

Günter Bärwolff

Höhere Mathematik
für Naturwissenschaftler und Ingenieure

unter Mitarbeit von
Gottfried Seifert

18. August 2017

Vorwort

In dem vorliegenden Buch sind zum einen langjährige Erfahrungen bei der projektorientierten Zusammenarbeit zwischen Mathematikern, Physikern und Ingenieuren in interdisziplinären Arbeitsgruppen zur Lösung angewandter mathematischer Aufgaben, zum anderen die Erfahrungen bei der mathematischen Grundausbildung von Ingenieurstudenten an der Technischen Universität Berlin zusammengefasst. Dabei konnten wesentliche Vorstellungen der Kollegen D. Ferus, R.D. Grigorieff, D. Krüger, K. Kutzler und H. Bausch, die ich in den vergangenen 10 Jahren auch in meinen Vorlesungen verwendet habe, dankenswerterweise genutzt werden.

Dieses Lehrbuch hat zum Ziel, in einem Band die mathematischen Inhalte zu behandeln, die üblicherweise im Grundstudium der Ingenieure und Physiker vermittelt werden. Da somit in einem Band ein sehr breites Spektrum zu bearbeiten war, haben wir uns speziell bei den Themen "Funktionentheorie", "Partielle Differentialgleichungen", "Integraltransformationen" und "Variationsrechnung und Optimierung" nur auf Grundlagen konzentriert, die in der Mathematikausbildung von Ingenieuren an der Technischen Universität Berlin seitens der Ingenieur fakultäten für wichtig erachtet wurden. Der Inhalt des Buches bildet die Mathematikurse weitestgehend ab, die an der Technischen Universität Berlin im Ingenieurgrundstudium vermittelt werden.

Auf Vorschlag einiger in der Mathematikausbildung von Ingenieuren tätigen Fachkollegen anderer Universitäten wurde der ursprünglich vorgesehene Rahmen um Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik beträchtlich erweitert. Diese beiden Kapitel wurden im Wesentlichen von meinem langjährigen Kollegen G. Seifert geschrieben, der durch kritische Hinweise und Verbesserungsvorschläge auch an Teilen des übrigen Textes mitgewirkt hat.

Um das Buch lesbar zu gestalten, war es nicht immer möglich, nur Begriffe zu verwenden, die schon ausführlich besprochen und definiert sind. Es liegt z.B. nahe, die Binomialkoeffizienten im Abschnitt über natürliche Zahlen einzuführen. Um dabei dann auch die binomischen Formeln zur Berechnung von $(a + b)^n$ sinnvoll behandeln zu können, setzen wir voraus, dass a und b reelle Zahlen sind, ohne den Begriff der reellen Zahl an dieser Stelle schon definiert zu haben. Ein anderes Beispiel ist der Vektorbegriff, bei dem wir uns zunächst auf Schulkenntnisse stützen, wenn wir Ungleichungen und Operationen mit komplexen Zahlen graphisch darstellen. Später werden dann die Vektoren als Elemente spezieller abstrakter Vektorräume behandelt. Wir waren bestrebt, die aus Darstellungs- und Lesbarkeitsgründen vorab verwendeten Begriffe in den betreffenden thematischen Abschnitten zu definieren.

Das Buch soll einerseits Studierenden der Ingenieur- und Naturwissenschaften bei der Mathematikausbildung an der Universität oder Fachhochschule ein nützlicher Begleiter sein, andererseits aber auch dem in der Praxis tätigen Ingenieur

oder Physiker als Nachschlagewerk dienen. Neben Ingenieuren und Naturwissenschaftlern richtet sich das Buch durch das breite Themenspektrum bis hin zur nichtlinearen Optimierung und Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik auch an Techno- und Wirtschaftsmathematiker oder Betriebs- und Volkswirte, die an einer fundierten mathematischen Ausbildung als Grundlage für eine Unternehmensführung interessiert sind. Bei der Vermittlung der mathematischen Inhalte spielt der Aspekt der praktischen Nutzung der dargelegten Methoden und Instrumente eine wesentliche Rolle. Allerdings kann es mit diesem Buch nicht nur darum gehen, Studierende, die schnell und "irgendwie" ihren Mathematikkurs überstehen wollen, anzusprechen. Das Buch richtet sich vor allem an Leute, die an Mathematik und am Verständnis von Inhalten interessiert sind. Deshalb wird im Rahmen der Möglichkeiten von 870 Seiten eine weitestgehend stimmige Darstellung der angesprochenen Themen angestrebt. Will man das erreichen, müssen auch recht theoretisch anmutende Themen wie z.B. die Eigenschaften von Funktionenreihen oder die Eigenschaften von Determinanten und Matrizen in der linearen Algebra diskutiert werden. Beweise von Sätzen und Formeln führen wir in der Regel dort, wo es um das Erlernen von Beweistechniken geht, oder wo mit den Beweisen durch konstruktive Methoden das Verständnis von Inhalten gefördert oder die mathematische Allgemeinbildung erweitert wird. Die Voraussetzungen von Sätzen und mathematischen Aussagen werden nicht immer in der schärfstmöglichen Form angegeben. Als Beispiel sei etwa die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit einer Funktion genannt, deren Ableitung eigentlich nur integrierbar sein muss, weil sie in einem Integralausdruck verwendet wird. Hier wurde die Stetigkeit der Ableitung gefordert, obwohl die schwächere Forderung der Integrierbarkeit ausgereicht hätte. Allerdings haben für die Anwendung relevante Funktionen in der Regel stetige Ableitungen, so dass die stärkere Voraussetzung dann meist erfüllt ist.

