Riesz'scher Darstellungssatz und Duale Räume

LV Numerik Partieller Differentialgleichungen Bärwolff SS 2010

14.06.2010 Julia Buwaya

In der Vorlesung wurde der Riesz'sche Dartsellungssatz als wichtiges Werkzeug für den Beweis des Lemmas von Max-Milgram genannt. Der Riezsche Darstellungssatz liefert die Lösbarkeit von Variationsgleichungen für Randwertprobleme. Hier werden die besonderen Eigenschaften von Dualen Räume ausgenutzt.

1 Grundlagen

1.1 Duale Räume

Zu einem Vektorraum V über einem Körper K bezeichnet V* den zu V gehörigen Dualraum, das heißt die Menge aller linearen Abbildungen von V nach K. Seine Elemente werden je nach Kontext auch Funktionale, Linearformen oder auch 1-Formen genannt. V* ist selbst ein Vektorraum über dem Körper K.

Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum so ist auch V* endlich-dimensional, und es gilt: $dim_K V* = dim_K V$.

Sei $X = \{x_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ eine endliche Basis von V, dann heißt $X^* = \{x_i^*\}_{i=1,2,\ldots,n}$ mit

$$\begin{aligned} x_i^* : V &\rightarrow K \text{ linear und} \\ x_i^*(x_j) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } j \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

die duale Basis zur Basis X und ist eine Basis des Dualraumes V*. Ist V ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, so lässt sich auf diese Art und Weise i.A. keine duale Basis konstruieren.

Die Wirkung der Elemente von V* auf V definiert eine Bilinearform:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ V^* \times V \rightarrow K, \ \langle f, x \rangle = f(x)$$

Die Wirkung dualer Basisvektoren $x_i^* \in V^*$ auf Basisvektoren $x_j \in V$ lässt sich damit übersichtlich mit dem Kronecker-Delta schreiben:

$$\langle x_i^*, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

1.1.1 Topologischer Dualraum eines normierten Vektorraums

Falls der zugrundeliegende Vektorraum V ein normierter Vektorraum, ist, kann man zusätzlich zum algebraischen auch den **topologischen Dualraum** betrachten. Dieser ist die Menge aller stetigen linearen Funktionale und wird in der Regel mit **V '** bezeichnet. In einem endlich-dimensionalen Raum sind alle linearen Funktionale automatisch stetig, und somit sind in diesem Fall der algebraische und der topologische Dualraum identisch. Wenn im Zusammenhang mit Banachräumen von einem Dualraum die Rede ist, ist meistens der topologische Dualraum gemeint.

Der topologische Dualraum ist wieder ein normierter Vektorraum mit der Norm
$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$.

Ist V ein Vektorraum über einem analytisch vollständigen Körper (z. B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), dann ist der Dualraum $V' = L(V, K)$ immer vollständig, also ein Banachraum.

1.1.2 Topologischer Dualraum eines Hilbertraums

Besonders einfach ist der (topologische) Dualraum, falls V ein Hilbertraum ist. Nach einem Satz, den M. Fréchet 1907 für separable und F. Riesz 1934 für allgemeine Hilberträume bewiesen hat, sind ein reeller Hilbertraum und sein Dualraum isometrisch isomorph zueinander, siehe Riesz'scher Darstellungssatz.

Da jeder endlich-dimensionale Vektorraum über den reellen oder komplexen Zahlen isomorph zu einem Hilbertraum ist, sind endlich-dimensionale Räume stets zu sich selbst dual.

2 Riesz'scher Darstellungssatz

Für die variationelle Formulierung des RWP benutzen wir die (affinen) Hilberträume

$V := H^1(0, 1)$,
$V_0 := H_0^1(0, 1) = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$.

Eine partielle Differentialgleichung mit unhomogenen Dirichletwerten kann stets umformuliert werden in eine Gleichung mit homogenen Dirichletwerten durch Modifikation der rechten Seite. Daher können wir uns im folgenden auf den homogenen Fall konzentrieren.

