  ist mit  $g(z_0) \neq 0$ . Falls  $k > 0$ , liegt bei  $z_0$  eine Nullstelle vor, für  $k < 0$  ist  $z_0$  eine Polstelle. Es gilt  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ , wobei der Teil  $\frac{g'(z)}{g(z)}$  holomorph in  $z_0$  ist. Also ist  $\frac{f'}{f}$  in jedem Fall eine meromorphe Funktion mit einer einfachen Polstelle in  $z_0$ . Für das Residuum an dieser Stelle gilt dann:  $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'}{f} = k$ .

**Definition 19.3 (Rand)** Sei  $\gamma$  ein Zykel. Man sagt  $\gamma$  berandet das Gebiet  $A$ , wenn  $n_\gamma(z) = 0 \forall z \notin A$  und  $n_\gamma(z) = 1 \forall z \in A$ . Man nennt  $\gamma$  auch den Rand von  $A$ .

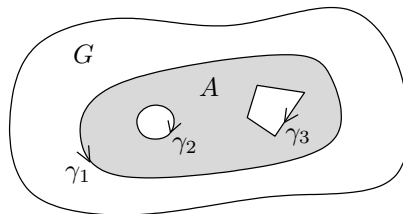


Abbildung 60:  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  berandet das Gebiet  $A$ .

**Satz 19.2** Sei  $f$  meromorph in einem Gebiet  $G$  und  $\gamma \subset G$  ein Zykel, der keine Null- oder Polstelle von  $f$  trifft und außerdem ein Gebiet  $A \subsetneq \mathbb{C}$  berandet. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_A - P_A$$

wobei  $N_A$  die Anzahl der Nullstellen und  $P_A$  die Anzahl der Polstellen von  $f$  in  $A$  sind (jeweils mit Vielfachheit gezählt).

**Beweis** Seien  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  die Pol- und Nullstellen der Funktion  $f$  und  $|k_i|$  die entsprechenden Vielfachheiten auf dem Gebiet  $A$ . Dabei gibt es nur endlich viele Pol- und Nullstellen in  $A$ , weil  $A$  abgeschlossen und Pol- und Nullstellen isoliert liegen. Dann ist  $f$  in der Form  $f(z) = (z - a_1)^{k_1} \cdot (z - a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - a_r)^{k_r} g(z)$  auf  $A$  darstellbar, wobei  $g(z)$  eine holomorphe Funktion ohne Null- und Polstellen ist. Die Ableitung von  $f$  ist:

$$\begin{aligned} f'(z) &= k_1(z - a_1)^{k_1-1} \cdot \dots \cdot (z - a_r)^{k_r} g(z) \\ &+ (z - a_1)^{k_1} \cdot k_2(z - a_2)^{k_2-1} \cdot \dots \cdot (z - a_r)^{k_r} g(z) \\ &+ \dots \\ &+ (z - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - a_r)^{k_r} g'(z) \end{aligned}$$

Die logarithmische Ableitung sieht dann folgendermaßen aus:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_1}{z - a_1} + \frac{k_2}{z - a_2} + \dots + \frac{k_r}{z - a_r} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$\frac{g'(z)}{g(z)}$  ist eine holomorphe Funktion, da  $g(z)$  keine Nullstellen mehr besitzt. Für die Residuen der Funktion  $\frac{f'}{f}$  an der Stelle  $a_i$  gilt nun:

$$\operatorname{res}_{a_i} \frac{f'}{f} = k_i$$

Mit der Residuenformel folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum_{a_i \in S \subset A} n_{\gamma}(a_i) \cdot \operatorname{res}_{a_i} \frac{f'}{f} = N_A - P_A$$

□

Kurvenintegrale über die logarithmische Ableitung haben aber auch noch eine andere, mehr geometrische Bedeutung. Immer wenn eine geschlossene Kurve  $\gamma$  im Definitionsbereich  $G$  einer meromorphen Funktion  $f$  keine der Null- und Polstellen trifft, gilt

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z}. \quad (6)$$

(Es gilt:  $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ )

Für geschlossene Wege  $\gamma$  ist aber  $\frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z}$  die Umlaufzahl von  $f \circ \gamma$  um 0. Daraus folgt dann sofort:

**Satz 19.3** Berandet der Zykel  $\gamma$  in  $G$  eine Teilmenge  $A \subset G$  und trifft keine der Null- und Polstellen einer in  $G$  meromorphen Funktion  $f$ , so ist die Differenz  $N_A - P_A$  der Null- und Polstellenzahl (mit Vielfachheiten) in  $A$  gleich der Umlaufzahl  $n_{f \circ \gamma}(0)$ .

**Beweis** Nur die Idee: Teile die Formel (6) durch  $\frac{1}{2\pi i}$ . Dann steht auf der rechten Seite die Def. von Umlaufzahl und auf der linken Seite das Integral aus dem Satz davor  $= N_A - P_A$ . □

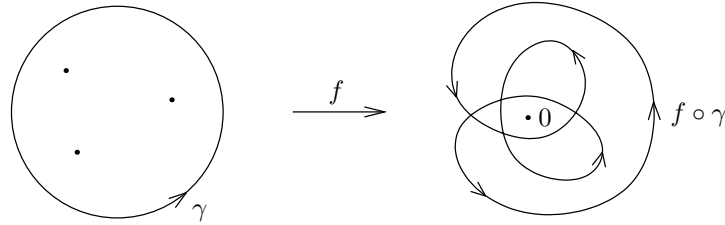


Abbildung 61: Hat  $f$  z. B. drei einfache Nullstellen in dem von  $\gamma$  berandeten Gebiet, so umläuft die Bildkurve  $f \circ \gamma$  dreimal den Punkt 0.

Damit kann man leicht folgendes beweisen:

**Satz 19.4 (Anzahl der  $a$ -Stellen einer rationalen Funktion)** *Ist  $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht-konstante rationale Funktion, so hängt die Anzahl (mit Vielfachheiten) der  $a$ -Stellen (d.h.  $f(z) = a$ ) von  $f$  in  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  nicht von  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  ab.*

**Beweis** Es genügt zu zeigen:  $f$  hat in  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  gleich viele  $a$ - und Polstellen. Sei o.B.d.A.  $a = 0$  (betrachte ansonsten die Funktion  $f - a$ ). Weiterhin können wir annehmen, dass  $f$  in  $\infty$  keine Pol- oder Nullstelle hat. Falls doch, so betrachten wir  $f(z_0 + \frac{1}{z})$ , wobei  $f$  an der Stelle  $z_0$  keine Null- oder Polstelle liegt.

Der geschlossene Weg  $\gamma_r(t) = re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  berandet die Kreisscheibe  $K_r(0)$  vom Radius  $r$  um den Nullpunkt. Für großes  $r$  liegen dann alle Null- und Polstellen in  $K_r(0)$ , und  $n_{f \circ \gamma_r}(0)$  ist somit die Differenz der Null- und Polstellenzahl von  $f$  insgesamt. Für  $r \rightarrow \infty$  konvergiert  $f \circ \gamma_r$  gegen den konstanten Weg  $t \mapsto f(\infty) \in \mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$ , umläuft also die Null für große  $r$  nicht mehr.  $\Rightarrow N_A - P_A = 0$ . Also gibt es genauso viele Null- (bzw.  $a$ -) wie Polstellen.  $\square$

**Satz 19.5 (Rouché)** *Sei  $\gamma$  ein Zykel auf einem Gebiet  $G$ , der eine Teilmenge  $A \subset G$  berandet. Seien  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $|g(z)| < |f(z)| \forall z \in Sp(\gamma)$ . Dann haben  $f$  und  $f + g$  gleich viele Nullstellen in  $A$ .*

**Beweis** Sei  $A = \bigcup A_k$ , wobei  $A_k$  die Zusammenhangskomponenten von  $A$  bezeichne. Jede dieser Komponenten wird berandet von einem Zykel  $\gamma_k$  und somit  $\gamma = \sum \gamma_k$ .

Definiere  $h_\tau(z) := f(z) + \tau g(z)$ ,  $\tau \in [0, 1]$ .  $h_\tau$  bildet  $f$  stetig nach  $f + g$  ab. Es gilt  $h_0(z) = f$ ,  $h_1(z) = f + g$ .

Betrachte nun eine Zusammenhangskomponente  $A_k$  mit Rand  $\gamma_k$ .  $f$  hat keine Nullstelle auf  $\gamma_k$ , da  $|g(z)| < |f(z)| \forall z \in \gamma$ . Es gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{h'_\tau(z)}{h_\tau(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f'(z) + \tau g'(z)}{f(z) + \tau g(z)} dz$$

Die linke Seite ist gleich  $N_{A_k}(h_\tau) - P_{A_k}(h_\tau) = N_{A_k}(h_\tau)$ , denn da mit  $f$  und  $g$  auch  $h_\tau$  holomorph ist besitzt  $h_\tau$  keine Polstellen in  $A_k \Rightarrow P_{A_k} = 0$ . Der rechte Term ist stetig weil  $|f(z)| > |g(z)|$  und damit  $\frac{1}{f(z) + \tau g(z)} \neq \infty$ .

**Behauptung:** Das Integral ist unabhängig von  $\tau$ .

**Beweis:**  $h$  ist stetig in  $\tau \Rightarrow \int h$  ist stetig in  $\tau$ . Ausserdem ist das Integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f'(z) + \tau g'(z)}{f(z) + \tau g(z)} dz$  ganzzahlig, weil es die Umlaufzahl von  $h_\tau \circ \gamma_k$  um 0 bestimmt. Deswegen gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{h'_{\tau_1}}{h_{\tau_1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{h'_{\tau_2}}{h_{\tau_2}} dz, \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$$

$\Rightarrow N_{A_k}(h_\tau) = N_{A_k}(h_0) = N_{A_k}(h_1)$  und damit  $N_{A_k}(f) = N_{A_k}(f + g)$ . Dies gilt für alle  $\gamma_k$ . Da  $A = \bigcup A_k$ , besitzt  $f$  auf dem Gesamtgebiet genauso viele Nullstellen, wie  $f + g$ .  $\square$

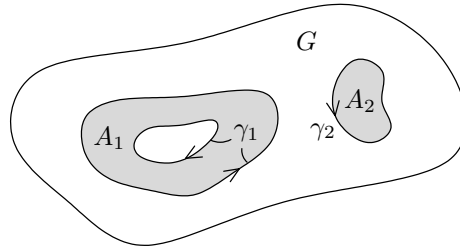


Abbildung 62: Der Zykel  $\gamma_1 + \gamma_2$  berandet das Gebiet  $A = A_1 \cup A_2$ .  $f$  und  $f + g$  haben in jedem  $A_i$  gleich viele Nullstellen  $\Rightarrow$  sie haben gleich viele Nullstellen in  $A$ .

**Korollar 19.6 (Fundamentalsatz der Algebra)** *Polynome auf  $\mathbb{C}$  mit  $\text{grad} = n \geq 1$  haben  $n$  Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).*

**Beweis** O.B.d.A. sei  $p$  ein normiertes Polynom vom Grad  $n$ , d.h. der führende Koeffizient sei 1. Weiter sei  $f(z) = z^n$  und demnach  $p = f + g$  für ein Polynom  $g$  vom Grad  $< n$ .

Auf einem Kreis mit Radius groß genug gilt demnach  $|f(z)| > |g(z)|$  und alle Nullstellen von  $p$  werden umlaufen. Ausserdem besitzt  $f$  eine  $n$ -fache Nullstelle (bei 0), nach dem Satz von Rouché hat also  $f + g = p$  ebenfalls  $n$  Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).  $\square$

## 20 Residuenkalkül

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Weitere Formeln zur Residuenbestimmung
- Berechnung von uneigentlichen reellen Integralen

Unter dem Residuenkalkül im engeren Sinn versteht man die Anwendung des Residuensatzes zur Berechnung gewisser reeller Integrale.

Bei den Voraussetzungen wird mehrmals vom Verhalten einer Funktion  $f(z)$  im Unendlichen oder am Punkt  $\infty$  die Rede sein. Damit ist dann das Verhalten von  $f(\frac{1}{z})$  bei 0 gemeint. Eine holomorphe Funktion  $f(z)$  hat also z.B. bei  $\infty$  eine isolierte Singularität oder einen Pol oder eine  $k$ -fache Nullstelle, wenn  $f(\frac{1}{z})$  am Nullpunkt eine isolierte Singularität bzw. einen Pol bzw. eine  $k$ -fache Nullstelle hat.

Bevor wir zur Berechnung von Integralen übergehen, noch ein paar Berechnungsregeln für Residuen:

**Lemma 20.1** Sei  $f(z)$  eine meromorphe Funktion mit einer Polstelle bei  $z_0$ , höchstens von der Ordnung  $k$ . Dann gilt:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} (z-z_0)^k f(z) \right|_{z=z_0}$$

**Beweis** Sei  $g(z) := (z-z_0)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k \dots$ . Die Funktion  $g(z)$  ist holomorph.  $\frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} g(z)|_{z=z_0} = (k-1)(k-2)(k-3) \dots \cdot 1 c_{-1} = (k-1)! c_{-1}$ . Daraus folgt für das Residuum:  $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} (z-z_0)^k f(z) \right|_{z=z_0}$ .  $\square$

**Lemma 20.2 (Residuenbestimmung bei einfachen Nennernullstellen)** Die Funktionen  $g, h : G \rightarrow \mathbb{C}$  seien holomorph und  $h$  habe eine einfache Nullstelle in  $z_0 \in G$ . Dann gilt:

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

**Beweis** Allgemein gilt:  $\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$  für einfache Polstellen  $a$  einer meromorphen Funktion  $f$ . Dies folgt direkt aus der Laurententwicklung. Damit gilt für das Residuum von  $f = \frac{g}{h}$  an der Stelle  $z_0$ :

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Ausserdem gilt  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z-z_0}{h(z)} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{h'(z)} = \frac{1}{h'(z_0)}$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Der Prototyp für die Anwendung des Residuenkalküls auf reelle Integrale ist folgender:

**Lemma 20.3** Sei  $R(z)$  eine rationale Funktion, die bei  $\infty$  mindestens eine doppelte Nullstelle und keinen Pol auf der reellen Achse hat. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{res}_a R(z)$$

wobei  $a$  die Polstellen von  $R(z)$  angeben.

**Beweis** Die rationale Funktion  $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist insbesondere meromorph mit endlich vielen Polstellen. Wähle  $r$  groß genug, so dass alle Polstellen  $a$  von  $R$  mit  $\operatorname{Im} a > 0$  in der Halbkreisscheibe mit Radius  $r$  liegen.

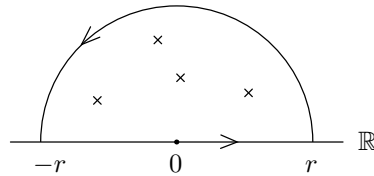


Abbildung 63: Integrationsweg aus Lemma 20.3.

Anwendung des Residuensatzes:

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{res}_a R(z) = \underbrace{\int_{-r}^r R(x) dx}_I + \underbrace{\int_{\gamma_r} R(z) dz}_{II}$$

wobei  $\gamma_r = r \cdot e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ .

Betrachtung von I: Für  $r \rightarrow \infty$  gilt:  $\int_{-r}^r R(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ , also das gesuchte Integral.

Für II gilt:  $\int_{\gamma_r} R(z) dz = \int_0^\pi R(re^{it}) \cdot ire^{it} dt$ . Des Weiteren hat  $R(z)$  im Unendlichen eine doppelte Nullstelle,  $r$  konvergiert jedoch nur einfach gegen  $\infty$ .  $\Rightarrow R(re^{iz}) \cdot ire^{iz} \rightarrow^{r \rightarrow \infty} 0$ , und damit verschwindet auch das Integral. Also gilt Behauptung.  $\square$

### Beispiel 20.1 (Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ )

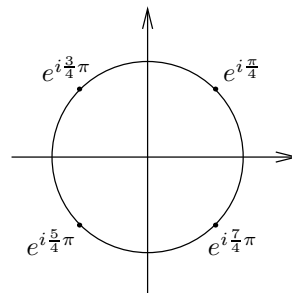
$(1+x^4) = 0 \Leftrightarrow x = i^n e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ . Wir betrachten nun den Quotienten aus  $g(z) = z^2$  und  $h(z) = 1+z^4$  mit  $h'(z) = 4z^3$ :

$\frac{g(z)}{h(z)}$  ist rational und hat eine doppelte Nullstelle in  $\infty$ . Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i (\operatorname{res}_{e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{g}{h} + \operatorname{res}_{ie^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{g}{h}).$$

Da  $i^n e^{i\frac{\pi}{4}}$  eine einfach Nullstelle von  $h(z)$  ist, gilt  $\operatorname{res}_{i^n e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{g}{h} = \frac{g(i^n e^{i\frac{\pi}{4}})}{h'(i^n e^{i\frac{\pi}{4}})}$  und somit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx &= 2\pi i \left( \frac{g(e^{i\frac{\pi}{4}})}{h'(e^{i\frac{\pi}{4}})} + \frac{g(ie^{i\frac{\pi}{4}})}{h'(ie^{i\frac{\pi}{4}})} \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{i}{4ie^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{-i}{4(-i)ie^{i\frac{\pi}{4}}} \right) \\ &= \frac{\pi i}{2} (e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}}) \\ &= \frac{\pi i}{2} 2i (-\sin(\frac{\pi}{4})) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



Im Folgenden werden wir die Bedingung der doppelten Nullstelle im Unendlichen aus Lemma (20.3) etwas abschwächen:

Es stellt sich heraus, dass der Faktor  $e^{iz}$  das Konvergenzverhalten eines Integrals über den Hilfsbogen  $\gamma_r = r \cdot e^{iz}$ ,  $z \in [0, \pi]$  verbessert. In diesem Fall reicht es aus, dass die Nullstelle des Restes bei  $\infty$  mindestens einfach ist. Dafür verliert man allerdings die absolute Konvergenz:

**Lemma 20.4** Sei  $R(z)$  eine rationale Funktion mit einer Nullstelle in  $\infty$ .  $R$  habe keinen Pol auf der reellen Achse. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{res}_a R(z)e^{iz}.$$

**Bemerkung** Das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx$  kann man darstellen als  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin(x) dx$ .

**Beweis** Sei  $r$  so groß, dass alle Pole  $a$  von  $R(z)$  mit  $\operatorname{Im} a > 0$  im Rechteck  $(r, r + ir, -r + ir, -r)$  enthalten sind.