Im Anhang werden in einer kompakten Sammlung wichtige Formeln zu den einzelnen Kapiteln zusammengefasst. Da die Lösungen der in jedem Kapitel gestellten Aufgaben recht ausführlich dargestellt werden, werden sie aus Platzgründen zum Download im Internet auf www.spektrum-verlag.de als pdf- und als ps-Datei angeboten.

Für an vertiefender Literatur und an lückenlosen Nachweisen interessierte Leser werden im Anhang zu den einzelnen Kapiteln mathematische Monographien angegeben.

Herrn Dr. Andreas Rüdinger als verantwortlichen Lektor von Spektrum Akademischer Verlag möchte ich zum einen für die Anregung zu diesem Lehrbuch und zum anderen für die problemlose Zusammenarbeit von der Vertragsentstehung bis zum fertigen Buch meinen Dank aussprechen. Insbesondere in der Endphase der Fertigstellung des Manuskripts war die unkomplizierte Zusammenarbeit mit Frau Barbara Lühker von Spektrum Akademischer Verlag hilfreich.

Zu guter letzt möchte ich Frau Gabriele Graichen, die die vielen Grafiken auf dem Computer erstellt hat, für die effiziente Zusammenarbeit herzlich danken, ohne die das Buch nicht möglich gewesen wäre.

Berlin, August 2004

Günter Bärwolff

Vorwort zur 2. Auflage

Den Vorschlägen von Fachkolleginnen und -kollegen folgend, wird die 2. Auflage um zwei Themengebiete ergänzt. Einmal wird das Kapitel "Gewöhnliche Differentialgleichungen" um einen Abschnitt zu Zweipunkt-Randwertproblemen und Rand-Eigenwertproblemen erweitert. Des Weiteren wurde ein Kapitel zur Thematik "Tensorrechnung" hinzugefügt. Das Kapitel "Partielle Differentialgleichungen" wurde auch mit Bezug auf den neuen Abschnitt zu Randwertproblemen durch meinen Kollegen Gottfried Seifert umfassend überarbeitet. Die Formelsammlung wurde entsprechend ergänzt. Die sorgfältige Durchsicht der 1. Auflage, die sich daraus ergebende Überarbeitung durch G. Seifert und die Aufbereitung vorhandener sowie die Erzeugung neuer Grafiken durch Frau Gabriele Graichen haben dem Buch zweifellos sehr gut getan. Ebenso ausgesprochen dankbar bin ich Frau B. Lühker und Herrn Dr. A. Rüdinger von Spektrum Akademischer Verlag für das akribische Lesen des Manuskripts, speziell der neu hinzugekommenen Themen, und die klugen Hinweise. Besonders bei der indexträchtigen Tensorrechnung hat das zur rechtzeitigen Korrektur einer Reihe von Flüchtigkeitschreibfehlern beigetragen.

Außerdem wurden selbstverständlich berechtigte Hinweise von Lesern berücksichtigt, insbesondere ein wesentlich umfangreicherer Index erstellt und das Erratum der 1. Auflage eingearbeitet.

Berlin, November 2005

Günter Bärwolff

Vorwort zur 3. Auflage

In der 3. Auflage sind neben einer Reihe von Korrekturen kleinerer Unkorrektheiten der vorigen Auflagen in verschiedenen Kapiteln Ergänzungen als Reaktion auf Meinungsäußerungen von Lesern und Fachkollegen sowie des bewährten Lektorats des Verlags vorgenommen worden. So wurden z.B. der Begriff der Orthogonalität allgemeiner gefasst und der Nutzen von orthogonalen Matrizen anhand von Beispielen belegt. Außerdem wurde dem Wunsch Rechnung getragen, den Index um wichtige Stichworte zu ergänzen.