Das L^2-Skalarprodukt im Intervall (0, 1) bezeichnen wir mit

$$(u, v) := \int_0^1 uvdx.$$

Da der L^2 identisch ist mit seinem Dualraum, $L^2(0, 1) = L^2(0, 1)'$, kann man die rechte Seite $f \in L^2(0, 1)$ auch auffassen als Funktional in $L^2(0, 1)' \subset V'$. Die Anwendung eines Funktionals f auf eine Funktion ϕ schreiben wir in der Form $\langle f, \phi \rangle$. In diesem speziellen Fall gilt also

$$\langle f, \phi \rangle = (f, \phi).$$

Ferner haben wir die kompaktere Schreibweise der Bilinearform $A : V \times V \to R$, definiert durch

$$A(u,\phi) := \int_0^1 au'\phi' dx,$$

wobei der Koeffizient a im Integral von x abhängen kann.

Die variationelle Formulierung lautet nun:

$$u \in V_0 : A(u,\phi) = \langle f, \phi\rangle \ \forall \text{ zugelassenen Testfunktionen } \phi \in V_0.$$

Damit die auftretenden Integrale wohldefiniert sind, fordern wir an die Daten

$$f \in L^2(0,1), a \in L^\infty(0,1;\mathbb{R}^+).$$

Die Lösbarkeit der Variationsformulierung zeigt man mit Hilfe des Riesz'scher Darstellungssatzes. Hierbei setzen wir zunächst den Fall konstanter Koeffizienten $a \equiv 1$ voraus. Jetzt stellt unsere Bilinearform $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gerade das H_0^1-Skalarprodukt dar:

$$A(u,v) = (u', v') = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Das folgende Lemma nutzen wir im Beweis des Riesz'scher Darstellungssatzes.

Lemma Sei H ein reeller Hilbertraum und $f \in H'$. Dann sind die folgenden Probleme äquivalent:

(a) $u \in H : (u,\phi)_H = \langle f, \phi\rangle \ \forall \phi \in H$
(b) $u \in H : J(u) = min_{v\in H} J(v)$,

zum Funktional $J(v) := \frac{1}{2}\|v\|_H^2 - \langle f, \phi\rangle$.

Beweis. Eine Lösung u des Problems (b) ist charakterisiert durch

$$J(u) \leq J(u+tw)$$

für alle $w \in V$ und alle $t \in [0,1]$. Nun gilt aber

$$J(u+tw) = J(u) + \frac{t^2}{2}\|w\|_H^2 + t(u,w) - t\langle f, w\rangle.$$

Daher ist das Problem (b) äquivalent zu

$$u \in H : \frac{t}{2}\|w\|_H^2 + (u,w) - \langle f, w\rangle \geq 0 \ \forall w \in H \ \forall t \in [0,1],$$

bzw. zu

$$u \in H : (u,w) \geq \langle f, w\rangle \ \forall w \in H \ .$$

Da mit $w \in H$ auch $-w \in H$, ist dies genau dann der Fall, wenn Problem (a) erfüllt ist.

$\otimes$

Dieses Lemma läßt sich dahingehend verallgemeinern, dass man für die Bilinearform $A(\cdot,\cdot)$ anstelle von der konkreten Form lediglich fordert:

- A ist symmetrisch, und
- A ist positiv.

Man kann unter diesen beiden Bedingungen sofort zeigen, dass die Gleichung $A(u,v) = \langle f, v\rangle$ für alle $v \in H$ äquivalent zur Minimierung von

$$J(v) = \tfrac{1}{2}A(v,v) - \langle f, v\rangle \to Min.$$

Riesz'scher Darstellungssatz Sei H ein reeller Hilbertraum und $f \in H'$. Dann besitzt das Variationsproblem $u \in H : (u,\phi)_H = \langle f,\phi\rangle \ \forall \phi \in H$ eine eindeutige Lösung $u \in H$ und es gilt $\|u\|_H = \|f\|_{H'}$.