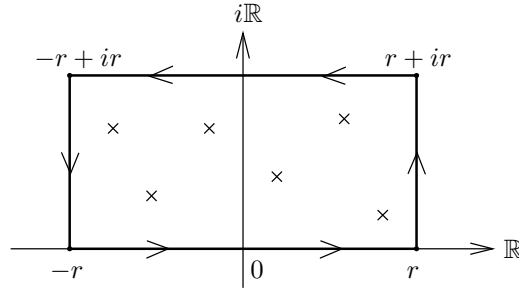


Abbildung 64: Integrationsweg aus Lemma 20.4

Dann gilt nach dem Residuensatz:

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{res}_a R(z)e^{iz} = \int_{-r}^r R(x)e^{ix} dx + \int_r^{r+ir} R(z)e^{iz} dz + \int_{-r+ir}^{-r} R(z)e^{iz} dz + \int_{r+ir}^{-r+ir} R(z)e^{iz} dz.$$

Es ist  $|\int_r^{r+ir} R(z)e^{iz} dz| \leq \varepsilon \int_0^r e^{-t} dt$ , da

1.  $|e^{iz}| = |e^{-t+ir}| = e^{-t}$  mit  $z = r + it$  und
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists r \in \mathbb{R} \forall |z| > r : |R(z)| < \varepsilon$  (Nullstelle in  $\infty$ ).

Also gilt  $|\int_{r+ir}^{-r+ir} R(z)e^{iz} dz| \leq \varepsilon(1 - e^{-r}) < \varepsilon$ , und somit

$$\int_r^{r+ir} R(z)e^{iz} dz \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \int_{-r+ir}^{-r} R(z)e^{iz} dz \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Für das Integral  $\int_{r+ir}^{-r+ir} R(z)e^{iz} dz$  gilt:

$$\left| \int_{r+ir}^{-r+ir} R(z)e^{iz} dz \right| \leq \left| \int_{r+ir}^{ir} R(z)e^{iz} dz \right| + \left| \int_{ir}^{-r+ir} R(z)e^{iz} dz \right| \leq 2\varepsilon \int_0^r e^{-t} dt.$$

Die letzte Ungleichung folgt durch Substitution (im ersten Integral mit  $z = r + ir - t$ , im Zweiten mit  $z = ir - t$ ), und die Abschätzung  $|e^{iz}| = |e^{-it-r+(ir)}| = e^{-r}$ .

Wie zuvor geht für  $r \rightarrow \infty$  das Integral  $\int_0^r e^{-t} dt$  gegen 1 und da  $\varepsilon \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ , folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 20.2 (Berechnung des Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2+x^2} dx$ )** Es ist  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2+x^2} dx = \operatorname{Re}(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2} dx)$  mit  $a^2 + x^2 > 0$  für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , wir können also Lemma 20.4 anwenden:

Berechnung der Singularitäten:  $z^2 + a^2 = (z + ia)(z - ia)$ , der Nenner besitzt also zwei einfache Nullstellen  $ia$  und  $-ia$ .  $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2+x^2} dx = \operatorname{Re}(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2} dx) = \operatorname{Re}(2\pi i \cdot \operatorname{res}_{ia} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2}) \stackrel{\text{Lemma 20.2}}{=} \pi \frac{e^{-a}}{a}$ .



Dabei ist zu beachten, dass wir den Fall  $a > 0$  betrachtet haben. Denn obwohl im ursprünglichen Integral  $a^2$  vorkommt, also das Vorzeichen von  $a$  keinen Einfluss auf den Wert des Integrals hat, muss man folgendes berücksichtigen:

Wir berechnen das Integral nämlich mit Hilfe aller Residuen in der oberen Halbebene der auf  $\mathbb{C}$  erweiterten Funktion, und die Polstelle  $ia$  die wir betrachtet haben liegt nur in der oberen Halbebene für  $a > 0$ ! Das dies wichtig ist sieht man daran, dass der von uns berechnete Wert des Integrals  $\pi \frac{e^{-a}}{a}$  für  $a < 0$  divergiert, für  $a > 0$  jedoch nicht.

Ein weiteres Beispiel zeigt, dass man den Satz so ähnlich auch auf Funktionen anwenden kann, die bei 0 eine hebbare Singularität haben.

**Beispiel 20.3 (Berechnung des Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ )** Im Prinzip löst man dieses Integral wie  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx$ :

$R(x) = \frac{1}{x}$  hat einen echten Pol in  $x = 0$ . Da  $x = 0$  jedoch eine hebbare Singularität der Funktion  $\frac{\sin x}{x}$  ist, ist diese Funktion stetig fortsetzbar und somit integrierbar.

Es ist  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$ ,  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

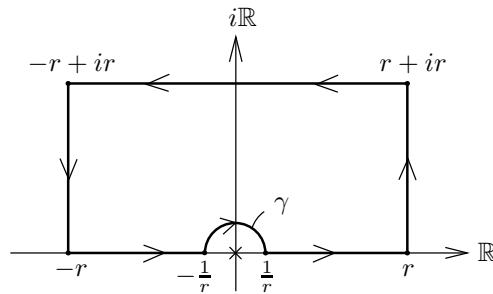


Abbildung 65: Integrationsweg aus Beispiel 20.3

Residuensatz  
 $\Rightarrow$

$$0 = \left( \int_{-r}^{-\frac{1}{r}} + \int_{\tilde{\gamma}} + \int_{\frac{1}{r}}^r + \underbrace{\int_r^{r+ir}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{r+ir}^{-r+ir}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{-r+ir}^{-r}}_{\rightarrow 0} \right) \left( \frac{e^{iz}}{z} dz \right).$$

Somit gilt (im Grenzfalle)

$$\int_{\frac{1}{r}}^r \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-r}^{-\frac{1}{r}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{e^{iz}}{z} dz, \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{r} e^{it}, t \in [0, \pi].$$

Da  $\int_{-r}^{-\frac{1}{r}} \frac{e^{iz}}{z} dz \stackrel{w=-z}{=} \int_r^{\frac{1}{r}} \frac{e^{-iw}}{w} dw$ , gilt:

$$\int_{\frac{1}{r}}^r \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^{\frac{1}{r}} \frac{e^{-iz}}{z} dz = \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} dz = \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{2i \sin z}{z} dz.$$

Wir haben also

$$2i \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{\sin z}{z} dz = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

und somit

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{e^{iz}}{z} dz \stackrel{z=\varepsilon e^{it}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{it}} dt = \pi i.$$

Also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Abschließend betrachten wir Integrale von 0 bis  $\infty$ :

Manche von ihnen lassen sich aus Symmetriegründen auf die schon behandelten Fälle zurückführen, so z.B.  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ . Wenn das jedoch nicht geht, sind wir in einer ganz anderen Situation, weil wir den Integrationsweg nicht einfach "im Unendlichen schließen" können. Das folgende Lemma zielt darauf ab, für bestimmte Integrale trotzdem eine Berechnungsweise zu finden.

Dafür definieren wir den Komplexen Logarithmus als  $\log(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Dieser Logarithmus ist auf  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty]$  definiert,  $\log : \mathbb{C} \setminus [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$ .

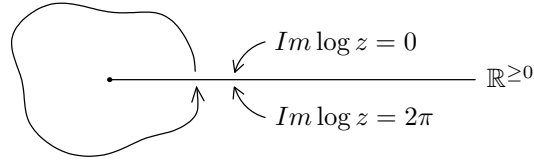


Abbildung 66: Komplexer Logarithmus

**Lemma 20.5** Sei  $0 < \lambda < 1$  und  $R(z)$  rational ohne Pole auf der reellen Achse mit einer mindestens doppelten Nullstelle in  $\infty$ . Weiter sei  $R(z)$  bei Null holomorph, oder habe dort einen Pol erster Ordnung. Dann gilt:

$$\int_0^\infty x^\lambda R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \lambda}} \sum_{a \neq 0} \text{res}_a(z^\lambda R(z))$$

**Beweis** Sei  $r$  wieder groß genug. Dann gilt nach dem Residuensatz:

$$2\pi i \sum_{a \neq 0} \text{res}_a(z^\lambda R(z)) = \int_{\frac{i}{r}}^{r + \frac{i}{r}} R(z) z^\lambda dz + \int_{\delta_r} + \int_{r - \frac{i}{r}}^{-\frac{i}{r}} + \int_{\gamma_r}$$

wobei  $\gamma_r(t) = \frac{1}{r} e^{-it}$ ,  $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  und  $\delta_r(t) = r e^{it}$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ .

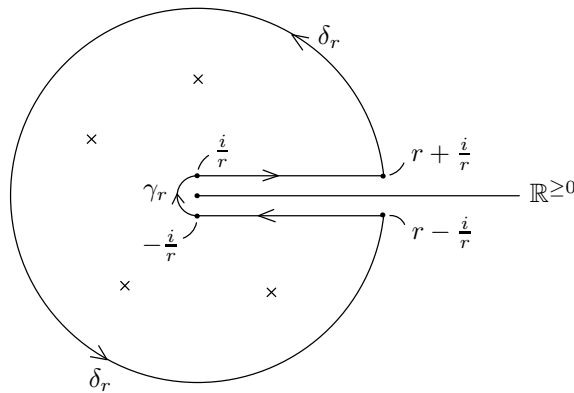


Abbildung 67: Integrationsweg aus Lemma 20.5

Dann gilt:

1.  $\int_{\delta_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ , weil  $R(z)$  in  $\infty$  eine doppelte Nullstelle hat, und das ist "mehr" als eine Polstelle der Ordnung  $\lambda < 1$  von  $z^\lambda$ . Daraus folgt  $R(z)z^\lambda$  hat eine  $2 - \lambda > 1$  fache Nullstelle im Unendlichen.  $\Rightarrow$  für  $r \rightarrow \infty$  geht das Integral gegen 0 (Rechnung wie im Beweis von Lemma 20.3, II. Integral).
2.  $\int_{\gamma_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ , denn

$$\int_{\gamma_r} x^\lambda R(z) dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1}{r} e^{-it}\right)^\lambda R\left(\frac{1}{r} e^{-it}\right) \frac{1}{r} i e^{-it} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1}{r}\right)^{1+\lambda} R\left(\frac{1}{r} e^{-it}\right) i e^{-it(1+\lambda)} dt$$

Für  $r \rightarrow \infty$  geht  $(1 + \lambda)$ -fach  $(\frac{1}{r})^{\lambda+1} \rightarrow 0$ .  $R(\frac{1}{r}e^{-it}) \rightarrow R(0)$ , wobei  $R(0)$  höchstens eine einfache Polstelle ist. Also geht das Integral gegen 0.

Insgesamt folgt also:

$$2\pi i \sum_{a \neq 0} \operatorname{res}_a(z^\lambda R(z)) \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} \underbrace{\int_0^\infty x^\lambda R(x) dx}_{\operatorname{Im} \log z = 0} - \underbrace{\int_0^\infty x^\lambda R(x) e^{2\pi i \lambda} dx}_{\operatorname{Im} \log z = 2\pi, z^\lambda = |z|^\lambda e^{\lambda 2\pi i}} = (1 - e^{2\pi i \lambda}) \int_0^\infty x^\lambda R(x) dx.$$

□

## 21 Kompakte Konvergenz

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Def. kompakt konvergent und lokal gleichmäßig konvergent sowie die Äquivalenz dieser Begriffe
- Satz von Weierstraß und Satz von Hurwitz
- Übertragung von a-Stellen von  $f_n$  auf  $f$

### Definition 21.1 (Kompakte & lokal gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen)

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und nicht leer, und  $(f_n : U \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen.

1.  $(f_n)$  heißt kompakt konvergent, falls  $(f_n)$  auf allen kompakten Mengen  $K \subset U$  gleichmäßig gegen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 \forall z \in K : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ .
2.  $(f_n)$  heißt lokal gleichmäßig konvergent, falls jeder Punkt aus  $U$  eine Umgebung besitzt, in der  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert:  $\forall z_0 \in U \exists r > 0 : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \forall z \in D_r(z_0) \forall n \geq n_0$ .

### Bemerkung kompakt konvergent $\Leftrightarrow$ lokal gleichmäßig konvergent

*kompakt konvergent  $\Rightarrow$  lokal glm. konvergent:* Sei  $z_0 \in U$ . Lege einen kompakten Kreis um  $z_0$ . So ein Kreis existiert immer, weil  $U$  offen und somit ein offener Kreis mit dem Radius  $\varepsilon$  um  $z_0$  gelegt werden kann. Dann ist aber auch der kompakte Kreis mit dem Radius  $\frac{\varepsilon}{2}$  Teilmenge von  $U$ . Da  $K$  kompakt ist, konvergiert  $(f_n)$  auf dem Gebiet gleichmäßig. Wenn wir nun den Rand des Kreises wegnehmen, haben wir einen offenen Kreis, auf dem die Reihe gleichmäßig konvergiert.

*lokal glm. konvergent  $\Rightarrow$  kompakt konvergent:* Sei  $K \subset U$  eine kompakte Menge. Betrachte alle Punkte  $z \in K$ . Dann gibt es um jeden Punkt eine offene Umgebung, auf der  $(f_n)$  gleichmäßig konvergiert. Diese offenen Umgebungen bilden eine offene Überdeckung von unserem Kompaktum  $K$ . Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $\{U_i\}_{i=1, \dots, k}$ . Auf jedem  $U_i$  konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig. Also konvergiert  $(f_n)$  auch auf ganz  $K$  lokal gleichmäßig, indem man  $n_0 = \max_{i=1, \dots, k} n_0^{(i)}$  wählt.

### Satz 21.1 (Satz von Weierstraß) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und nicht leer, und $(f_n : U \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen die kompakt gegen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert.

Dann ist  $f$  holomorph und für alle  $k \in \mathbb{N}$  konvergiert auch  $(f_n^{(k)})$  kompakt gegen  $f^{(k)}$ .

### Beweis

1.  $f$  ist holomorph: Seien  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  die Funktionen der Folge und  $f$  die Grenzfunktion. Nach dem Satz von Morera genügt es zu zeigen, dass  $\int_\gamma f(z) dz = 0$  für die Randkurve  $\gamma$  einer jeden samt Rand in  $U$  gelegenen Dreiecksfläche gilt. Aber wegen der kompakten Konvergenz ist

$$\int_\gamma \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \int_\gamma f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma f_n(z) dz = 0.$$

2.  $(f'_n)$  konvergiert kompakt gegen  $f'$ : Wir zeigen  $f'_n \rightarrow f'$  lokal gleichmäßig.  
Sei  $z_0 \in U$ ,  $D_{2r}(z_0) = \{z - z_0 \mid |z - z_0| \leq 2r\} \subset U$  für ein  $r > 0$  geeignet und  $z \in D_r(z_0)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f'_n(z) - f'(z) &\stackrel{\text{Korollar 9.3}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(z_0)} \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \\ \Rightarrow |f'_n(z) - f'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi 2r \frac{\max_{\xi \in \partial D_{2r}(z_0)} |f_n(\xi) - f(\xi)|}{\min_{\xi \in \partial D_{2r}(z_0)} |\xi - z|^2} \\ &\leq \frac{2r}{r^2} \max_{\xi \in \partial D_{2r}(z_0)} |f_n(\xi) - f(\xi)| \end{aligned}$$

Da  $\partial D_{2r}(z_0)$  kompakt ist, gilt nach der Voraussetzung der kompakten Konvergenz

$$\max_{\xi \in \partial D_{2r}(z_0)} |f_n(\xi) - f(\xi)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow f'_n \rightarrow f'$  lokal gleichmäßig.

3.  $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$  folgt direkt durch Induktion.

□

**Satz 21.2 (Satz von Hurwitz)** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $(f_n : G \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen die kompakt gegen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Sei  $a \in \mathbb{C}$  und jede Funktion  $f_n$  habe höchstens  $m$   $a$ -Stellen (mit Vielfachheit gezählt).

Dann besitzt auch  $f$  höchstens  $m$   $a$ -Stellen, oder ist konstant mit  $f(z) = a \quad \forall z \in G$ .

**Beweis** oBdA  $a = 0$  und  $m < \infty$ .

*Annahme:*  $f$  ist nicht konstant und hat mindestens  $m + 1$  Nullstellen (mit Vielfachheiten).

Betrachte also eine Menge  $\mathcal{M}$  von  $m + 1$  Nullstellen der Funktion  $f$ . Seien  $z_1, z_2, \dots, z_r$  die paarweise verschiedenen Punkte aus dieser Menge (d.h. ohne Vielfachheiten). Da  $f \neq \text{const}$ , sind alle Nullstellen von  $f$  endlicher Ordnung, also ist  $\mathcal{M}$  diskret. Wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass  $D_\varepsilon(z_i) \cap D_\varepsilon(z_j) = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Setze  $K := \partial D_\varepsilon(z_1) \cup \partial D_\varepsilon(z_2) \cup \dots \cup \partial D_\varepsilon(z_r)$ .  $K$  ist kompakt.

Nach Wahl von  $\varepsilon$  gilt

$$\min_{z \in K} |f(z)| > \delta > 0,$$

da die Nullstellen alle im Innerern der Scheiben liegen.

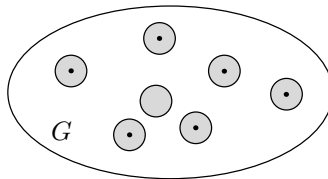


Abbildung 68: Sämtliche Nullstellen der Grenzfunktion werden in kleine Kreisscheiben eingeschlossen. Für jede Kreisscheibe wird dann der Satz von Rouché auf  $f$  und  $f_n$  (für große  $n$ ) angewandt.

Da  $f_n$  kompakt gegen  $f$  konvergiert existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\forall n \geq N \quad |f_n(z) - f(z)| < \delta \quad \forall z \in K$   
 $\Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in K, \forall n > N_0. \Rightarrow f_n = f + (f_n - f)$  hat genauso viele Nullstellen wie  $f$  (Satz von Rouché). Widerspruch zur Annahme, dass  $f_n$  nur  $m$  Nullstellen hat. □

Das folgende Korollar wird für den Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes gebraucht.

**Korollar 21.3** Sei  $G$  ein Gebiet und  $(f_n : G \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge injektiver, holomorpher Funktionen. D.h. die Ableitungen verschwinden nirgends und  $\forall a \in \mathbb{C}$  besitzt jedes  $f_n$  höchstens eine  $a$ -Stelle. Falls  $f_n \rightarrow f$  kompakt konvergiert, so ist  $f$  holomorph und ebenfalls injektiv, oder konstant.

### Bemerkung

1. Sei  $f$  holomorph mit nicht verschwindender Ableitung in  $z_0$ :  $f'(z_0) \neq 0$ .

Dann ist  $f$  winkelerhaltend in  $z_0$ .