Obwohl in dem vorliegenden Lehrbuch hauptsächlich darum geht, den Lesern die behandelten Gebiete der Höheren Mathematik vermitteln und sie in die Lage zu versetzen, Begriffe und Konzepte zu verstehen und anzuwenden, habe ich den Anhang um eine kurze Einführung in das Computeralgebra-System MATLAB¹ bzw. Octave² ergänzt. Auch aus dem Grund, um bestimmte Techniken wie z.B. die Produkte von Matrizen oder Vektoren effizient auszuführen bzw. eigene Rechnungen zu überprüfen.

Sehr hilfreich für das Verständnis sind darüberhinaus die in Matlab/Octave vorhandenen Möglichkeiten Sachverhalte zu visualisieren. Letztendlich danke ich Frau B. Lühker und Herrn Dr. A. Rüdinger von Springer Spektrum für die traditionell gute Zusammenarbeit.

Berlin, Juni 2017

Günter Bärwolff

¹MATLAB ist eine kommerzielle Software des US-amerikanischen Unternehmens MathWorks

²Open-Source frei verfügbare Alternative zu MATLAB

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Logische Grundlagen	2
1.2 Grundlagen der Mengenlehre	8
1.3 Abbildungen	15
1.4 Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion	16
1.5 Ganze, rationale und reelle Zahlen	22
1.6 Ungleichungen und Beträge	27
1.7 Komplexe Zahlen	36
1.8 Aufgaben	54
2 Analysis von Funktionen einer Veränderlichen	55
2.1 Begriff der Funktion	56
2.2 Eigenschaften von Funktionen	62
2.3 Elementare Funktionen	65
2.4 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	69
2.5 Eigenschaften stetiger Funktionen	89
2.6 Differenzierbarkeit von Funktionen	95
2.7 Lineare Approximation und Differential	101
2.8 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	105
2.9 TAYLOR-Formel und der Satz von TAYLOR	111
2.10 Extremalprobleme	116
2.11 BANACHScher Fixpunktsatz und NEWTON-Verfahren	120
2.12 Kurven im \mathbb{R}^2	126
2.13 Integralrechnung	137
2.14 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern	164
2.15 Parameterintegrale	166
2.16 Uneigentliche Integrale	168
2.17 Numerische Integration	179
2.18 Interpolation	183
2.19 Aufgaben	189
3 Reihen	191
3.1 Zahlenreihen	192
3.2 Funktionenfolgen	201
3.3 Gleichmäßig konvergente Reihen	207
3.4 Potenzreihen	209
3.5 Operationen mit Potenzreihen	212
3.6 Komplexe Potenzreihen, Reihen von $\exp x$, $\sin x$ und $\cos x$	213

3.7	Numerische Integralberechnung mit Potenzreihen	226
3.8	Konstruktion von Reihen	228
3.9	FOURIER-Reihen	231
3.10	Aufgaben	263
4	Lineare Algebra	265
4.1	Determinanten	271
4.2	CRAMERSche Regel	284
4.3	Matrizen	287
4.4	Lineare Gleichungssysteme und deren Lösung	306
4.5	Allgemeine Vektorräume	314
4.6	Orthogonalisierungsverfahren nach ERHARD SCHMIDT	330
4.7	Eigenwertprobleme	338
4.8	Vektorrechnung im \mathbb{R}^3	354
4.9	Aufgaben	372
5	Analysis im \mathbb{R}^n	375
5.1	Eigenschaften von Punktmenen aus dem \mathbb{R}^n	376
5.2	Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher	381
5.3	Kurven im \mathbb{R}^n	382
5.4	Stetigkeit von Abbildungen	390
5.5	Partielle Ableitung einer Funktion	393
5.6	Ableitungsmatrix und HESSE-Matrix	398
5.7	Differenzierbarkeit von Abbildungen	400
5.8	Differentiationsregeln und die Richtungsableitung	401
5.9	Lineare Approximation	404
5.10	Totales Differential	406
5.11	TAYLOR-Formel und Mittelwertsatz	408
5.12	Satz über implizite Funktionen	412
5.13	Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen	415
5.14	Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen	420
5.15	Ausgleichsrechnung	426
5.16	NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme	430
5.17	Aufgaben	432
6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	435
6.1	Einführung	436
6.2	Allgemeine Begriffe	437
6.3	Allgemeines zu Differentialgleichungen erster Ordnung	438
6.4	Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Variablen	441
6.5	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	444
6.6	Durch Transformationen lösbare Differentialgleichungen	447
6.7	Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	454
6.8	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	470
6.9	Anmerkungen zum "Rechnen" mit Differentialgleichungen	491
6.10	Numerische Lösungsmethoden	493