Beweis **(a) Existenz:** Das Funktional J aus obigem Lemma ist nach unten beschränkt:

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|_H^2 - \|f\|_{H'}\|v\|_H = \frac{1}{2}(\|v\|_H \|f\|_{H'})^2 + \frac{1}{2}\|f\|_{H'}^2 \geq \frac{1}{2}\|f\|_{H'}^2 .$$

Daher existiert eine Minimalfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H mit

$$lim_{k\to\infty} J((u_k)) = inf_{v\in H} J(v) > -\infty.$$

Ferner bildet diese Folge eine Cauchyfolge, denn die Parallelogrammgleichung liefert uns

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_H^2 &= 2\|u_m\|^2 + 2\|u_n\|^2 - \|u_m + u_n\|^2 \\ &= 4\ \mathrm{J}(\mathrm{u}_m) + 4J(u_n) - 8J((u_m+u_n)/2) \\ &\leq 4J(u_m) + 4J(u_n) - 8inf_{v\in H}J(v). \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $m,n \to \infty$ ergibt

$$lim_{n,m\to\infty} \|u_m - u_n\|_H^2 \leq 0$$

und somit die Cauchy-Eigenschaft. Da H als Hilbertraum vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen ein $u = lim_{n\to\infty} u_n \in H$. Aufgrund der Stetigkeit von J folgt

$$J(u) = lim_{n\to\infty} J(u_n) = inf_{v\in H} J(v).$$

Nach vorangegangenem Lemma ist u eine Lösung des betrachteten Variationsproblems.

(b) Eindeutigkeit: Sei nun $\tilde{u}$ eine weitere Lösung unseres Variationsproblems. Dann erfüllt die Differenz $u - \tilde{u}$ die Gleichung

$$(u - \tilde{u}, \phi)_H = 0 \ \forall \phi \in H.$$

Setzen wir insbesondere $\phi = u - \tilde{u}$ folgt $\|u_m - u_n\|_H^2 = 0$, also $u = \tilde{u}$.

(c) $\|u\|_H = \|f\|_{H'}$**:**

$$\|f\|_{H'} = sup_{0 \neq v \in H} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_H} = sup_{0 \neq v \in H} \frac{|(u,v)_H|}{\|v\|_H} = \|u\|_H \, .$$

Hierbei folgt die letzte Gleichung aus der Cauchy-Ungleichung:

$$|(u,v)_H| \leq \|v\|_H \|u\|_H$$

sowie mittels der Wahl $v := u$:

$$sup_{0 \neq v \in H} |(u,v)_H| \geq \|u\|_H^2 \, .$$

$\otimes$

Hieraus erhalten wir unmittelbar die Folgerung, dass H und H' zueinander isomorph sind. Jedem $f \in H'$ läßt sich eineindeutig ein $Rf \in H$ mittels der Eigenschaft

$$(Rf, v)_H = \langle f, v \rangle \; \forall \phi \in H.$$

zuordnen.

Korollar In jedem reellen Hilbertraum H ist die Abbildung $R : H' \to H$, $f \mapsto Rf = u$, gemäß des vorherigen Satzes ein Isomorphismus, also $H' \cong H$. Dieser Isomorphismus wird als Riesz-Isomorphismus bezeichnet.

3 Quellen und Literaturhinweise

Texte entsprechen zu großen Teilen denen folgender Quellen:

[1] Braack, Malte: *Finite Elemente*. Vorlesungsskript SS 2009 und WS 2009/10, Stand 8.2.2010. Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.

[2] Braess, Dietrich: *Finite Elemente*. Springer, 1992.

[3] Hackbusch, Wolfgang: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichung.* Teubner, 1996.

[4] Wikipedia: *Dualraum*. http://de.wikipedia.org/wiki/Dualraum, Stand 19.3.2010.