Seien  $\alpha, \beta$  zwei Geraden und  $\varphi = \arg \frac{\alpha}{\beta}$  der Winkel zwischen den beiden Geraden. Bilden wir nun  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $f$  auf  $\mathbb{C}$  ab, dann gilt an dem Schnittpunkt der beiden Funktionen  $f \circ \alpha$  und  $f \circ \beta$ , dass der Winkel  $\psi$  zwischen den Tangenten am Punkt  $f(z_0)$  gleich dem Winkel  $\varphi$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  bleibt:

- Die Tangente in Richtung  $f \circ \alpha$  am Punkt  $f(z_0)$  hat die Form:  $T_\alpha(t) = f(z_0) + t \cdot f'(\alpha(z_0)) \cdot \alpha'(z_0)$ .
- Die Tangente an  $f \circ \beta$  ist  $T_\beta(t) = f(z_0) + t \cdot f'(\beta(z_0)) \cdot \beta'(z_0)$ .

Also gilt  $\psi = \arg \frac{T_\beta'}{T_\alpha'} = \varphi$ .

Gilt dies für alle Punkte des Definitionsbereiches, so ist  $f$  insgesamt winkelerhaltend und man nennt  $f$  *konform*.

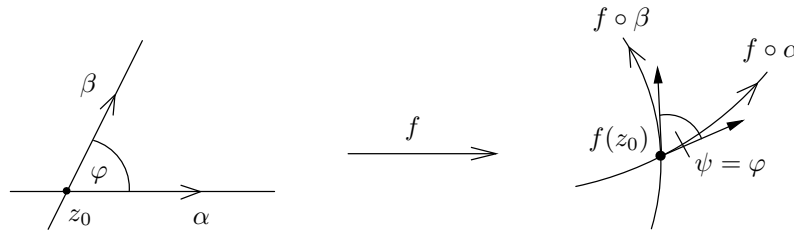


Abbildung 69: Konforme Abbildung  $f$

2. Die analoge reelle Situation ist komplizierter: Seien  $(f_n), f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen und  $f_n \rightarrow f$ . Besitzen alle  $f_n$  eine Nullstelle, so hat auch  $f$  eine Nullstelle.

**Aber:** Auch falls kein  $f_n$  eine Nullstelle hat, so kann  $f$  trotzdem eine Nullstelle besitzen.

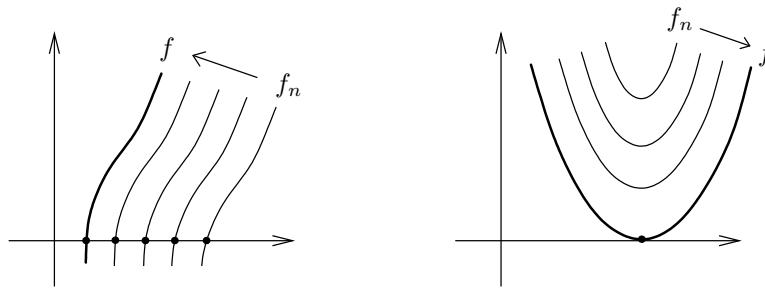


Abbildung 70: Für Funktionen  $(f_n), f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n \rightarrow f$  gilt unser Ergebnis nicht.

**Beispiel 21.1 (Kompakte Konvergenz injektiver Funktionen gegen eine konstante Funktion)**

$$f_n(z) = \frac{z}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \equiv 0.$$

## 22 Konvergenzsätze

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Def. lokal beschränkt
- lokal beschränkt + punktweise konvergent  $\Rightarrow$  kompakt konvergent
- Satz von Montel, Satz von Vitali
- Ableitungskriterium
- Def. lokal beschränkte Familie & normale Familie

**Definition 22.1 (Lokal beschränkte Funktionenfolgen)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und nicht leer, und  $(f_n : U \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen.

$(f_n)$  heißt lokal beschränkt, falls zu jedem  $z_0 \in U$  ein  $\delta = \delta(z_0) > 0$  und ein  $M = M(z_0) > 0$  existieren mit  $|f_n(z)| \leq M \forall z \in D_\delta(z_0)$  und  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 22.1** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und nicht leer, und  $(f_n : U \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Falls  $(f_n)$  auf einer dichten Teilmenge von  $U$  punktweise konvergiert, so konvergiert  $(f_n)$  kompakt. (Lokal beschränkt + punktweise konvergent  $\Rightarrow$  kompakt konvergent).

**Beweis** Wir zeigen:  $f_n \rightarrow f$  lokal gleichmäßig

$\Leftrightarrow \forall z_0 \in U \exists r > 0 : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  so dass  $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$  für  $\forall z \in D_r(z_0)$  und  $\forall n, m \geq n_0$ .

Idee:  $|f_n(z) - f_m(z)| < |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_m(z)|$  wobei  $a$  ein Punkt aus der Konvergenzmenge ist.

Es gilt  $|f_n(a) - f_m(a)| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ , da die Folge in  $a$  punktweise konvergiert.

Wir betrachten  $|f_n(z) - f_n(a)|$ :

Sei  $z_0 \in U$  und  $2r > 0$ , so dass  $|f_n(z)| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$  und  $\forall z \in \overline{D_{2r}(z_0)} \subset U$ . Das ist möglich, da die Folge lokal beschränkt ist. Seien weiter  $z, z' \in D_r(z_0)$ . Dann gilt mit der Cauchy Integralformel für Ableitungen (Korollar 9.3):

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_n(z')| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(z_0)} \frac{f_n(\rho)}{\rho - z} - \frac{f_n(\rho)}{\rho - z'} d\rho \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| (z - z') \int_{\partial D_{2r}(z_0)} \frac{f_n(\rho)}{(\rho - z)(\rho - z')} d\rho \right| \leq \frac{|z - z'| M}{2\pi} \frac{2\pi 2r}{r^2} = \frac{2M}{r} |z - z'| \end{aligned}$$

Dies ist unabhängig von  $n$  (im Allgemeinen heißt das gleichgradig stetig).

Sei  $\varepsilon > 0$ . Setze  $\delta = \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{r}{2M}$ . Wähle nun endlich viele Konvergenzpunkte  $a_1, a_2, \dots, a_r \in \overline{D_r(z_0)}$ , so dass jedes  $z \in \overline{D_r(z_0)}$  höchstens  $\delta$  von einem der  $a_i$  entfernt ist. Das ist möglich, da die Konvergenzmenge dicht ist und  $\overline{D_r(z_0)}$  kompakt. Wähle nun  $n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(a_i) - f_m(a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall n, m \geq n_0 \forall i = 1, \dots, r$ . Das ist möglich, weil  $f_n$  in  $a_i$  gegen  $f$  konvergiert. Dann gilt für  $z \in \overline{D_r(z_0)}$  und  $\forall n, m \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &< |f_n(z) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f_m(a_i)| + |f_m(a_i) - f_m(z)| \\ &\leq \frac{2M}{r} |z - a_i| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2M}{r} |z - a_i| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

mit  $a_i$  geeignet. □

**Satz 22.2 (Satz von Montel)** Jede lokal beschränkte Folge von holomorphen Funktionen besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.

**Beweis** Sei  $(f_n : U \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  also eine beliebige lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Nach Lemma (22.1) ist nur zu zeigen, dass eine Teilfolge existiert, die punktweise auf einer dichten Menge konvergiert.

Wähle eine abzählbare dichte Menge  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset U$ .

Idee: Diagonalverfahren

1. Die Punktfolge  $(f_n(a_1))_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt  $\Rightarrow \exists$  eine konvergente Teilpunktfolge  $(f_{n_i}(a_1))_{i \in \mathbb{N}}$ . Wähle nun die entsprechenden Funktionen und nenne sie  $f_{1,1}; f_{1,2}; f_{1,3}; \dots \rightsquigarrow (f_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ .
2.  $(f_{1,n}(a_2))_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt  $\Rightarrow \exists$  eine in  $a_2$  konvergente Teilfolge von Funktionen  $f_{2,1}; f_{2,2}; f_{2,3}; \dots \rightsquigarrow (f_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Dann konvergiert die Diagonalfolge  $(f_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$  auf der dichten Teilmenge  $\{a_1, a_2, \dots\}$ , und nach dem Lemma also kompakt auf ganz  $G$ .  $\square$

**Satz 22.3 (Satz von Vitali)** Sei  $G \subsetneq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $(f_n : G \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Sei weiter  $z_0 \in G$ , und  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset G$  eine Folge in  $G$  mit  $z_k \neq z_0$ ,  $z_k \rightarrow z_0$ . Es existiere  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_k) =: f(z_k) \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert  $(f_n)$  kompakt.

**Beweis** Nach Lemma (22.1) genügt es zu zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \forall z \in G$  existiert (punktweise Konvergenz überall), da  $G$  dicht in  $G$  liegt.

Da die Funktionenfolge lokal beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Montel eine kompakt konvergente Teilfolge  $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , d.h.  $f(z) := \lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(z) \forall z \in G$  existiert.

Angenommen  $\exists a \in G$ , so dass  $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen  $f(a)$  konvergiert:

Da die Zahlenfolge  $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(f_{n_l}(a))_{l \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_l}(a) = w \neq f(a)$ . Die lokal beschränkte Folge der entsprechenden Funktionen  $(f_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$  besitzt wiederum nach dem Satz von Montel eine kompakt konvergente Teilfolge  $(f_{n_{l_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ , also existiert  $g(z) := \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_{l_m}}(z) \forall z \in G$ . Nach Voraussetzung konvergiert  $(f_n(z_k)) \forall z_k \in G$ . Also gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(z_k) = f(z_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_{l_m}}(z_k) = g(z_k) \forall k \in \mathbb{N}.$$

Also  $f(z_k) = g(z_k)$  entlang der Folge  $z_k \rightarrow z_0$  mit einem Häufungspunkt  $z_0 \in G$ . Mit dem Identitätssatz folgt  $f(z) = g(z) \forall z \in G$ , also insbesondere  $f(a) = g(a)$ . Das ist ein Widerspruch, da  $g(a) \neq f(a)$  nach Konstruktion, also folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 22.4 (Ableitungskriterium)** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, und  $(f_n : G \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Sei weiter  $z_0 \in G$  so, dass  $(f_n^{(k)}(z_0))_{n \in \mathbb{N}} \forall k \in \mathbb{N}$  konvergiert. Dann konvergiert  $(f_n)$  kompakt.

**Beweis** Wie beim Satz von Vitali.

Annahme:  $\exists z_1 \in G : f(z_1) \neq g(z_1)$ .

$f, g$  sind holomorph, und nach Voraussetzung gilt

$$f^{(m)}(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^{(m)}(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(m)}(z_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_l}^{(m)}(z_0) = g^{(m)}(z_0) \forall m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow (f - g)^{(m)}(z_0) = 0 \forall m = 0, 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow z_0$  ist eine unendliche Nullstelle von  $(f - g) \Rightarrow (f - g)(z) = 0$  in einer offenen Umgebung  $U_0$  um  $z_0$  (Potenzreihenentwicklung). Mit dem Identitätssatz folgt  $f - g \equiv 0$ . Widerspruch. Behauptung folgt.  $\square$



**Definition 22.2 (Normale & lokal beschränkte Familien von Funktionen)**

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  nicht leer und offen, und sei  $\mathcal{F}$  eine Familie holomorpher Funktionen auf  $U$ .

1.  $\mathcal{F}$  heißt lokal beschränkt, falls zu jedem  $z_0 \in U$  ein  $r > 0$  und ein  $M > 0$  existieren mit  $|f(z)| \leq M \forall z \in D_r(z_0), \forall f \in \mathcal{F}$ .
2.  $\mathcal{F}$  heißt (endlich) normal, falls man aus jeder Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n \in \mathcal{F}$  eine kompakt konvergente Teilfolge auswählen kann.

**Satz 22.5 (Version des Satzes von Montel)** Eine Familie  $\mathcal{F}$  ist genau dann normal, wenn sie lokal beschränkt ist.

**Beweis**

”  $\Leftarrow$  ” Satz von Montel.

”  $\Rightarrow$  ” Sei  $\mathcal{F}$  endlich normal.

Angenommen  $\mathcal{F}$  sei nicht lokal beschränkt, d.h.  $\exists z_0$  so dass für alle festen  $r > 0$  man eine Folge  $(f_n)$  von Funktionen aus  $\mathcal{F}$  wählen kann, für die gilt:  $\forall n \in \mathbb{N} \exists z_n \in \overline{D_r(z_0)} : |f_n(z_n)| > n$ .  
 Nach Voraussetzung existiert eine kompakt konvergente Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_n)$ . Diese konvergiert also gleichmäßig auf  $\overline{D_r(z_0)}$  gegen eine Funktion  $f$ . Nach dem Satz von Weierstraß (21.1) ist  $f$  als Grenzwert einer kompakt konvergenten Folge holomorpher Funktionen ebenfalls holomorph. Ausserdem ist  $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge, da  $z_{n_k} \in \overline{D_r(z_0)} \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$  konvergente Teilfolge  $(z_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}, z_{n_{k_l}} \rightarrow \hat{z} \in \overline{D_r(z_0)}$ . Es konvergiert insbesondere auch  $f_{n_{k_l}}$  gleichmäßig gegen  $f$  auf  $\overline{D_r(z_0)}$ .  $\Rightarrow \left| f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}}) \right| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} |f(\hat{z})| < \infty$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $|f_{n_{k_l}}(z_{n_{k_l}})| > n_{k_l} \rightarrow \infty$ , also folgt die Behauptung.

□

## 23 Der Riemann'sche Abbildungssatz

Das Grundproblem der Theorie der konformen Abbildungen lautet: Gegeben seien zwei Gebiete  $D$  und  $D^*$ ; gesucht ist eine konforme Abbildung des Gebietes  $D$  auf das Gebiet  $D^*$ . Dann spricht man auch davon, dass die beiden Gebiete konform äquivalent sind. Für die Lösung dieser Aufgaben gibt es keinen befriedigend einfachen Algorithmus. Zu wissen, ob zwei gegebene Gebiete konform äquivalent sind, ist wichtig, weil sie dann gewissermaßen "dieselbe Funktionentheorie" haben.

Der Riemann'sche Abbildungssatz gibt genau an, welche Gebiete zur Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  konform äquivalent sind. Natürlich kommen überhaupt nur einfach zusammenhängende Gebiete in Frage, weil nämlich  $\mathbb{D}$  selbst einfach zusammenhängend ist.

Zur Erinnerung: Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg in  $G$  nullhomotop ist, d.h. sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen lässt.

**Bemerkung** Im Folgenden soll konform mit biholomorph gleichgesetzt werden, vergleiche mit der Bemerkung zu Korollar (21.3).

**Satz 23.1 (Riemann'scher Abbildungssatz)** Sei  $G \subsetneq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Weiter sei  $z_0 \in G$  und  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Dann existiert eine eindeutige konforme Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  mit  $f(z_0) = 0$  und  $\arg f'(z_0) = \alpha$ .

**Bemerkung** Es gibt keine konforme Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  denn sonst wäre, da  $\mathbb{D}$  beschränkt ist, nach dem Satz von Liouville  $f \equiv \text{const.}$

Die zwei zusätzlichen Forderungen in unserer Version des Riemann'schen Abbildungssatzes sagen Folgendes aus: Erstens können wir unser  $f$  so wählen, dass der Punkt  $z_0 \in G$  auf 0 abgebildet wird. Zweitens können wir sicherstellen, dass der Winkel zwischen der Gerade  $y = t \cdot f'(z_0)$  und der reellen Achse  $= \alpha$  ist, wodurch die Funktion eindeutig wird.

**Beweis** Betrachte die Familie  $B := \{g : G \rightarrow \mathbb{D} \text{ holomorph und injektiv, } g(z_0) = 0\}$  holomorpher Funktionen, d.h.  $0 = g(z_0) \in g(G) \subset \mathbb{D} \forall g \in B$ .

Ziel: Finde  $f \in B$  mit  $f(G) = \mathbb{D}$  und  $\arg f'(z_0) = \alpha$ .

1.  $B \neq \emptyset$

(a) Ziel: Finde eine holomorphe und injektive Funktion von  $G \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Bildgebiet zu irgendeiner Kreisscheibe disjunkt ist. Lösung: holomorphe Quadratwurzelfunktion.

Betrachte die holomorphe Funktion  $z \mapsto z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$ . Wenn wir diese Funktion auf eines ihrer Blätter einschränken ist sie injektiv, und es gilt:  $\sqrt{z_0} = w_0 \in \sqrt{\mathbb{C}} \Rightarrow -w_0 \notin \sqrt{\mathbb{C}} \quad \forall z_0 \neq 0$ .

Für  $0 \neq z_0 \in G$  können daher niemals  $\sqrt{z_0} = w_0$  und  $-w_0$  zugleich im Bildgebiet  $\sqrt{G} =: G'$  liegen. Für jede Kreisscheibe  $K \subset G'$  die 0 nicht enthält ist also die am Nullpunkt gespiegelte Kreisscheibe  $-K$  disjunkt zu  $G'$ . Insbesondere können wir einen Kreis um  $-w_0$  mit einem Radius von  $\delta$  wählen, welcher vollständig in dem Komplement von  $G'$  liegt.

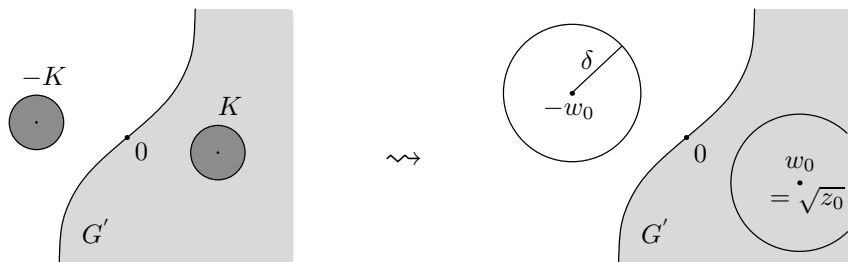


Abbildung 71: Für jede Kreisscheibe  $K \subset G'$  gilt  $-K \subset \mathbb{C} \setminus G'$ .

(b) *Spiegele*  $G'$  in die Kreisscheibe  $\mathbb{D}$ , so dass  $z_0 \mapsto 0$ .

Wir betrachten zunächst eine Funktion  $h_1$ , die das Gebiet  $G$  auf  $\mathbb{D}$  abbildet, kümmern uns aber noch nicht darum, ob  $h_1(z_0) = 0$  ist. Wir definieren:

$$h_1(z) := \frac{\delta}{2} \frac{1}{\sqrt{z} - (-w_0)},$$

wobei  $w_0 = \sqrt{z_0}$ , und  $\delta$  wie in (a).  $h_1(z)$  ist injektiv und holomorph.

