Green'sche Funktionen als Hilfsmittel zur Konstruktion klassischer Lösungen von partiellen Differentialgleichungen

Katharina Block und David Hafemann

26. April 2010

1 Einleitung

Gegeben sei ein linearer oder semilinearer Differentialoperator L und die sich daraus ergebende inhomogene Differentialgleichung

$$Lu = f.$$

Als klassische Lösung bezeichnet man eine Lösung u der partiellen Differentialgleichung der Ordnung k, die k-mal differenzierbar ist.

Eine Lösung $u(x,t)$ des inhomogenen Problems lässt sich mit Hilfe von Green'schen Funktionen wie folgt darstellen:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,s,t)f(s)ds.$$

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Faltung

Definition 2 *Die Faltung für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Eigenschaften der Faltung:

- Kommutativität: $f * g = g * f$
- Assoziativität: $f * (g * h) = (f * g) * h = f * g * h$
- Distributivität: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Faltungstheorem: $F(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}((Ff) \cdot (Fg))$, d.h. aus einer Faltung im Ortsraum wird eine normale Multiplikation im Impulsraum
- Ableitung: $D(f * g) = Df * g = f * Dg$

2.2 δ-Distribution

Definition 2 *Eine Distribution ist eine stetige lineare Abbildung*

$$T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

Definition 2 *Die Distribution $\delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \varphi(0)$ heißt die Dirac-Distribution.*

δ ist das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung *.

Satz 2.1 *Für alle $\varphi \in D$ ist*

$$\delta * \varphi = \varphi.$$

Definition 2 *Eine Distribution T heißt Grundlösung zum Differentialoperator L, wenn gilt:*

$$LT = \delta.$$

Satz 2.2 *Ist T eine Grundlösung zu L, so gilt für jedes $\rho \in D$:*

$$L(T * \rho) = \rho.$$

Wenn man zu L eine Grundlösung T hat, so kann man für jedes $\rho \in D$ eine Lösung u von $Lu = f$ angeben: es ist $u = T * \rho$. Man erhält also eine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung $Lu = f$ dadurch, dass man eine Grundlösung T mit der auf der rechten Seite stehenden Funktion f faltet.

3 Definition

Definition 3 *Wir nennen die (verallgemeinerte) Funktion $G(x)$ für die gilt*

$$LG(x) = \delta(x)$$

die Green'sche Funktion oder auch Fundamentallösung des Differentialoperators L.

Es gehören also zu verschiedenen Differentialoperatoren verschiedene Green'sche Funktionen G.

4 Eigenschaften

Die Green'sche Funktion hat folgende weitere Eigenschaften:

1. Sie ist kausal.

$$G(x,s) = 0 \quad \text{für } x < s$$

2. Sie genügt der Austrahlungsbedingung im Unendlichen.

$$\frac{dG_\pm}{dx} = ikG_\pm, \qquad \forall x \neq s$$

3. Es gilt eine Reziprozitätsrelation

$$G(x,s) = G(s,x)$$

5 Berechnung der Green'schen Funktion

In der Praxis berechnet man zuerst die Fouriertransformierte der Green'schen Funktion:

5.1 Berechnung der Fouriertransformierten von G

Für einen linearen Differentialoperator $L = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha$ soll gelten:

$$\begin{aligned}
LG(x) &= \delta(x) \\
\Rightarrow \mathcal{F}[LG](x) &= \mathcal{F}[\delta(x)] \\
\mathcal{F}\left[\sum a_\alpha D^\alpha G\right] &= 1 \\
\sum a_\alpha \mathcal{F}[D^\alpha G] &= 1 \\
\sum a_\alpha (-ik)^\alpha \mathcal{F}[G] &= 1 \\
\mathcal{F}[G] \sum a_\alpha (-ik)^\alpha &= 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[G] = \frac{1}{\sum a_\alpha (-ik)^\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad G(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sum a_\alpha (-ik)^\alpha}\right]$$

5.2 Beispiele

I 1D-Wellengleichung

Gegeben sei der Differentialoperator, der $1D-$Wellengleichung

$$Lu = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Mit der oben aufgestellten Formel ergibt sich:

$$\mathcal{F}\left[G\right](k,\omega) = \frac{1}{-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{c^2}{\omega^2 - c^2 k^2}$$

II Poissongleichung

Gegeben sei eine Punktladung ρ, die sich am Ort $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Dann ist das elektrische Feld durch die inhomogene Poissongleichung gegeben.

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho(\vec{r}),$$

wobei $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ Um die Green'sche Funktion der Poissongleichung zu berechnen, nehmen wir die Formel aus 5.1:

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[G\right] = \frac{1}{\sum a_\alpha(-ik)^\alpha},$$

wobei für den Multiindex gilt $\alpha = 2$ und für die Koeffizienten $a_\alpha = 1$.

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[G\right] = \frac{1}{k^2}$$

5.3 Rücktransformation

I Wellengleichung

Hier brauchen wir die Rücktransformation von G(x,s) nicht!

II Poissongleichung

Man erhält folgendes Integral. Man führt Kugelkoordinaten ein und legt die k_z-Achse in Richtung von $\vec{r}$:

$$\begin{aligned}
G(\vec{r} &= \frac{1}{(2\pi)^3)}\int \frac{e^{ik\vec{r}}}{k^2}d^3k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\Theta \sin\Theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{ikr\cos\phi}}{k^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk \int_0^\pi d\Theta \sin\Theta e^{ikr\cos\Theta}, \quad s = \cos\Theta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk \int_{-1}^1 s e^{ikrs} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{kr} \\
&= \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty d(kr)\frac{\sin(kr)}{kr} \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(\vec{r} - \vec{s}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|}$$

6 Bestimmung der partikulären Lösung des inhomogenen Problems

Gegegeben sei das inhomogene Problem

$$(Lu)(x) = h(x).$$

Sei $G(x)$ die Green'sche Funktion des Differentialoperators L, dann gilt:

$$\begin{aligned}
(LG)(x,s) &= \delta(x-s) \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (LG)(x,s)h(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(x-s) \\
\Rightarrow L\int_{-\infty}^{\infty} G(x,s)h(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(x-s) \\
L(G(x,s) * h(s)) &= \delta(s) * h(s) = h(s)
\end{aligned}$$

D.h. $G(x,s) * h(s)$ ist eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

6.1 Beispiele

I Wellengleichung

$$Lu = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(x).$$

Wir kennen die Fouriertransformierte der Green'schenfunktion:

$$\mathcal{F}\left[G\right](k,\omega) = \frac{1}{-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{c^2}{\omega^2 - c^2k^2}$$

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung:

$$y_p = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{c^2}{\omega^2 - c^2k^2} \cdot \mathcal{F}[f]\right]$$

II Poissongleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho(\vec{r})$$

Wir berechnen das Faltungsprodukt:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= G(\vec{r}) * 4\pi\rho(\vec{r}) \\
&= 4\pi\int G(\vec{r}-\vec{s})\rho\vec{r}d^3s \\
&= \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{s}|}d^3s.
\end{aligned}$$