6.11	Potenzreihen zur Lösung von Differentialgleichungen	503
6.12	BESSELSche und LEGENDRESche Differentialgleichungen	506
6.13	Rand- und Eigenwertprobleme	517
6.14	Nichtlineare Differentialgleichungen	532
6.15	Aufgaben	545
7	Vektoranalysis und Kurvenintegrale	549
7.1	Die grundlegenden Operatoren der Vektoranalysis	550
7.2	Rechenregeln und Eigenschaften der Operatoren der Vektoranalysis	554
7.3	Potential und Potentialfeld	556
7.4	Skalare Kurvenintegrale	557
7.5	Vektorielltes Kurvenintegral – Arbeitsintegral	561
7.6	Stammfunktion eines Gradientenfeldes	565
7.7	Berechnungsmethoden für Stammfunktionen	570
7.8	Vektorpotentiale	571
7.9	Aufgaben	573
8	Flächenintegrale, Volumenintegrale und Integralsätze	575
8.1	Flächeninhalt ebener Bereiche	576
8.2	RIEMANNsches Flächenintegral	578
8.3	Flächenintegralberechnung durch Umwandlung in Doppelintegrale	581
8.4	Satz von GREEN	587
8.5	Transformationsformel für Flächenintegrale	592
8.6	Integration über Oberflächen	597
8.7	Satz von STOKES	616
8.8	Volumenintegrale	621
8.9	Transformationsformel für Volumenintegrale	625
8.10	Satz von GAUSS	629
8.11	Aufgaben	638
9	Partielle Differentialgleichungen	641
9.1	Was ist eine partielle Differentialgleichung?	642
9.2	Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung	643
9.3	Beispiele von partiellen Differentialgleichungen aus der Physik	646
9.4	Wellengleichung	650
9.5	Wärmeleitungsgleichung	682
9.6	Potentialgleichung	689
9.7	Entdimensionierung von partiellen Differentialgleichungen	696
9.8	Aufgaben	698
10	Funktionentheorie	701
10.1	Komplexe Funktionen	702
10.2	Differentiation komplexer Funktionen	704
10.3	Elementare komplexe Funktionen und Potenzreihen	709
10.4	Konforme Abbildungen	711
10.5	Integration komplexer Funktionen	715

10.6	Reihenentwicklungen komplexer Funktionen	724
10.7	Behandlung von Singularitäten und der Residuensatz	725
10.8	Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes	732
10.9	Harmonische Funktionen	738
10.10	Aufgaben	743
11	Integraltransformationen	745
11.1	Definition von Integraltransformationen	746
11.2	FOURIER-Transformation	748
11.3	Umkehrung der FOURIER-Transformation	753
11.4	Eigenschaften der FOURIER-Transformation	754
11.5	Anwendung der FOURIER-Transformation auf partielle Differenti- algleichungen	756
11.6	LAPLACE-Transformation	758
11.7	Inverse LAPLACE-Transformation	761
11.8	Rechenregeln der LAPLACE-Transformation	765
11.9	Praktische Arbeit mit der LAPLACE-Transformation und der Rück- transformation	772
11.10	Aufgaben	779
12	Variationsrechnung und Optimierung	781
12.1	Einige mathematische Grundlagen	782
12.2	Funktionale auf BANACH-Räumen	785
12.3	Variationsprobleme auf linearen Mannigfaltigkeiten	798
12.4	Klassische Variationsrechnung	803
12.5	Einige Variationsaufgaben	806
12.6	Natürliche Randbedingungen und Transversalität	813
12.7	Isoperimetrische Variationsprobleme	816
12.8	Funktionale mit mehreren Veränderlichen	818
12.9	Aufgaben	819
13	Elemente der Tensorrechnung	821
13.1	Tensoralgebra	822
13.2	Tensoranalysis	837
13.3	Aufgaben	848
14	Wahrscheinlichkeitsrechnung	849
14.1	Zufällige Ereignisse	850
14.2	Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse	856
14.3	Zufallsgrößen	865
14.4	Zufällige Vektoren	881
14.5	Aufgaben	907

15 Statistik	909
15.1 Stichproben	910
15.2 Punktschätzung	913
15.3 Intervallschätzung	919
15.4 Statistische Tests	932
15.5 Korrelations- und Regressionsanalyse	942
15.6 Aufgaben	951
A Formelkompendium	955
B Octave/MATLAB	969
B.1 Eingabekonventionen	969
B.2 Kontrollstrukturen	970
B.3 Vektoren und Matrizen	972
B.4 Allgemeines	973
B.5 Visualisierung: 2-dimensionale Plots	975
B.6 Rechnen mit Matrizen	976
B.7 Funktionen	979
B.8 Rekursionen	980
B.9 Komplexität	981
B.10 Handles	982
B.11 Verschiedenes	983
C Literaturhinweise	985
Index	987