*Zwischenbemerkung:* Eine lineare Transformation der Gestalt

$$w(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

bildet für  $|z_0| < 1$  die Einheitskreisscheibe biholomorph auf sich selber ab. Die Ableitung hat die Form:

$$w'(z) = \frac{(1 - \bar{z}_0 z) + \bar{z}_0(z - z_0)}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} = \frac{1 - \bar{z}_0 z_0}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2}$$

*Beweis:* Zu prüfen ist, ob  $|z - z_0| < |1 - \bar{z}_0 z|$ . Es gilt:

$$|z - z_0|^2 = (z - z_0) \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) = z\bar{z} - z_0\bar{z} - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0$$

und

$$|1 - \bar{z}_0 z|^2 = (1 - \bar{z}_0 z) \cdot (1 - \bar{z} z_0) = 1 - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 z\bar{z}$$

Also ist

$$|z - z_0|^2 < |1 - \bar{z}_0 z|^2 \Leftrightarrow (1 - z\bar{z}) \cdot (1 - z_0\bar{z}_0) = (1 - |z|^2) \cdot (1 - |z_0|^2) > 0$$

Für  $|z_0| < 1$  ist der zweite Term  $> 0$  und für  $z \in \mathbb{D}$  ist der erste Term  $> 0$ . Da lineare Transformationen biholomorph sind, gilt die Behauptung.

Als nächstes definieren wir eine Funktion  $h_2$ , als Verknüpfung der linearen Transformation  $T(z) = \frac{z - h_1(z_0)}{1 - \bar{h}_1(z_0)z}$  mit  $h_1$ :

$$h_2 := T \circ h_1 : G \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{h_1(z) - h_1(z_0)}{1 - \bar{h}_1(z_0) \cdot h_1(z)}.$$

$h_2$  ist holomorph und injektiv und es gilt  $h_2(z_0) = 0 \Rightarrow h_2 \in B \neq \emptyset$ .

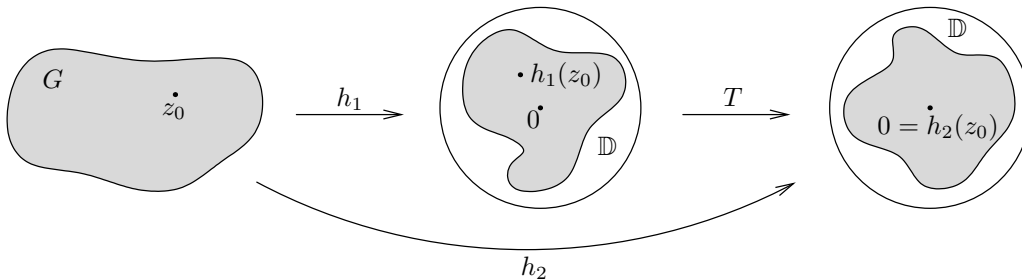


Abbildung 72: Die Funktion  $h_1$  bildet  $G$  in die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  ab.  $h_2 = T \circ h_1$  sorgt dann dafür, dass  $z_0$  auf 0 abgebildet wird.

2. Wir konstruieren eine Funktion  $f \in B$  mit  $f(G) = \mathbb{D}$ .

Sei  $M := \sup_{g \in B} |g'(z_0)| > 0$ . Dann existiert  $f \in B$  mit  $|f'(z_0)| = M$ , denn:

(a)  $M$  existiert.

Als erstes müssen wir zeigen, dass  $\{|g'(z_0)|\}_{g \in B}$  überhaupt beschränkt ist.

Dieses folgt aus der Cauchyformel für die Ableitungen: Ist  $\{z \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\} \subset G$ , so gilt:

$$g'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{g(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

für jede holomorphe Funktion  $g : G \rightarrow \mathbb{D}$ . Wegen  $|g(z)| < 1$  gilt also

$$|g'(z_0)| \leq \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Damit existiert jedenfalls das Supremum  $M$ .

(b) Es existiert ein  $f \in B$  mit  $|f'(z_0)| = M$ :

Sei  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |g'_n(z_0)| = M$ . Es gilt  $|g_n(z)| < 1 \forall n \in \mathbb{N}, z \in G \Rightarrow (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist (lokal) beschränkt. Nach dem Satz von Montel konvergiert eine Teilfolge  $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  kompakt gegen ein  $f$  für welches gilt:

- $f$  ist holomorph nach dem Satz von Weierstraß (21.1)
- $f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{g_{n_k}(z_0)}_{=0} = 0$
- Ebenfalls gilt nach Weierstraß:  $g'_{n_k} \xrightarrow{\text{kompakt}} f'$ .

Also  $|f'(z_0)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |g'_{n_k}(z_0)| = M \in (0, \infty) \Rightarrow f \neq \text{const}$ , sonst wäre  $f'(z_0) = 0$ , und nach dem Satz von Hurwitz (21.2) ist  $f$  injektiv, da alle  $g_{n_k}$  injektiv sind. Ausserdem ist  $|f(z)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |g_{n_k}(z)| \leq 1$ .

Da  $f$  holomorph ist, ist nach dem Satz über die Gebietstreue  $f(G)$  offen, folglich gilt wie gefordert  $|f(z)| < 1, \forall z \in G$ .

(c)  $f(G) = \mathbb{D}$  für  $f$  aus Schritt (b).

*Annahme:* Es existiert  $b \in \mathbb{D}$  mit  $b \notin f(G)$  (d.h.  $f(G) \neq \mathbb{D}$ )

*Ziel:* Wir zeigen, dass dann  $\tilde{f} \in B$  existiert mit  $|\tilde{f}'(z_0)| > M \Rightarrow$  Widerspruch zur Definition von  $M$ .

Wir wollen nun die Funktion  $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{D}$  konstruieren, die eine größere Ableitung bei  $z_0$  hat als  $f$ .

- Definiere  $f_1 : G \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto \frac{f(z)-b}{1-\overline{b}f(z)}$  mit Hilfe des  $b$ 's aus der Annahme.  
Die Funktion  $f_1$  ist holomorph und injektiv und bildet  $G$  nach  $\mathbb{D}$  ab, weil sie eine lineare Transformation ist mit  $|b| < 1$  und  $|f(z)| \in \mathbb{D} \forall z \in G$ . (siehe Bemerkung oben).  
 $0 \notin f_1(G)$ , weil  $f_1(z) = 0 \Leftrightarrow \exists z \in G$  mit  $f(z) = b$ , aber  $b \notin f(G)$ .
- $f_1(G)$  ist einfach zusammenhängend, da  $f$  biholomorph ist und somit  $G$  wieder auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet abbildet. Definiere  $f_2(z) := \sqrt{f_1(z)}$  mittels der schon zuvor benutzten eingeschränkten Wurzelfunktion.  $f_2 : G \rightarrow \mathbb{D}$  ist holomorph und injektiv.
- Definiere schließlich  $\tilde{f}(z) := -\frac{f_2(z)-f_2(z_0)}{1-\overline{f_2(z_0)}f_2(z)}$ . Aus den selben Gründen wie im Falle von  $f_1$  gilt:  $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph und injektiv.  
Ausserdem ist  $\tilde{f}(z_0) = 0 \Rightarrow \tilde{f} \in B$ .

Behauptung:  $|\tilde{f}'(z_0)| > M$

- Berechnung von  $|f'_1(z_0)|$ :

$$\begin{aligned} |f'_1(z_0)| &= \frac{1 - |b|^2}{\underbrace{(1 - \bar{b}f(z_0))^2}_{=0}} \cdot \underbrace{|f'(z_0)|}_{=M} \\ &= (1 - |b|^2)M \end{aligned}$$

- Berechnung von  $|f'_2(z_0)|$ :

$$|f'_2(z_0)| = \frac{1}{2 \underbrace{\sqrt{|f_1(z_0)|}}_{=\sqrt{|b|}}} \cdot |f'_1(z_0)| = \frac{1}{2\sqrt{|b|}}(1 - |b|^2)M$$

- Abschätzung von  $|\tilde{f}'(z_0)|$ :

$$\begin{aligned} |\tilde{f}'(z_0)| &= \frac{1 - |f_2(z_0)|^2}{\underbrace{(1 - \overline{f_2(z_0)}f_2(z_0))^2}_{|f_2(z_0)|^2}} \cdot |f'_2(z_0)| \\ &= \frac{(1 - |b|)}{(1 - |b|)^2} \cdot \frac{1 - |b|^2}{2\sqrt{|b|}} \cdot M \\ &= \underbrace{\frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}}}_{>1} \cdot M \\ &> M \end{aligned}$$

Widerspruch zu  $M = \sup_{g(z_0) \in B} g'(z_0)$ .

Wir haben also  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  konform mit  $f(z_0) = 0$  und  $f(G) = \mathbb{D}$  gefunden.

3. Als letztes drehen wir unsere bisher erhaltene Funktion  $f$  so, dass die Winkelbedingung für die Ableitung zutrifft und zeigen die Eindeutigkeit:

Es ist klar, dass  $f^* : G \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $z \mapsto f(z) \cdot e^{i\alpha - i \arg f'(z_0)}$  eine konforme Abbildung ist für die gilt  $f^*(G) = \mathbb{D}$ ,  $f^*(z_0) = 0$  und  $\arg(f^*)'(z_0) = \alpha$ . Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit:

Sei  $g : G \rightarrow \mathbb{D}$  konform,  $g(z_0) = 0$ ,  $\arg g'(z_0) = \alpha$ . Betrachte  $h = f^* \circ g^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $\tilde{h} = g \circ (f^*)^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ .  $h(0) = f^*(\underbrace{g^{-1}(0)}_{=z_0}) = 0$ ,  $\tilde{h}(0) = 0$ . Nach dem Lemma von Schwarz (12.6) gilt:

$$|h(w)| \leq |w| \quad (*)$$

$$|\tilde{h}(w)| \leq |w| \quad (**)$$

$$(*) \Leftrightarrow |f^*(\underbrace{g^{-1}(w)}_z)| \leq \underbrace{|w|}_{=g(z)} \Leftrightarrow |f^*(z)| \leq |g(z)|$$

$$(**) \Leftrightarrow |g(z)| \leq |f^*(z)|$$

$$\Rightarrow f^*(z) = cg(z) \text{ mit } |c| = 1. \arg(f^*)'(z_0) = \arg g'(z_0) \Rightarrow f^*(z) = g(z).$$

□

**Korollar 23.2** Seien  $G, H \subsetneq \mathbb{C}$  einfach zusammenhängende Gebiete,  $z_0 \in G, w_0 \in H, \alpha \in (0, 2\pi)$ . Dann gibt es genau eine konforme Abbildung  $f : G \rightarrow H$  mit  $f(z_0) = w_0$  und  $\arg f'(z_0) = \alpha$ .

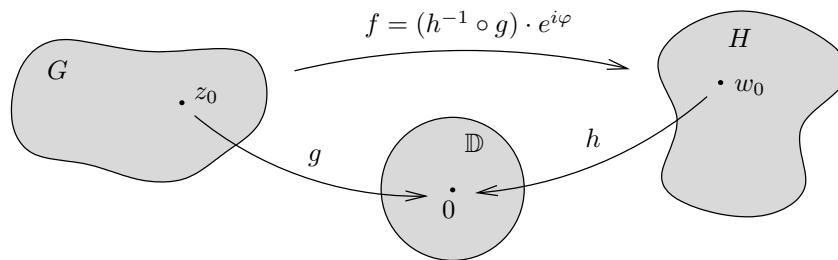


Abbildung 73:  $G$  und  $H$  können konform aufeinander abgebildet werden. Die Winkelbedingung  $\arg f'(z_0) = \alpha$  macht das Ganze eindeutig. Man erhält  $f$  wenn man konforme Abbildungen  $g$  und  $h$  wie im Bild hintereinander ausführt und noch entsprechend mit  $e^{i\varphi}$  multipliziert. ( $g(z_0) = h(w_0) = 0$ ).

## 24 Partialbruchentwicklung

Was wir in dem Kapitel lernen:

- Def. Hauptteil, Hauptteilverteilung
- Satz von Mittag-Leffler

**Definition 24.1 (Hauptteil, Partialbruch)** Der Hauptteil einer meromorphen Funktion  $f$  mit Entwicklungspunkt  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a$  Polstelle von  $f$ , ist eine rationale Funktion

$$h_a(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a}.$$

Die Koeffizienten  $c_k$  entsprechen denen der Laurententwicklung um die Polstelle  $a$ . Die Menge aller Hauptteile einer meromorphen Funktion  $f$  bezeichnet man mit  $H(f) = \{h_a \mid a \text{ Polstelle von } f\}$ .

Funktionen der Form  $h_a(z)$  werden auch Teilbrüche oder Partialbrüche genannt. Ist  $\infty$  ebenfalls ein Pol, so ist  $h(z) = \sum_{k=1}^m c_k z^k$  der entsprechende Hauptteil und wird auch ganzer Teil von  $f$  genannt.

Zum Aufsuchen von Stammfunktionen rationaler Funktionen benutzt man in der Integralrechnung einer reellen Variablen die sogenannte *Partialbruchzerlegung*. Funktionentheoretisch gesehen ist das weiter nichts als die Darstellung einer rationalen Funktion  $R(z)$  durch die Summe  $R(z) = h_1(z) + \dots + h_r(z) + P(z)$  aus den Hauptteilen  $h_1, \dots, h_r$  ihrer Pole und einem zusätzlichen Summanden  $P(z)$ , wobei  $P(z)$  ein Polynom ist. Analog ist eine beliebige meromorphe Funktion, sofern sie nur endliche viele Pole hat, die Summe ihrer Hauptteile und einem zusätzlichen holomorphen Summanden. Im Allgemeinen hat eine meromorphe Funktion aber abzählbar unendlich viele Pole, und die Summe der Hauptteile muss nicht konvergieren. Es bleibt jedoch wahr, dass eine meromorphe Funktion  $f$  auf  $G$  durch ihre Hauptteile bis auf einen holomorphen Summanden bestimmt ist.

Man kann das Problem auch andersherum betrachten: Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $A \subset U$  diskret. Gibt es eine meromorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  die genau auf  $A$  Pole hat, d.h.  $a \in A \Leftrightarrow a$  ist Pol von  $f$ ? Einfach ist das für endliche Mengen  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ :  $f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z-a_k}$  ist meromorph und erfüllt das Geforderte. Bei unendlichen Mengen ist es allerdings nicht so einfach.

**Definition 24.2 (Hauptteilverteilung)** Eine Hauptteilverteilung  $H$  auf der offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$  ist eine Menge  $H = \{h_a \mid a \in A\}$  von Partialbrüchen mit Entwicklungspunkten  $a \in A \subset U$ , wobei  $A$  keinen Häufungspunkt in  $U$  haben darf.

**Bemerkung** zur Hauptteilverteilung  $H$ :

1.  $A$  muss eine diskrete Menge sein. Sonst sei  $g$  eine meromorphe Funktion mit Polstellen in  $A$  und sei  $a$  ein Häufungspunkt in  $A$ . Betrachte die Funktion  $\frac{1}{g}$ . Ihre Nullstellen sind die Polstellen von  $g$ . Also hat die Menge der Nullstellen von  $\frac{1}{g}$  einen Häufungspunkt an der Stelle  $a$ . Nach dem Identitätssatz ist dann:  $\frac{1}{g} \equiv 0$ .
2. Für meromorphe bzw. holomorphe Funktionen können wir folgendes beobachten:
  - $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  meromorph liefert eine Hauptteilverteilung  $H(f)$ .
  - $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph  $\Rightarrow H(f) = \emptyset$ .

**Definition 24.3 (Lösbare Hauptverteilungen)** Eine Hauptteilverteilung heißt lösbar, wenn es eine meromorphe Funktion  $f$  mit  $H(f) = H$  gibt. Die Funktion  $f$  heißt dann Lösung von  $H$ .

**Satz 24.1** Die Lösung einer Hauptteilverteilung ist bis auf Addition einer holomorphen Funktion eindeutig.

**Beweis** Seien  $f, g$  zwei Lösungen der Hauptteilverteilung  $H = H(f) = H(g)$ . Also ist  $H(f - g) = \emptyset \Leftrightarrow f - g$  ist holomorph.  $\square$

**Satz 24.2 (Mittag-Leffler)** Jede Hauptteilverteilung in der komplexen Ebene ist lösbar.

D.h. Sei  $A \subset \mathbb{C}$  diskret,  $H = \{h_a \mid a \in A\} \Rightarrow \exists f$  meromorph mit  $H(f) = H$ .

**Alternative Formulierung:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge paarweise verschiedener Punkte in  $\mathbb{C}$  ohne Häufungspunkt. Seien  $P_{a_n}$  gegebene Polynome vom Grad  $> n$  ohne konstante Terme. Dann gibt es eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion, die genau an den Stellen  $a_n$  Pole hat und deren Hauptteil an jedem  $a_n$  gerade  $h_{a_n}(z) = P_{a_n}(\frac{1}{z-a_n})$  ist.

**Beweis Idee:** Betrachte die Summe  $\sum_{a \in A} h_a(z)$ . Falls sie nicht konvergiert füge holomorphe die “Konvergenz verbessernde” Summanden ein welche man über die Taylorentwicklung der Hauptteile erhält.

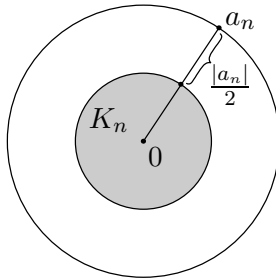
Sei  $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{C}$  die Menge der Singularitäten. Für  $|A| < \infty$  haben wir schon gesehen dass die Behauptung stimmt. Sei also  $A$  abzählbar unendlich. Ordne die Elemente von  $A$  so an, dass gilt:  $0 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$  (sonst wäre  $A$  beschränkt  $\Rightarrow$  es gäbe einen Häufungspunkt  $\Rightarrow A$  wäre nicht diskret, Widerspruch).

Setze  $h_n(z) := h_{a_n}(z)$ . Da  $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(z)$  evtl. divergiert, führen wir nun die “Konvergenz verbessernden Summanden” ein:

Statt  $h_n(z)$  betrachte  $h_n(z) - T_n(z)$ , wobei  $T_n(z)$  ein Taylorpolynom von  $h_n(z)$  in  $z = 0$  ist (Taylorpolynom = Taylorentwicklung bis zu einem gewissen Grad  $k \in \mathbb{N}$ ). Man kann den Grad von  $T_n$  so groß wählen, dass

$$|h_n(z) - T_n(z)| < 2^{-n} \quad \forall z : |z| \leq \frac{|a_n|}{2}. \quad (*)$$

Setze  $K_n := \left\{ z \mid |z| \leq \frac{|a_n|}{2} \right\}$ . Dann ist  $\cup_n K_n = \mathbb{C}$ , da  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ .



Wir betrachten nun  $\sum h_n(z) - T_n(z)$  und zeigen dass die Summe gleichmäßig konvergiert:

Für alle  $r > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n > n_0$  gilt:  $|a_n| > 2r$ . Daraus folgt, dass  $(\sum_{n > n_0}^m h_n(z) - T_n(z))_{m \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf  $K_r(0)$  konvergiert.

Dies ist der Fall, da  $|\sum_{n > n_0}^m h_n(z) - T_n(z)| \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n > n_0}^m 2^{-n}$ , wobei die rechte Seite unabhängig von  $z$  konvergiert. Also ist  $\sum_{n > n_0} h_n(z) - T_n(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n > n_0}^m h_n(z) - T_n(z)$  eine holomorphe Funktion auf  $K_r(0)$ .

Sei  $A_r := \{a_n \in A \mid |a_n| \leq r\}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n - T_n$  konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von  $K_r(0) \setminus A_r$ . Dies ist so, da der erste Teil  $\sum_{n=1}^{n_0} h_n - T_n$  auf jedem Kompaktum, welches die Polstellen  $a_1, \dots, a_k$  nicht enthält, beschränkt ist und der zweite Teil  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} h_n - T_n$  gleichmäßig konvergiert. Für  $r \rightarrow \infty$  ist der Teil  $\sum_{k=n^*}^{\infty} h_k - T_k$  holomorph auf  $\mathbb{C}$ , wobei  $n^* = \min\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n| > 2r\}$ .

Damit ist also  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n - T_n$  meromorph auf  $\mathbb{C}$  und besitzt die Hauptverteilung  $H = \{h_a \mid a \in A\}$ .  $\square$

**Bemerkung** In Beispielen wählt man den Grad von  $T_n$  so, dass auf  $K_n$  gilt:  $|h_n - T_n| < c_n$  und  $\sum c_n < \infty$ .



**Beispiel 24.1 (Zum Satz von Mittag Leffler)**

1. Gesucht sei eine meromorphe Funktion mit einfachen Polen in  $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots$  und Residuen  $c_0, c_1, c_2, \dots$ . Die Hauptteile haben also die Form:  $\frac{c_n}{z-a_n} = h_n(z)$ .

Die Taylorentwicklung um  $z_0$   $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n\right)$  sieht für  $f(z) = \frac{1}{z-a_n}$  und  $z_0 = 0$  folgendermaßen aus:

$$\frac{1}{z-a_n} = -\frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \quad (n > 0, \text{ d.h. } a_n \neq 0)$$

Wähle  $k_n \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\left| \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{k_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \right| < \frac{2^{-n}}{c_n} \quad \forall z : |z| \leq \frac{|a_n|}{2}.$$

Dann ist

$$f(z) := \frac{c_0}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \left( \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{k_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \right)$$

eine meromorphe Funktion mit der Hauptteilverteilung  $\left\{\frac{c_0}{z}, \dots, \frac{c_n}{z-a_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

2. Gesucht sei eine meromorphe Funktion mit einfachen Polen in  $\mathbb{Z}$  und allen Residuen gleich 1. D.h.  $a_n = n, c_n = 1, n \in \mathbb{Z}$ . Man kann dann für alle  $n \in \mathbb{Z}$   $k_n = 0$  wählen:

$$\left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| = \frac{|z|}{|z-n||n|} \underset{\text{für } |z| < R}{\leq} \frac{R}{|z-n||n|} \underset{\text{für } |n| > 2R}{\leq} \frac{2R}{n^2}.$$

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert, erfüllt

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

das Gewünschte.

3. Betrachte die Funktion  $f(z) = \pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ .

Offensichtlich ist die Menge der Pole von  $f$  gerade die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen und für die Residuen gilt  $\text{res}_n f(z) = \pi \frac{\cos(\pi n)}{\pi \cos(\pi n)} = 1$ .

Die Aussage über die Residuen erhält man, da die Nullstellen von Kosinus und Sinus einfach sind, aus folgender Formel:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad f(z_0), g(z_0) \text{ einfache Nullstellen} \Rightarrow \text{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Die Funktion aus Beispiel 2. und  $\pi \cot(\pi z)$  besitzen die gleiche Hauptteilerverteilung, also sind sie bis auf Addition einer holomorphen Funktion  $f_0$  gleich (Satz 24.1). D.h.

$$\pi \cot(\pi z) = f_0(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Differenzieren der beiden Funktionen ergibt:

$$-\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = f_0'(z) - \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}}_{g(z):=}$$

Die Funktion  $g(z)$  ist periodisch mit Periode 1 und besitzt Pole zweiter Ordnung in  $n \in \mathbb{Z}$ .

Sei  $S := \{z = x + iy \mid x \in (0, 1], |y| \geq 1\} \subset \mathbb{C}$ . Es gilt

$$\frac{1}{|z - n|^2} \leq \max \left\{ \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n-1)^2} \right\} \quad \forall z \in S \text{ falls } n \notin \{0, 1\}.$$

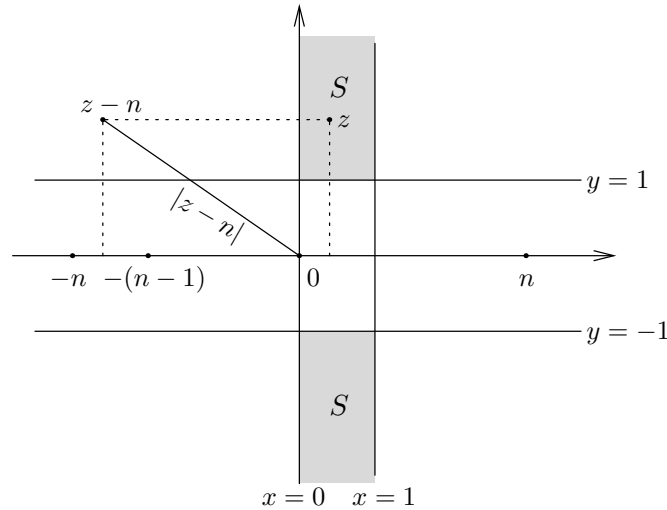


Abbildung 74: Definition von  $S$  und die Abschätzung  $|z - n| \geq \max\{|n|, |n - 1|\}$  für  $z \in S$ .

Demzufolge konvergiert die Summe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$  auf  $S$  gleichmäßig gegen  $g(z)$ .

Also existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\left| g(z) - \sum_{n=-n_0}^{n_0} \frac{1}{(z-n)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \forall z \in S$ .

Andererseits existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $R > 0$ , so dass für alle  $z \in S$  mit  $|\operatorname{Im} z| > R$  gilt:

$$\sum_{|n| \leq n_0} \frac{1}{|z - n|^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$  so dass  $\forall z \in S$  mit  $|\operatorname{Im} z| > R$  gilt:  $|g(z)| < \varepsilon$ .

$\Rightarrow f'_0(z) = g(z) - \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$  ist

- ganz
- periodisch mit Periode 1 (da  $\sin(\pi z + \pi) = -\sin(\pi z)$  und  $g$  periodisch mit Periode 1)
- beschränkt auf  $S$  ( $|g(z) - \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2| \xrightarrow{\operatorname{Im} z \rightarrow \infty} 0$ ).

Die Funktion  $f'_0$  ist holomorph, da  $f_0$  holomorph ist. Also ist  $f'_0$  insbesondere auf dem Quadrat mit den Eckpunkten  $\{0, 1, i + 1, i\}$  beschränkt. Da sie aber auch auf ganz  $S$ , und damit auf einem "eins breiten" Streifen beschränkt ist, ist sie durch ihre Periodizität auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt.

Nach dem Satz von Liouville folgt also  $f'_0(z) = \operatorname{const} = 0$ , da  $|f'_0(z)| \xrightarrow{\operatorname{Im} z \rightarrow \infty} 0$ .

**Proposition 24.3** Für die Partialbruchzerlegung von  $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$  gilt

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}.$$

**Korollar 24.4** Für die Funktion  $\pi \cot(\pi z)$  ergibt sich folgende Zerlegung:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

wobei  $\sum'_{n \in \mathbb{Z}}$  eine abkürzende Schreibweise für  $\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0}$  ist.

**Beweis** Aus dem Beispiel folgt:  $\pi \cot(\pi z) = c + \frac{1}{z} + \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$ .  
Da der Kotangens ungerade ist, muss  $c = 0$  gelten. □

## 25 Produktentwicklung

In diesem Kapitel lernen wir:

- Def. (absolute) Konvergenz von unendlichen Produkten
- Konvergenzkriterien für unendliche Produkte
- Weierstraß'scher Produktsatz

Nach dem Satz von Liouville ist jede beschränkte ganze Funktion konstant. Besitzt nun eine ganze Funktion  $f(z)$  im Unendlichen einen Pol  $n$ -ter Ordnung, so ist sie ein Polynom vom Grad  $n$ . Wenn nämlich  $g(z) = c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n$  den Hauptteil der Entwicklung von  $f(z)$  im Unendlichen darstellt, so ist auf Grund des Satzes von Liouville die Funktion  $f(z) - g(z)$  konstant:  $f(z) - g(z) = c_0$ .

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt jedes Polynom  $n$ -ten Grades genau  $n$  Nullstellen, und lässt sich als Produkt der zu diesen Nullstellen gehörigen Linearfaktoren darstellen:

$$f(z) = A' (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) \stackrel{a_k \neq 0}{=} A \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

Dabei sind die  $a_k$  die Nullstellen des Polynoms  $f(z)$  und  $A$  und  $A'$  gewisse Konstanten.

Eine transzendente Funktion braucht überhaupt keine Nullstellen zu besitzen (z.B.  $e^z$ ), sie kann andererseits aber auch unendlich viele Nullstellen haben (z.B.  $\sin z$ ). Besitzt also eine ganze Funktion  $f(z)$  endlich viele Nullstellen  $a_1, \dots, a_n$ , so ist der Quotient aus  $f(z)$  und dem Produkt  $(z - a_1) \dots (z - a_n)$  eine ganze Funktion, welche keine Nullstellen besitzt. Daher kann der Quotient in der Form  $e^{g(z)}$  dargestellt werden, und wir erhalten

$$f(z) = e^{g(z)} (z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_n) \stackrel{a_k \neq 0}{=} A e^{g(z)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

Für ganze Funktionen die unendlich viele Nullstellen haben kann eine analoge Zerlegung angegeben werden, in der an die Stelle des endlichen Produkts ein unendliches Produkt tritt, das auf Konvergenz zu untersuchen ist.

Genauso kann man zu einer vorgegebenen Menge  $A$  eine holomorphe Funktion mit Nullstellen in  $a \in A$  bilden. Im endlichen Fall ist dies offensichtlich kein Problem mit  $f(z) = \prod_{a \in A} (z - a)$ . Für Mengen unendlicher Kardinalität stellt sich hingegen wieder die Frage der Konvergenz des unendlichen Produktes. Das wesentliche Ergebnis liefert der *Weierstraß'sche Produktsatz* (25.3).

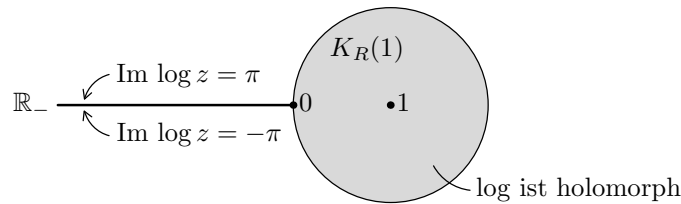
**Definition 25.1 (Konvergenz unendlicher Produkte)** Ist  $(w_n)_{n \geq 1}$  eine beliebige Zahlenfolge in  $\mathbb{C}$ , so heißt das unendliche Produkt  $\prod_{n=1}^{\infty} w_n$  konvergent, wenn fast alle  $w_n \neq 0$  und  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1, w_n \neq 0}^N w_n$  existiert und nicht Null ist. Ist mindestens ein  $w_n = 0$ , so setzt man  $\prod_{n=1}^{\infty} w_n := 0$ .

### Beispiel 25.1 (Unendliche Produkte)

1.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 0$  ist kein konvergentes Produkt.
2. Sei  $\prod_{n=1}^{\infty} w_n$  konvergent, dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$ .  $(P_N := \prod_{n=1}^N w_n \Rightarrow w_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1)$

Als nächstes werden wir nun das *Logarithmuskriterium* für die Konvergenz unendlicher Produkte herleiten.

**Bemerkung** Im Folgenden schreiben wir  $\mathbb{R}_-$  für die Menge  $\{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$  und fixieren den Logarithmus  $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$  als  $\log(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$  mit  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ .  $\log$  ist dann holomorph auf  $K_R(1) = \{z \mid |z - 1| < R\}$  für  $R \leq 1$ .



**Lemma 25.1 (Logarithmuskriterium für die Konvergenz unendlicher Produkte)**

Sei  $\prod_{n=1}^{\infty} w_n$  ein unendliches Produkt ohne negative oder Nullfaktoren. Dann ist die Konvergenz des Produktes äquivalent zur Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \log w_n$ .

**Bemerkung** Nicht negative  $w_n$ , d.h.  $w_n \notin \mathbb{R}_-$ , ist für konvergente Produkte keine Einschränkung: Wie wir zuvor gesehen haben muss nämlich gelten  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$ , d.h. für  $n$  groß genug ist  $w_n \notin \mathbb{R}_-$ .

**Beweis**

$\Leftarrow$ : Es ist

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N \log w_n\right) = \prod_{n=1}^N \exp(\log w_n) = \prod_{n=1}^N w_n.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt aus der Konvergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} \log w_n$  die Konvergenz von  $\prod_{n=1}^N w_n$ .

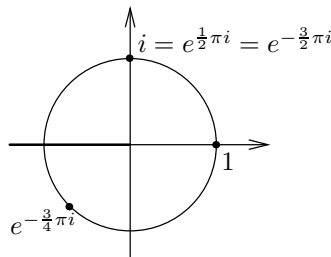
$\Rightarrow$ : Sei nun umgekehrt das Produkt als konvergent vorausgesetzt. Allgemein gilt

$$\log\left(\prod w_n\right) = \sum \log w_n + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

wir können also leider nicht genau analog argumentieren.

Dies liegt daran, dass die Exponentialfunktion nicht injektiv ist, und dieses Problem tritt auf wenn durch die Multiplikation "über die negative reelle Achse gegangen wird".

Betrachte z.B.:  $z = e^{-\frac{3}{4}\pi i}$ . Dann ist  $\log z = \log 1 + i(-\frac{3}{4}\pi) = i(-\frac{3}{4}\pi)$  und  $\log z^2 = \log e^{-\frac{3}{4}\pi i - \frac{3}{4}\pi i} = \log e^{-\frac{3}{2}\pi i} + \log e^{-\frac{3}{4}\pi i} = -\frac{3}{2}\pi i$  aber auch  $\log e^{\frac{1}{2}\pi i} = \frac{1}{2}\pi i$ .



Wir brauchen jedoch nur die Konvergenz von  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log w_n$  für irgendein  $n_0$  zu zeigen, da endlich viele Faktoren bzw. Summanden keinen Einfluss auf die Konvergenz als solche haben.

Wie bereits mehrfach zuvor erwähnt, folgt aus der Konvergenz des Produktes dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$ , also auch  $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^{\infty} w_n = 1$ . Daher können wir  $n_0 \in \mathbb{N}$  finden, so dass für alle  $N > n_0$  das Produkt  $\prod_{n=n_0}^N w_n$  innerhalb der Kreisscheibe  $K_{\frac{1}{2}}(1)$  liegt. Für jedes dieser Produkte gilt dann jedoch

$$\log\left(\prod_{n=n_0}^N w_n\right) = \sum_{n=n_0}^N \log w_n$$

und mit  $N \rightarrow \infty$  folgt das Gewünschte.

□

**Definition 25.2 (Absolute Konvergenz unendlicher Produkte)** Ein konvergentes Produkt heißt absolut konvergent, wenn für ein  $n_0$  die Reihe  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log w_n$  absolut konvergiert, d.h.  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |\log w_n|$  konvergiert.

**Lemma 25.2 (Kriterium für die absolute Konvergenz unendlicher Produkte)** Ein unendliches Produkt  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  konvergiert genau dann absolut, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergiert.

**Beweis** Klar ist, dass in beiden Fällen  $(a_n)$  eine Nullfolge sein muss. Betrachte  $\varphi(z) := \frac{\log(1+z)}{z}$  mit  $\varphi(0) := 1$ . Die Funktion  $\varphi : K_R \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph für  $R < 1$ . Weiter gibt es eine Umgebung  $U$  von 0, so dass  $\forall z \in U$  gilt:

$$\frac{1}{2} < \left| \frac{\log(1+z)}{z} \right| < \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{z}{2} \right| < |\log(1+z)| < \left| \frac{3z}{2} \right|.$$

Da  $(a_n)$  eine Nullfolge ist existiert ein  $n_0$ , so dass  $a_n \in U$  für  $n \geq n_0$ . Also gilt  $\forall m$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=n_0}^m |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^m |\log(1+a_n)| \leq \frac{3}{2} \sum_{n=n_0}^m |a_n|.$$

□

Wir kommen nun zu unserer ursprünglichen Fragestellung zurück und betrachten allgemein durch  $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_k})$  gegebene Funktionen mit  $|a_n| \rightarrow \infty$ . Um die Konvergenz zu gewährleisten fügen wir diesmal die “Konvergenz verbessernde Faktoren” ein, wobei die Idee ist die Faktoren  $(1 - \frac{z}{a_n})$  nahe zu 1 zu bringen. Dies geschieht durch Multiplikation mit einer ganzen Funktion  $e^{g_n(z)}$  welche keine Nullstellen besitzt.

Ansatz:

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{-\log(1 - \frac{z}{a_n})} = 1.$$

Deshalb wählen wir für  $g_n(z)$  ein Taylorpolynom von  $\log(1 - \frac{z}{a_n})$ , dessen Grad von der gewünschten Genauigkeit abhängt. Die Taylorapproximation erhalten wir wie folgt: Für alle  $|z| < 1$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} z^k &= \frac{1}{1-z} \\ \xrightarrow{\text{Integration}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} &= -\log(1-z). \end{aligned}$$

Die Reihendarstellung lautet ausgeschrieben also

$$-\log(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots \quad \forall |z| < 1.$$

**Satz 25.3 (Weierstraß’scher Produktsatz)** Sei  $(a_n)$  eine Folge von Null verschiedener komplexer Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ . Dann konvergiert für geeignete Wahl ganzer Zahlen  $k_n > 0$  das unendliche Produkt

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k_n} \cdot \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k}.$$

Die Funktion  $f$  stellt eine auf  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion dar, die genau an den Stellen  $a_n$  verschwindet, und zwar entsprechend der Vielfachheit mit der  $a_n$  in der Folge vorkommt.

**Beweis** Ordne die  $a_n$  gemäß ihrem Betrag an:  $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ . Betrachte nun die Funktion  $\log(1-z)$  auf  $K_{\frac{1}{2}} = \{z \mid |z| < \frac{1}{2}\}$  und wähle  $k_n \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\left| \log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^{k_n}}{k_n} \right| < c_n \quad \forall z \in K_{\frac{1}{2}}$$

wobei  $\sum c_n < \infty$ , z.B.  $c_n = \frac{1}{2^n}$  ( $\Rightarrow k_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ ).

Für alle  $r > 0$  existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n| > 2r \forall n \geq n_0$ . Dann konvergiert

$$\sum_{n=n_0}^N \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{k_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g_0(z)$$

gleichmäßig auf  $K_r$ , da  $\frac{z}{a_n} \in K_{\frac{1}{2}}$ . Somit ist  $g_0(z)$  eine holomorphe Funktion auf  $K_r$ .

Daraus folgt

$$\prod_{n=n_0}^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot e^{\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{k_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{g_0(z)}.$$

Wir können also den hinteren Teil des Produktes durch  $e^{g_0(z)}$  ersetzen und erhalten

$$f(z) := \prod_{n=1}^{n_0-1} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{k_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}} \cdot e^{g_0(z)}.$$

Die Nullstellen dieser Funktion in  $K_r$  sind genau  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$ . Da  $r$  beliebig groß gewählt werden kann folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 25.4** Jede auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion ist der Quotient zweier ganzer Funktionen.

**Beweis** Sei  $f$  eine meromorphe Funktion. Konstruiere eine ganze Funktion  $g$ , deren Nullstellen gerade an den Polstellen von  $f$  liegen, so dass die Vielfachheiten übereinstimmen. Dann ist  $h := f \cdot g$  eine ganze Funktion da die Singularitäten weggehoben werden. Also ist  $f = \frac{h}{g}$ .  $\square$

## 26 Elliptische Funktionen: Allgemeine Eigenschaften

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Def. periodisch, Periodengitter  $\Lambda$ , Parallelogramm der Perioden  $\Pi$
- meromorphe Funktionen  $\neq \text{const.}$  haben keine infinitesimale Periode
- Einteilung meromorpher Funktionen in drei Klassen bzgl. Periodizität
- Elliptisch + holo  $\Rightarrow \text{const.}$
- Die Summe über alle Residuen einer elliptischen Funktion verschwindet
- Def. Ordnung
- Anzahl  $c$ -Stellen = Ordnung
- Summe des NS = Summe der PS (mod  $\Lambda$ )

Elliptische Funktionen treten bei vielen Problemen auf, z.B. in der Dynamik der starren Körper, der Aerodynamik, der Elektrotechnik und der Elastizitätstheorie.

Wir betrachten im Weiteren nur meromorphe Funktionen von  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Definition 26.1 (Periodische Funktionen)** Eine Funktion  $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt periodisch, wenn es eine Zahl  $\omega \neq 0$  gibt, so dass für jedes  $z$  aus dem Definitionsbereich von  $f$  auch  $z \pm 2\omega$  zum Definitionsbereich gehört und  $f(z)$  für alle Punkte  $z$  des Definitionsbereiches der Funktionalgleichung

$$f(z + 2\omega) = f(z)$$

genügt.  $2\omega$  heißt dann eine Periode von  $f$  und  $\omega$  heißt Halbperiode. Mit  $\Lambda$  bezeichnet man die Menge aller Perioden von  $f$ .

**Bemerkung** Leicht zu verifizierende Aussagen:

- Die Menge  $\Lambda$  von Perioden ist eine Gruppe bzgl. der Addition, d.h. sind  $2\omega_1, \dots, 2\omega_n$  Perioden  $\Rightarrow \sum_{i=1}^n n_i 2\omega_i$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$  ist eine Periode.
- Seien  $f, g$  periodisch mit Periode  $2\omega$ . Dann sind die Funktionen  $f(z + C)$ ,  $f(z) + g(z)$ ,  $f(z) \cdot g(z)$ ,  $\frac{f(z)}{g(z)}$  und  $f'(z)$  periodisch mit Periode  $2\omega$  (falls sie existieren).

**Beispiel 26.1 (Periodische Funktion)**  $f(z) = e^{\pi i \frac{z}{\omega}}$  ist  $2\omega$ -periodisch,  $\Lambda = \{2n\omega \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lemma 26.1** Sei  $f \neq \text{const}$  eine meromorphe Funktion  $\Rightarrow \nexists$  infinitesimale Periode, d.h.  $\exists \mu > 0 : \forall$  Perioden  $2\omega$  von  $f$  gilt  $|2\omega| > \mu$ .

**Beweis** 2 Beweise durch Widerspruch:

1. *Beweis:* Sei  $\omega_n$  eine Nullfolge von Halbperioden. Sei  $z_0$  ein regulärer Punkt von  $f$ . Betrachte die Punktfolge:  $z_0 + 2\omega_n$ . Die Folge konvergiert gegen  $z_0$  und es gilt:  $f(z_0 + 2\omega_n) = f(z_0)$ . Nach dem Identitätssatz ist dann  $f$  konstant. Widerspruch.

2. *Beweis:* Sei  $\omega_n$  eine Folge von Perioden, die gegen 0 konvergieren. Dann gilt  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) \neq \infty$ :

$$\frac{f(z + 2\omega_n) - f(z)}{2\omega_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(z).$$

Außerdem sind die  $2\omega_n$  Perioden, also  $f(z + 2\omega_n) - f(z) = 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow f \equiv \text{const.}$  Widerspruch.  $\square$



**Korollar 26.2** Die Menge der Perioden einer meromorphen Funktion  $f(z) \not\equiv \text{const}$  enthält keine Folge die gegen einen endlichen Punkt konvergiert.

**Beweis** Angenommen es existiert eine Teilfolge  $(\omega_n) \subset \Lambda$ ,  $\omega_n \rightarrow \omega \Rightarrow (\omega_n - \omega_m) \in \Lambda \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$ . Widerspruch zum vorherigen Lemma.  $\square$

Nun untersuchen wir die Form von  $\Lambda$ :

**Satz 26.3 (Abel)** Eine meromorphe Funktion  $f(z)$  kann höchstens zwei bezgl.  $\mathbb{N}$  linear unabhängige Perioden besitzen. Mit anderen Worten: Es existieren zwei Perioden  $2\omega_1$  und  $2\omega_2$  derart, dass jede Periode  $T$  der Funktion  $f(z)$  die Form

$$T = 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2$$

mit ganzzahligen  $n_1$  und  $n_2$  besitzt.

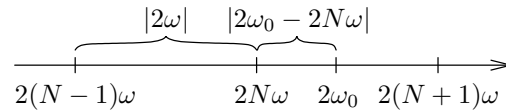
**Beweis** Der Beweis wird in zwei Teile aufgeteilt.

1. Fall:  $\Lambda \subset$  Gerade. Nach Lemma 26.1 existiert eine kleinste Periode  $2\omega$ .

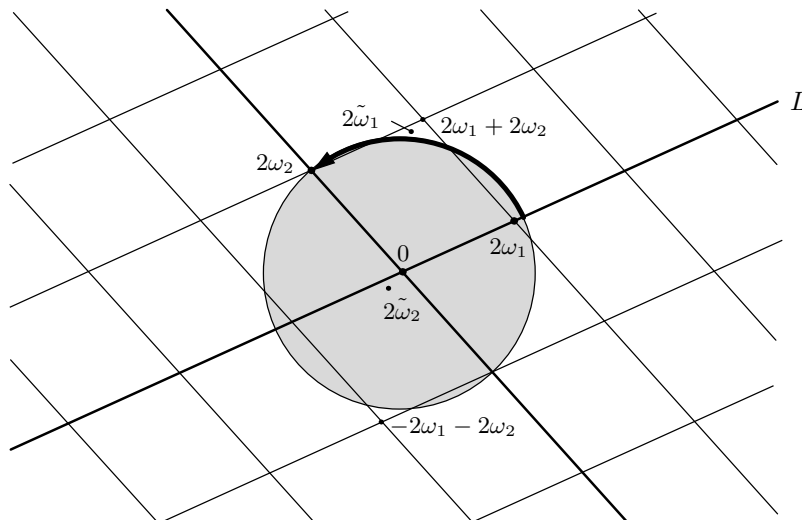
*Behauptung:*

$$\Lambda = \{2n\omega \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

*Beweis:* Angenommen  $\exists 2\omega_0 \notin \{2n\omega \mid n \in \mathbb{Z}\}$  aber  $2\omega_0 \in \Lambda$ . Dann existiert  $N \in \mathbb{Z}$  so dass  $|2\omega_0 - 2N\omega| < |2\omega|$ .  $2\omega_0 - 2N\omega$  wäre dann auch eine Periode, dies ist jedoch ein Widerspruch zu  $2\omega$  ist kleinste Periode.



2. Fall: Wir nehmen an, dass  $f(z)$  außer den Perioden  $2n\omega_1$  ( $2\omega_1$  sei die kleinste Periode von  $f$ ) noch weitere Perioden besitzt, welche nicht auf der Geraden  $L = t \cdot \omega_1$  liegen. Dann existiert ein Kreis um 0 mit mindestens einer von  $2\omega_1$  verschiedenen Periode auf dem Rand, welcher keine Periode (ausser vielleicht  $\pm 2\omega_1$ ) im Inneren enthält. Auf dem Kreisrand können nur endlich viele Perioden liegen, weil wir sonst einen Häufungspunkt von Perioden hätten ( $\rightsquigarrow$  infinitesimale Periode). Die erste Periode welche wir vom Schnittpunkt der Kreislinie mit dem positiven Strahl von  $L$  ausgehend erreichen wenn wir die Kreislinie in positiver Richtung entlanglaufen, bezeichnen wir mit  $2\omega_2$ .



Wir zeigen nun, dass jede Periode von  $f(z)$  die Form  $T = 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2$  besitzt:

Angenommen, es existiert eine Periode von  $f(z)$ , die die Form  $T = 2(n_1 + \delta_1)\omega_1 + 2(n_2 + \delta_2)\omega_2$  hat ( $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$ ,  $\delta_1, \delta_2 \in [0, 1)$ ). Dann wären auch  $2\tilde{\omega}_1 = 2\delta_1\omega_1 + 2\delta_2\omega_2$  und  $2\tilde{\omega}_2 = -2\omega_1 - 2\omega_2 + 2\omega_1$  Perioden von  $f(z)$ . Mindestens eine dieser Perioden würde jedoch im Inneren des Kreises liegen. Widerspruch!

□

Nach dem Satz von Abel lassen sich meromorphe Funktionen in drei Klassen einteilen:

1. *Nichtperiodische Funktionen*: Sie haben keine Periode.
2. *Einfach-periodische Funktionen*: Bei ihnen liegen alle Perioden auf einer Geraden. Beispiele solcher Funktionen sind die elementaren Funktionen  $e^z$  mit einer Periode von  $2\pi i$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$  usw.
3. *Doppel-periodische Funktionen*: Sie besitzen zwei reell linear unabhängige Perioden  $2\omega_1$  und  $2\omega_2$ , so dass  $\Lambda = \{2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2 \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ .  $2\omega_1$  und  $2\omega_2$  heißen *Hauptperioden*. Ein Beispiel einer doppelperiodischen Funktion ist: Sei  $f$  eine meromorphe Funktion, dann ist  $g(z) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} f(z + 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2)$  eine doppelperiodische Funktion. Die Konvergenz kann im Allgemeinen aber nicht gewährleistet werden.

**Bemerkung** Die Hauptperioden sind nicht eindeutig.

**Definition 26.2 (Elliptische Funktionen)** Meromorphe doppelperiodische Funktionen heißen elliptische Funktionen. Seien  $2\omega_1, 2\omega_2$  Hauptperioden, dann heißt  $\Pi := \{2t_1\omega_1 + 2t_2\omega_2 \mid t_1, t_2 \in [0, 1)\}$  Parallelogramm der Perioden.

**Bemerkung** Allgemeine Aussagen

- Ist  $f$  elliptisch auf  $\Pi$  bekannt, so ist  $f$  überall bekannt.
- Seien  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,  $z \sim z' \Leftrightarrow z \equiv z' \pmod{\Lambda}$ . d.h.  $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{Z} : z' - z = 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2$ . Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen  $[z]$  kann mit Punkten aus  $\Pi$  identifiziert werden. d.h.

$$\forall z \in \mathbb{C} \exists z' \in \Pi : z \sim z'.$$

**Satz 26.4** Sei  $f$  eine elliptische, holomorphe Funktion. Dann ist  $f \equiv \text{const}$ .

**Beweis**  $f$  ist holomorph.  $\Rightarrow f$  ist beschränkt auf  $\bar{\Pi}$ . ( $\Pi$  ist nicht kompakt, aber der Funktionswert auf den fehlenden Rändern ist der gleiche wie der auf den gegebenen Rändern).  $\bar{\Pi} = \{2t_1\omega_1 + 2t_2\omega_2 \mid t_1, t_2 \in [0, 1]\} \Rightarrow f$  ist beschränkt auf  $\mathbb{C} \xrightarrow{\text{Liouville}} f \equiv \text{const}$ . □

**Satz 26.5** Sei  $f$  eine elliptische Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{z \in \Pi} \text{res}_z f(z) = 0.$$

**Beweis** Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass das Integral über  $f(z)$  läng jeder geschlossenen Kurve  $C$  verschwindet, die alle Pole des Periodenparallelogramms und keine weiteren Pole umschließt (Residuensatz). Wenn auf dem Rand des Periodenparallelogramms keine Pole liegen, können wir diesen als Kurve  $C$  nehmen, sonst verschieben wir ihn einfach ein wenig.

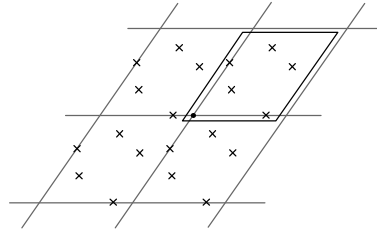


Abbildung 75: Verschiebung der Kurve, so dass keine Polstelle auf dem Rand liegt, aber alle Polstellen des Periodenparallelogramms von ihr eingeschlossen werden.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{z \in \Pi} \operatorname{res}_z f(z) &\stackrel{\text{Residuenformel}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Pi} f(z) dz \\
 &\stackrel{\text{Abb. 76}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{J_1} + \int_{J_3} + \int_{J_2} + \int_{J_4} f(z) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{J_1} (f(z) - f(z + 2\omega_1)) dz \right) \\
 &\quad + \int_{J_2} (f(z) - f(z + 2\omega_2)) dz \\
 &\stackrel{\text{elliptisch}}{=} \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{J_1} 0 dz + \int_{J_2} 0 dz \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dabei ist der Rand des Periodenparallelogramms wie folgt parametrisiert: □

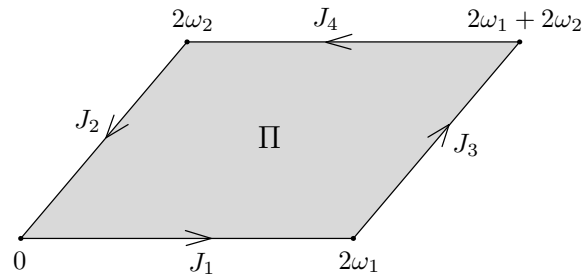


Abbildung 76: Integrationsweg  $J_1 + J_4 + J_3 + J_2$ .

**Korollar 26.6** *Es gibt keine elliptische Funktion mit einer einzigen einfachen Polstelle.*

**Beweis** Die Summe der Residuen wäre nicht 0, Widerspruch zum vorherigen Satz. □

Im Periodenparallelogramm muss mindestens ein Pol der Funktion liegen. Auf Grund der Meromorphie von  $f(z)$  können im Periodenparallelogramm nur endlich viele Pole liegen. Wir nennen die Anzahl dieser Pole (jeder Pol gemäß seiner Vielfachheit gezählt) die Ordnung der elliptischen Funktion.

**Beispiel 26.2 (Einfachste Möglichkeiten für Polstellen elliptischer Funktionen)**

- eine Polstelle 2. Ordnung  $z_0$  mit  $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$ .
- zwei Polstellen 1. Ordnung in  $z_1, z_2$  mit  $\operatorname{res}_{z_1} f = -\operatorname{res}_{z_2} f$ .

**Satz 26.7** Sei  $f \neq \text{const}$  elliptisch und  $N$  die Ordnung der Funktion  $f$ . Dann ist  $\forall c \in \mathbb{C}$  die Anzahl der  $c$ -Stellen für von  $f$  gleich  $N$ .

**Beweis** Sei  $g(z) = f(z) - c$ . Dann sind die Nullstellen von  $g$  gleich den  $c$ -Stellen von  $f$ , und die Polstellen von  $g$  gleich den Polstellen von  $f$ . Betrachte nun die Logarithmische Ableitung von  $g$ :  $h(z) := \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z) - c}$ . Die Funktion  $h$  ist eine elliptische Funktion, da sie durch Multiplikation und Addition von elliptischen Funktionen gebildet wurde. Nach Satz 19.2 gilt für die Differenz der Null- und Polstellen von  $g$  in  $\Pi$

$$N_{\Pi} - P_{\Pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} h(z) dz \stackrel{\text{Residuensatz}}{=} \sum_{\text{Polstellen von } h \in \Pi} \text{res } h(z) = 0,$$

wobei wir o.B.d.A. wieder annehmen, dass keine Pol oder  $c$ -Stelle auf dem Rand von  $\Pi$  liegt.  $\Rightarrow$  Behauptung  $\square$

**Korollar 26.8** Bei elliptischen nicht konstanten Funktionen ist insbesondere die Anzahl der Nullstellen gleich der Anzahl der Polstellen (alle mit Vielfachheiten gezählt).

**Satz 26.9** Sei  $f$  elliptisch mit Nullstellen  $a_1, \dots, a_N \in \Pi$  und Polstellen  $b_1, \dots, b_N \in \Pi$  (mit Vielfachheiten aufgeschrieben). Dann gilt:

$$a_1 + \dots + a_N = b_1 + \dots + b_N \pmod{\Lambda}$$

**Beweis** Seien o.B.d.A. die Nullstellen und Polstellen  $\notin \partial\Pi$ , also auch  $f(0) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz &\stackrel{\text{Abb. 76}}{=} \int_{J_1} z \cdot \frac{f'}{f} dz + \int_{J_2} z \cdot \frac{f'}{f} dz + \int_{J_3} z \cdot \frac{f'}{f} dz + \int_{J_4} z \cdot \frac{f'}{f} dz \\ &= \int_{J_1} \frac{f'}{f} \cdot (z - z - 2\omega_2) dz + \int_{J_3} \frac{f'}{f} \cdot (z - (z - 2\omega_1)) dz \\ &= \int_0^{2\omega_1} -2\omega_2 \frac{f'}{f} dz + \int_{2\omega_1}^{2\omega_1+2\omega_2} 2\omega_1 \frac{f'(z)'}{f(z)} dz \\ &= -2\omega_2 \int_0^{2\omega_1} \frac{f'}{f} dz + 2\omega_1 \int_0^{2\omega_2} \frac{f'(z+2\omega_1)}{f(z+2\omega_1)} dz \\ &= -2\omega_2 \log f(z)|_0^{2\omega_1} + 2\omega_1 \log f(z)|_0^{2\omega_2} \\ &= -2\omega_2 (\log f(2\omega_1) - \log f(0)) + 2\omega_1 (\log f(2\omega_2) - \log f(0)) \\ &= -2\omega_2 2\pi i n_2 + 2\omega_1 2\pi i n_1, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ &\in 2\pi i \Lambda \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus dem Residuensatz:

$$\int_{\partial\Pi} z \cdot \frac{f'}{f} dz = 2\pi i \left( \sum_{a_i \in \Pi} \text{res}_{a_i} z \cdot \frac{f'}{f} + \sum_{b_i \in \Pi} \text{res}_{b_i} z \cdot \frac{f'}{f} \right)$$

Es gilt:  $\text{res}_{z_0} \left( z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = z_0 k$ , da  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \text{holo.}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  $k > 0 \Rightarrow$  Ordnung der Nullstelle;  $k < 0 \Rightarrow$  -Ordnung des Pols.

Aus der allgemeinen Formel folgt: Sei  $f$  eine meromorphe Funktion mit einem einfachen Pol in  $z_0$  und  $g$  sei holomorph in  $z_0$ .  $\Rightarrow \text{res}_{z_0} g(z) f(z) = g(z_0) \text{res}_{z_0} f(z)$ .

$$(\text{res}_{z_0} g(z) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) g(z) f(z) = g(z_0) \cdot \text{res}_{z_0} f(z))$$

Also:

$$2\pi i (2n_1 \omega_1 + 2n_2 \omega_2) = 2\pi i (k_{1a} a_1 + \dots + k_{Na} a_N - (|k_{1b}| b_1 + \dots + |k_{Nb}| b_N))$$

Daraus folgt die Behauptung, weil in der Folge  $(a_i)$  und  $(b_i)$  die Werte jedes Folgengliedes mit ihrer Vielfachheit vorkommen.  $\square$

**Korollar 26.10** *Sei  $f$  eine elliptische Funktion.  $c_1, \dots, c_n \in \Pi$  seien die  $c$ -Stellen der Funktion  $f$  (d.h.:  $f(c_i) = c$ ) mit Vielfachheiten. Seien außerdem  $b_1, \dots, b_n \in \Pi$  die Polstellen von  $f$  auf  $\Pi$ . Dann gilt:*

$$b_1 + \dots + b_N = c_1 + \dots + c_N \pmod{\Lambda}$$

**Beweis** Mit  $\tilde{f} = f - c$  den vorherigen Satz benutzen.  $\square$

## 27 Die Weierstraß'sche $\wp$ -Funktion

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Die  $Q$ -Funktion
- Def. der Weierstraß'schen  $\wp$ -Funktion
- Eigenschaften der  $\wp$ -Funktion

Weierstraß betrachtete elliptische Funktionen zweiter Ordnung, die im Periodenparallelogramm einen zweifachen Pol bei 0 besitzen. Ihre Perioden  $2\omega_1$  und  $2\omega_2$  können beliebig vorgegeben werden, wobei  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nicht auf einer Geraden liegen dürfen.  $\wp(z) \simeq \frac{1}{z^2} + \text{holo}$ . Sie sind bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Hier noch zwei Vorbemerkungen:

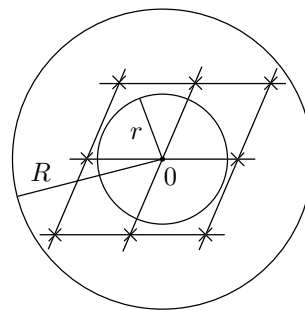
**Lemma 27.1** Die Summe  $\sum'_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2|^k}$  konvergiert  $\forall k > 2$ . Dabei bedeutet  $\sum'$  dass der zu  $(n_1, n_2) = (0, 0)$  gehörige Summand ausgelassen wird.

**Beweis** Betrachte anstatt der gesamten Summe bestimmte Teilsommen:

$$\sum'_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2|^k} = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$$

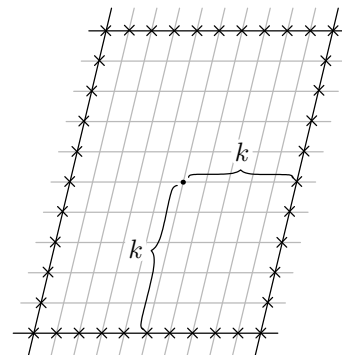
wobei

$$S_1 = \sum_{n_1, n_2 \in [-1, 1] \cap \mathbb{Z} \text{ und } (|n_1|=1 \text{ oder } |n_2|=1)} \frac{1}{|2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2|^k}$$



bzw.

$$S_k = \sum_{n_1, n_2 \in [-k, k] \cap \mathbb{Z} \text{ und } (|n_1|=k \text{ oder } |n_2|=k)} \frac{1}{|2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2|^k}$$



Für  $S_1$  gilt: Alle Gitterpunkte mit  $|n_1| \leq 1, |n_2| \leq 1, (n_1, n_2) \neq (0, 0)$  liegen in der Kreisscheibe  $K_R = \{z \mid |z| \leq R\}$  und außerhalb von  $K_r = \{z \mid |z| \leq r\}$  mit  $r \leq \min\{2\omega_1, 2\omega_2\}$  und  $R \geq \sqrt{(2\omega_1)^2 + (2\omega_2)^2}$ .

$$\frac{8}{R^k} \leq S_1 \leq \frac{8}{r^k}$$

$$\frac{8p}{(pR)^k} \leq S_P \leq \frac{8p}{(pr)^k}$$

$\Rightarrow \frac{8}{R^k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{k-1}} \leq \sum_{p=1}^{\infty} S_p \leq \frac{8}{r^k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{k-1}}$ .  $\sum \frac{1}{p^{k-1}}$  konvergiert für  $k > 2$ .  $\square$

**Korollar 27.2** Die Funktion  $Q(z) := \sum_{\Omega \in \Lambda} \frac{1}{(z+\Omega)^3} = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+2n_1\omega_1+2n_2\omega_2)^3}$  ist eine ungerade elliptische Funktion, die in 0 (und dann wegen der Periodizität auch in  $2\omega_1, 2\omega_2, 2(\omega_1 + \omega_2)$ ) einen Pol der Ordnung 3 besitzt.

**Beweis** Die Reihe konvergiert kompakt gleichmäßig auf  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ .  $\Rightarrow$  sie ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ . (Abschätzen von  $\frac{1}{z+2n_1\omega_1+2n_2\omega_2}$  durch nächsten Gitterpunkt).

Sie ist ungerade, denn  $(\frac{1}{(z+2n_1\omega_1+2n_2\omega_2)^3} + \frac{1}{(z-2n_1\omega_1-2n_2\omega_2)^3})$  ist eine ungerade Funktion und  $Q(z)$  setzt sich aus diesen Summanden zusammen.

Außerdem ist sie elliptisch mit den Perioden  $2\omega_1, 2\omega_2$ .

An der Stelle  $z$  gilt:  $Q(z) = \frac{1}{z^3} + \sum'_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+2n_1\omega_1+2n_2\omega_2)^3}$ . Die Summe konvergiert  $\forall z \in \Pi$  und  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^3} = \infty$ .  $\square$

Aus  $Q(z)$  läßt sich durch Integration eine gerade elliptische Funktion zweiter Ordnung erhalten: die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion.

**Definition 27.1 (Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion)** Die Funktion

$$\begin{aligned} \wp(z) &:= \frac{1}{z^2} + \sum' \left( \frac{1}{(z-2n_1\omega_1-2n_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(2n_1\omega_1+2n_2\omega_2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \int_0^z -2Q(\xi) + \frac{2}{\xi^3} d\xi \end{aligned}$$

heißt die Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion.

**Satz 27.3** Die  $\wp$ -Funktion ist eine gerade, elliptische Funktion mit der einzigen Singularität in  $z = 0$ :  $\wp(z) =_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} + \text{holo}$ .

**Beweis** 1. z.z.  $\wp$  ist gerade.

Da  $\wp$  die Summe aus einem Integral einer ungeraden Funktion, nämlich  $Q(z)$  ist, und einer geraden Funktion  $\frac{1}{z^2}$  ist, ist  $\wp$  gerade.

2. z.z.  $\wp$  ist elliptisch.

Gleichmäßig konvergente Reihen kann man gliedweise integrieren:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \int_0^z (-2Q(\xi) + \frac{2}{\xi^3}) d\xi$$

auf  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \int_0^z (-2 \cdot \sum'_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\xi - 2n_1\omega_1 - 2n_2\omega_2)^3}) d\xi \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum'_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{(z - 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2)^2}}_{f \text{ ausgewertet an } z} - \underbrace{\frac{1}{(2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2)^2}}_{f \text{ ausgewertet an } 0} \end{aligned}$$

Daraus folgt:  $\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2Q(z) + \frac{2}{z^3} = -2Q(z)$  bzw.  $\wp'(z + \Omega) = -2(Q(z + \Omega) = -2Q(z))$ , da  $Q$  eine elliptische Funktion ist.  $\Rightarrow \wp'(z)$  ist elliptisch.

Da  $\wp'(z) = \wp'(z + 2\omega_1) \Rightarrow \wp(z + 2\omega_1) - \wp(z) = \alpha \in \mathbb{C}$ . Setze  $z = -\omega_1$  ein:  $\wp(\omega_1) - \wp(-\omega_1) = \alpha$ .  $\Rightarrow \alpha = 0$  da  $\wp$  gerade. Genauso:  $\wp(z + 2\omega_2) = \wp(z) \Rightarrow \wp(z)$  ist doppelperiodisch.  $\square$

**Proposition 27.4** Die Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion nimmt jeden Wert  $c$  aus  $\mathbb{C}$  genau zwei mal an und es gilt:

$$\wp(z) = \wp(w) \Leftrightarrow z \stackrel{\text{mod}\Lambda}{\equiv} \pm w.$$

**Beweis**  $\wp$  hat die Ordnung 2  $\Rightarrow \wp$  hat zwei  $c$ -Stellen in  $\Pi$ .

Sei also  $w \in \Pi$  mit  $\wp(w) = c$ . Da  $\wp$  gerade ist, folgt  $\wp(-w) = c$ . □

**Korollar 27.5** Die doppelten  $c$ -Stellen der Weierstraß'schen  $\wp$ -Funktion liegen genau bei den ganzzahligen Linearkombinationen der Halbperioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .

**Beweis**  $z$  ist doppelte  $c$ -Stelle  $\Leftrightarrow z \stackrel{\text{mod}\Lambda}{\equiv} -z \Leftrightarrow z = n_1\omega_1 + n_2\omega_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . □

**Korollar 27.6** Folgendes gilt für die Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion:

1.  $\wp'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$
2. Die Konstanten  $e_1 := \wp(\omega_1), e_2 := \wp(\omega_2), e_3 := \wp(\omega_1 + \omega_2)$  sind paarweise verschieden

**Beweis**

1. "←": Da  $z$  doppelte  $c$ -Stelle ist verschwindet die Ableitung.  
"→": Alle von  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega_1 + \omega_2$  verschiedenen Stellen sind einfach, und somit  $\wp'(z) \neq 0$ .
2.  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega_1 + \omega_2$  sind doppelte  $c$ -Stellen. Da jeder Wert aber nur zwei mal angenommen wird, müssen  $e_1, e_2$  und  $e_3$  paarweise verschieden sein. □

**Satz 27.7** Die  $\wp$ -Funktion erfüllt folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 &= 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \\ &= 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \end{aligned}$$

mit  $g_2 = 60 \sum' \frac{1}{(2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2)^4}$  und  $g_3 = 140 \sum' \frac{1}{(2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2)^6}$ . Die Konstanten  $g_2, g_3$  sind allgemeine Standardkonstanten in der Theorie der elliptischen Funktionen.

**Beweis** Für  $z \rightarrow 0$  hat die Laurententwicklung für  $\wp(z)$  die Form:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \mathcal{O}(z^6)$$

(folgt aus Nachrechnen). Also gilt  $\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \frac{g_2}{10}z + \frac{g_3}{7}z^3 + \mathcal{O}(z^5)$ . Betrachte  $\varphi(z) := (\wp'(z))^2 - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3$ . Dann ist  $\varphi(z)$  elliptisch, holomorph (Laurententwicklung einsetzen und  $z \rightarrow 0$  betrachten. 0 ist einzige mögliche Singularität), und  $\varphi(0) = 0$ . Daraus folgt:  $\varphi \equiv 0$ . □



## 28 Die Weierstraß'schen Funktionen $\zeta$ und $\sigma$

Was wir in diesem Kapitel lernen:

- Definition und Eigenschaften der  $\zeta$ -Funktion
- Definition und Eigenschaften der  $\sigma$ - Funktion

Die Weierstraßsche Funktion  $\wp$  stellt das Analogon der einfach-periodischen Funktion  $\frac{1}{\sin^2 z}$  dar, die in ihren Periodenpunkten  $n\pi$  ebenfalls zweifache Pole mit den Hauptteilen  $\frac{1}{(z-n\pi)^2}$  besitzt. Weiter führte Weierstraß analog zur Funktion

$$\cot z = \frac{1}{z} - \int_0^z \left( \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} \right) dz \quad \text{mit} \quad (\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

die Zetafunktion  $\zeta(z)$  durch die Beziehung

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left( \wp(u) - \frac{1}{u^2} \right) du \quad \text{mit} \quad \zeta'(z) = -\wp(z)$$

ein. Die  $\zeta$ - Funktion hat folgende Eigenschaft:  $\zeta'(z) = -\wp(z)$ , und  $\zeta(z) = \frac{1}{z} + \mathcal{O}(1), z \rightarrow 0$ .

**Definition 28.1 (Weierstraß'sche  $\zeta$ -Funktion)** Die Weierstraß'sche Zetafunktion wird definiert als:

$$\begin{aligned} \zeta(z) &:= \frac{1}{z} - \int_0^z \left( \wp(u) - \frac{1}{u^2} \right) du \\ &= \frac{1}{z} + \sum' \left( \frac{1}{z - 2n_1\omega_1 - 2n_2\omega_2} + \frac{1}{2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2} + \frac{z}{(2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2)^2} \right) \end{aligned}$$

**Satz 28.1 (Eigenschaften der  $\zeta$ -Funktion)**

1.  $\zeta'(z) = -\wp(z)$
2. Die  $\zeta$ -Funktion ist ungerade:  $\zeta(-z) = -\zeta(z)$ .
3.  $\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1$  und  $\zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2$ .  
Dabei ist  $\eta_1 = \zeta(\omega_1)$  und  $\eta_2 = \zeta(\omega_2)$ ,  $\zeta$  ist also nicht elliptisch. Man nennt solche Funktionen elliptische Integrale.

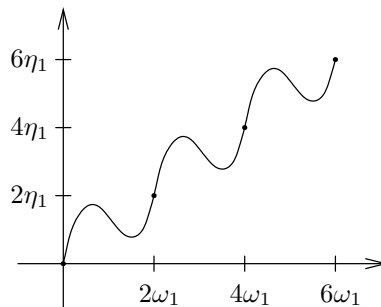


Abbildung 77: Beispiel einer Funktion, für die gilt:  $f(z + 2\omega_1) = f(z) + 2\eta_1$

4. Die einzige Singularität von  $\zeta(z)$  in  $\Pi$  liegt bei  $z = 0$  (auf ganz  $\mathbb{C}$  also in den Gitterpunkten  $\Lambda$ ) und ist von der Form  $\zeta(z) = \frac{1}{z} - \mathcal{O}(z^3)$ .

**Beweis**

zu 1. Nach Definition.

zu 2.  $\zeta(z)$  ist das Integral einer geraden Funktion (von 0 ausgehend).

zu 3.  $\zeta'(z + 2\omega_1) = \zeta'(z) \Rightarrow \zeta(z + 2\omega_1) - \zeta(z) = c_1$ ,  $c_1$  ist eine Konstante. Sei  $z = -\omega_1 \Rightarrow c_1 = \zeta(\omega_1) - \zeta(-\omega_1) = 2\zeta(\omega_1) = 2\eta_1$ . Für  $\eta_2$  analog.

zu 4. Entwicklung in eine Laurentreihe:  $\zeta(z) =_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} - \frac{g_2}{60}z^3 - \frac{g_3}{140}z^5 + \dots$

□

**Korollar 28.2 (Additionstheorem der  $\zeta$ -Funktion)**

$$\zeta(z + 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2) = \zeta(z) + 2n_1\eta_1 + 2n_2\eta_2.$$

**Proposition 28.3 (Legendre Identität)** Zwischen  $\eta_1, \omega_1, \eta_2, \omega_2$  gilt folgende Beziehung:

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$$

(die Perioden lassen sich immer so wählen).

**Beweis** Nachrechnen mit Hilfe des Residuensatzes:

Sei  $C$  die Randkurve des Parallelogramms  $-\omega_1 - \omega_2, \omega_1 - \omega_2, \omega_1 + \omega_2, -\omega_1 + \omega_2$ , die ein Periodenparallelogramm umrandet (siehe Abb. 78). 0 liegt nicht auf der Kurve  $C$ , also liegt keine Polstelle auf  $C$ . Deswegen kann der Residuensatz angewendet werden:

$$\begin{aligned} 2\pi i &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \zeta(z) \\ &= \int_C \zeta(z) dz \\ &= \int_{-\omega_1 - \omega_2}^{\omega_1 - \omega_2} (\zeta(z) - \zeta(z + 2\omega_2)) dz + \int_{-\omega_1 - \omega_2}^{-\omega_1 + \omega_2} (-\zeta(z) + \zeta(z + 2\omega_1)) dz \\ &= -2\eta_2 2\omega_1 + 2\eta_1 2\omega_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

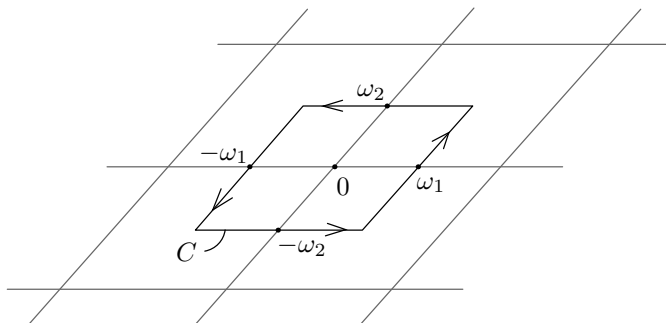


Abbildung 78: Die Randkurve  $C$  umschließt ein Periodenparallelogramm und die Polstelle 0 liegt nicht auf ihr.

□

Analog zur Funktion

$$\sin z = z \cdot e^{\int_0^z (\cot z - \frac{1}{z}) dz} \quad \text{mit} \quad (\log \sin z)' = \cot z$$

wird die Sigmafunktion  $\sigma(z)$  nach Weierstrass definiert, welche folgende Eigenschaften besitzt:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = (\log \sigma(z))' = \zeta(z).$$

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = \sum'_{\Omega} \left( \frac{1}{z-\Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2} \right), \quad \Omega := 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2.$$

$$\int_0^z (\zeta(u) - \frac{1}{u}) du = \sum'_{\Omega} (\log(z - \Omega) - \log \Omega + \frac{z}{\Omega} + \frac{z^2}{2\Omega^2}) = \sum'_{\Omega} (\log(1 - \frac{z}{\Omega}) + \frac{z}{\Omega} + \frac{z^2}{2\Omega^2}) =: \log \frac{\sigma(z)}{z}$$

**Definition 28.2 (Weierstraß'sche  $\sigma$ -Funktion)** Die Weierstraß'sche Sigmafunktion ist definiert als

$$\sigma(z) := z \cdot \prod'_{\Omega} \left( 1 - \frac{z}{\Omega} \right) e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{z^2}{2\Omega^2}}.$$

Die Produktformel konvergiert, weil  $\sum'$  konvergiert.

**Satz 28.4 (Eigenschaften der  $\sigma$ -Funktion)**

1.  $\sigma(z)$  ist eine ganze Funktion. Die Nullstellen sind einfach und liegen in den Gitterpunkten  $2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2$ .
2.  $\sigma(z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z)$   
 $\sigma(z + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(z+\omega_2)}\sigma(z)$
3.  $\sigma(-z) = -\sigma(z)$ , die  $\sigma$ -Funktion ist also ungerade.
4.  $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$

**Beweis** (1) und (4) folgen direkt aus der Definition.

$$(3) \quad \sigma \text{ ist ungerade: } \sigma(-z) = -z \prod'_{\Omega} \left( 1 + \frac{z}{\Omega} \right) e^{-\frac{z}{\Omega} + \frac{z^2}{\Omega^2}} \underbrace{=}_{\Omega=-\Omega} -z \prod'_{\Omega} \left( 1 - \frac{z}{\Omega} \right) e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{z^2}{\Omega^2}} = -\sigma(z)$$

$$(2) \quad \frac{\sigma'(z+2\omega_1)}{\sigma(z+2\omega_1)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z+2\omega_1) - \zeta(z) = 2\eta_1$$

$$(\log \sigma(z+2\omega_1))' - (\log \sigma(z))' = 2\eta_1$$

mit Integration:

$$\log \sigma(z+2\omega_1) - \log \sigma(z) = 2\eta_1 z + c + 2\pi i N, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\sigma(z+2\omega_1)}{\sigma(z)} = e^{2\eta_1 z + c}.$$

Um  $c$  zu bestimmen, nehme  $z = -\omega_1$

$$\frac{\sigma(\omega_1)}{\underbrace{\sigma(-\omega_1)}_{=-1}} = e^{-2\eta_1\omega_1} c \Rightarrow c = -e^{2\eta_1\omega_1}$$

$$\Rightarrow \sigma(z+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z)$$

□

**Beispiel 28.1 (Quotient aus  $\sigma$ -Funktionen)** Betrachte die Funktion:  $\varphi := \frac{\sigma(z-b)}{\sigma(z-a)}$ ;  $a, b \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$$\varphi(z + 2\omega_i) = \frac{\sigma(z - b + 2\omega_i)}{\sigma(z - a + 2\omega_i)} = e^{2\eta_i(z-b+\omega_i-z+a-\omega_i)} \frac{\sigma(z-b)}{\sigma(z-a)} = e^{2\eta_i(a-b)} \varphi(z),$$

der multiplikative Faktor ist also von  $z$  unabhängig.

Die Polstellen von  $\varphi_{ab}$  liegen bei  $a+2n_1\omega_1+2n_2\omega_2$  und die Nullstellen bei  $b+2n_1\omega_1+2n_2\omega_2$ ,  $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}$ .

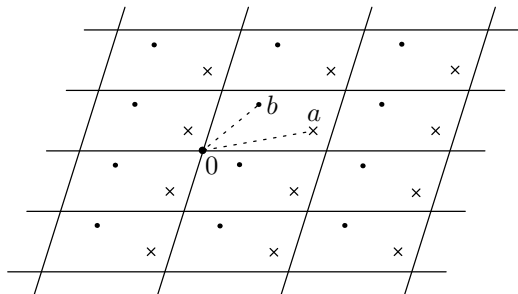


Abbildung 79: Periodengitter mit Polstellen bei  $x \equiv a$  und Nullstellen bei  $\bullet \equiv b$ .

## 29 Darstellung Elliptischer Funktionen durch Weierstraß'sche Funktionen

Übersicht über die Weierstraß'schen Funktionen:

Funktion	Verhalten bei 0	$f(z + 2\omega_i)$
$\wp$ -Funktion: $\wp(z) \simeq \frac{1}{z^2} + \text{holo.}$	Doppelte Polstelle	$\wp(z + 2\omega_i) = \wp(z)$
$\zeta$ -Funktion: $\zeta(z) \simeq \frac{1}{z} + \text{holo.}$	Einfache Polstelle	$\zeta(z + 2\omega_i) = \zeta(z) + 2\eta_i$
$\sigma$ -Funktion: $\sigma(z) \simeq z + \text{holo.}$	Einfache Nullstelle	$\sigma(z + 2\omega_i) = -e^{2\eta_i(z+\omega_i)}\sigma(z)$

**Satz 29.1 (Eindeutige Darstellung elliptischer Funktionen)** Sei  $f$  eine elliptische Funktion mit den Nullstellen  $b_1, \dots, b_n$  und Polstellen  $a_1, \dots, a_n$  (mit Vielfachheit gezählt). Dann gilt:

$$f(z) = C \frac{\sigma(z - b_1) \cdot \dots \cdot \sigma(z - b_{n-1}) \cdot \sigma(z - b_n)}{\sigma(z - a_1) \cdot \dots \cdot \sigma(z - a_n)}, C \in \mathbb{C}$$

**Beweis** Wir zeigen zunächst, dass die Formel eine elliptische Funktion angibt:

$$\varphi_{ab}(z) = \frac{\sigma(z - b)}{\sigma(z - a)}, \quad \varphi_{ab}(z + 2\omega_i) = e^{2\eta_i(a-b)}\varphi_{ab}(z)$$

Wir wissen:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \stackrel{\text{mod } \Lambda}{\equiv} (b_1 + \dots + b_n)$$

also gibt es  $\tilde{b}_n \equiv b_n$  so dass  $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + \tilde{b}_n$ . Daraus folgt:

$$f(z + 2\omega_i) = e^{2\eta_i(a_1 + \dots + a_n - b_1 - \dots - \tilde{b}_n)} f(z) = f(z)$$

Also gibt uns die Formel eine elliptische Funktion mit den gewünschten Null- und Polstellen an.

Die Eindeutigkeit dieser Darstellung bis auf eine multiplikative Konstante bleibt zu zeigen:

Seien  $f$  und  $g$  zwei elliptische Funktionen mit denselben Null- und Polstellen (mit Vielfachheit gezählt).

Dann ist  $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$  elliptisch und holomorph (Pol- und Nullstellen kürzen sich)  $\Rightarrow h(z) \equiv \text{const.}$

Also gilt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 29.1** Betrachte  $f(z) := \wp(z) - \wp(w)$ , wobei  $0 \neq w \notin \Lambda$  keine Periode ist. Die Polstellen von  $f$  sind  $a_1 = a_2 = 0$ , die Nullstellen von  $f$  sind  $b_1 = -b_2 = w$ .

$\Rightarrow \wp(z) - \wp(w) = C \frac{\sigma(z-w)\sigma(z+w)}{\sigma^2(z)}$ . Wir wollen nun die Konstante  $C$  bestimmen:

$$z \rightarrow 0, \quad \frac{1}{z^2} - \wp(w) = C \frac{\sigma(-w)\sigma(w)}{z^2} = -C \frac{\sigma^2(w)}{z^2} \Rightarrow C = -\frac{1}{\sigma^2(w)}$$

$$\Rightarrow \wp(z) - \wp(w) = -\frac{\sigma(z-w)\sigma(z+w)}{\sigma^2(z)\sigma^2(w)}.$$

**Korollar 29.2** Für die logarithmische Ableitung der Funktion  $\wp(z) - c$  mit  $c = \wp(w)$  gilt:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(w)} \stackrel{\frac{\sigma'}{\sigma} = \zeta}{=} -2\zeta(z) + \zeta(z-w) + \zeta(z+w).$$

**Beweis** Die Ableitung von  $\wp(z) - \wp(w)$  ist  $\wp'(z)$ , aber gleichzeitig muss gelten:  $\wp'(z) = \left(-\frac{\sigma(z-w)\sigma(z+w)}{\sigma^2(z)\sigma^2(w)}\right)'$ . Allgemein gilt für die logarithmische Ableitung einer Funktion  $f = f_1 \cdot f_2$ :

$$\begin{aligned}\frac{f'}{f} &= (\log f)' \\ &= (\log f_1 f_2)' \\ &= (\log f_1 + \log f_2)' \\ &= \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}.\end{aligned}$$

Weiter gilt für die logarithmische Ableitung einer Funktion  $f = \frac{1}{g^2}$ :

$$\begin{aligned}\frac{f'}{f} &= \frac{-2\frac{g'}{g^3}}{\frac{1}{g^2}} \\ &= -2\frac{g'}{g}.\end{aligned}$$

Für unsere Funktion  $-(\wp(z) - \wp(w)) = \frac{\sigma(z-w)\sigma(z+w)}{(\sigma(z)\sigma(w))^2} = \frac{f_1 f_2}{g^2}$  mit  $f_1 = \sigma(z-w)$ ,  $f_2 = \sigma(z+w)$  und  $g = \sigma(z)\sigma(w)$  folgt somit für die logarithmische Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\wp'}{\wp(z) - \wp(w)} &= (\log \wp(z) - \wp(w))' \\ &= \left(\log \frac{f_1 f_2}{g^2}\right)' \\ &= \left(\log \frac{f_1}{g} + \log \frac{f_2}{g}\right)' \\ &= \left(\frac{f_1'}{g} + \frac{f_2'}{g}\right)' \\ &= \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} - 2\frac{g'}{g} \\ &= \left(* : \frac{\left(\frac{f_i}{g}\right)'}{\frac{f_i}{g}} = \frac{\frac{g f_i' - g' f_i}{g^2}}{\frac{f_i}{g}} = \frac{f_i'}{f_i} - \frac{g'}{g}\right).\end{aligned}$$

Es ist  $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z) \Rightarrow \frac{f_1'}{f_1} = \frac{(\sigma(z-w))'}{\sigma(z-w)} = \zeta(z-w)$  und  $\frac{f_2'}{f_2} = \frac{(\sigma(z+w))'}{\sigma(z+w)} = \zeta(z+w)$ . Ausserdem ist  $\frac{g'}{g} = \frac{(\sigma(z)\sigma(w))'}{\sigma(z)\sigma(w)} = \zeta(z)$ , da  $\sigma(w) = \text{const.}$  Also ergibt sich:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(w)} = \zeta(z-w) + \zeta(z+w) - 2\zeta(z).$$

□

**Satz 29.3** Eine elliptische Funktion  $f(z)$  habe nur einfache Polstellen  $a_1, \dots, a_n$  mit Residuen  $A_1, \dots, A_n$ . Dann ist:

$$f(z) = A + \sum_{j=1}^n A_j \zeta(z - a_j), \quad A \in \mathbb{C}.$$

**Beweis** Die Funktion  $f$  in der angegebenen Darstellung hat die gewünschten Polstellen  $a_j$  und Residuen  $A_j$ , denn es ist  $\operatorname{res}_{z=0} \zeta(z) = 1$ . Die Formel liefert eine elliptische Funktion:

$$f(z + 2\omega_i) \underbrace{=}_* f(z) + \sum_{j=1}^n A_j 2\eta_j \underbrace{=}^{**} f(z)$$

\*:  $\zeta(z + 2\omega_i) = \zeta(z) + 2\eta_i$

\*\* : Es gilt  $A_1 + \dots + A_n = 0$  folgt aus 27.10, da  $f$  elliptisch.

Zur Eindeutigkeit: Seien  $f_1, f_2$  elliptische Funktionen mit den Eigenschaften wie im Satz. Beide Funktionen haben die gleichen Residuen und nur einfache Polstellen bei  $a_i$ , also können sie in einer Umgebung von  $a_i$  als  $f_1(z) = \frac{A_i}{(z-a_i)} + \text{holo.}$  und  $f_2(z) = \frac{A_i}{(z-a_i)} + \text{holo.}$  dargestellt werden. Dadurch heben sich bei einer Subtraktion die Hauptteile der beiden Funktionen weg. Die Differenz  $f_1 - f_2$  ist also holomorph und sowieso elliptisch  $\Rightarrow$  Behauptung.  $\square$

**Beispiel 29.2** Betrachte  $f(z) = \frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(w)}$ . Die Funktion hat die Singularitäten:

1.  $a_1 = w$  mit  $\operatorname{res}_w f(z) = \frac{\wp'(w)}{\wp'(z)|_{z=w}} = 1$  ( $\wp(z) - \wp(w) = \wp'(w)(z-w) + \dots$ )
2.  $a_2 = -w$  mit  $\operatorname{res}_{-w} f(z) = \frac{\wp'(-w)}{\wp'(w)|_{-w}} = 1$
3.  $a_3 = 0$  mit  $\operatorname{res}_0 f(z) = \operatorname{res}_0 \frac{-2}{z^2} = -2$

$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(w)} = -2\zeta(z) + \zeta(z-w) + \zeta(z+w) + A$ .  $\wp'(z)$  ist ungerade,  $\wp(z) - \wp(w)$  ist gerade, also ist der Quotient wieder ungerade.  $\zeta$  ist eine ungerade Funktion  $\Rightarrow A$  ist ungerade  $\Rightarrow A \equiv 0$ .

**Korollar 29.4 (Additionstheorem für die  $\zeta$ -Funktion)** Für die  $\zeta$ -Funktion gilt folgende Additionsregel:

$$\zeta(z+w) - \zeta(z) - \zeta(w) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}.$$

**Beweis** Mit Hilfe des Beispiels:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(w)} + \frac{\wp'(w)}{\wp(w) - \wp(z)} = (-2\zeta(z) + \zeta(z-w) + \zeta(z+w)) + (-2\zeta(w) + \zeta(w-z) + \zeta(z+w)) = -2\zeta(z) - 2\zeta(w) + 2\zeta(z+w). \quad \square$$

**Korollar 29.5 (Additionstheorem für die  $\wp$ -Funktion)** Für die  $\wp$ -Funktion gilt die Additionsregel:

$$\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2.$$

**Beweis**  $(\zeta(z))' = -\wp(z)$ . Differenziere die Additionsformel für  $\zeta$  nach  $z$  und  $w$ .

$$\wp(z+w) = \wp(z) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\wp(z) - \wp(w))\wp''(z) - (\wp'(z) - \wp'(w))\wp'(z)}{(\wp(z) - \wp(w))^2} \quad (\text{Ableitung nach } z)$$

$$\wp(z+w) = \wp(w) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\wp(z) - \wp(w))(-\wp''(w)) - (\wp'(z) - \wp'(w))(-\wp'(w))}{(\wp(z) - \wp(w))^2} \quad (\text{Ableitung nach } w)$$

$$2\wp(z+w) = \wp(z) + \wp(w) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\wp(z) - \wp(w))(\wp''(z) - \wp''(w)) - (\wp'(z) - \wp'(w))^2}{(\wp(z) - \wp(w))^2}$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung für  $\wp$  (Satz 27.7) erhält man:

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 &= 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \\ \stackrel{\text{ableiten}}{\Rightarrow} 2\wp'\wp'' &= 12\wp^2\wp' - g_2\wp' \\ 2\wp'' &= 12\wp^2 - g_2 \\ \wp''(z) - \wp''(w) &= 6(\wp^2(z) - \wp^2(w)) \\ &= 6(\wp(z) - \wp(w))(\wp(z) + \wp(w)). \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} 2\wp(z+w) &= \wp(z) + \wp(w) - \frac{1}{2} \cdot (6(\wp(z) + \wp(w))) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2 \\ 2\wp(z+w) &= -2\wp(z) - 2\wp(w) + \frac{1}{2} \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 29.3** Abschließend betrachten wir nicht einfache Polstellen:

Sei  $f(z)$  eine elliptische Funktion mit

$$f(z) \underset{z \rightarrow a_k}{=} \frac{A_{k,1}}{z - a_k} - \frac{A_{k,2}}{(z - a_k)^2} + \dots + (-1)^{l_k-1} \cdot \frac{A_{k,l_k}(l_k-1)!}{(z - a_k)^{l_k}} + \text{holo.}$$

$f$  besitzt eine Polstelle der Ordnung  $l_k$  in  $a_k$ . Die  $A_{k,j}$  sind frei wählbar, solange  $\sum_{k=1}^n A_{k,1} = 0$ . Dann gilt:

$$f(z) = A + \sum_{k=1}^n (A_{k,1}\zeta(z - a_k) + A_{k,2}\wp(z - a_k) + \dots + A_{k,l_k}\wp^{(l_k-2)}(z - a_k))$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \text{holo.} \Rightarrow \wp'(z) = -2\frac{1}{z^3} + \text{holo.}, \wp^{(l_k-2)}(z) = (l_k-1)!(-1)^{(l_k-1)}\frac{1}{z^{l_k}} + \text{holo.}$$



## Literatur

- [1] K. Jählich, *Einführung in die Funktionentheorie*, Springer.
- [2] W. Fischer & I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg.
- [3] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer.