

Technische Universität Berlin  
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften –

# **Lösen von partiellen Differentialgleichungen anhand eines Beispiels mit Hilfe von der Finiten-Volumen-Methode**

Julia Baumbach -jule.baumbach@hotmail.de-

Im Fach : FV/FD-Methoden zum numerischen Lösen von partiellen  
Differentialgleichungen

Betreut von: Prof. Dr. Günther Baerwolff

31. Juli 2017

## **Abstract**

Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit dem numerischen Lösen einer parabolischen Differentialgleichung, genauer gesagt der instationären Wärmeleitgleichung. Die Vorgehensweise soll dabei anhand eines Beispielproblems demonstriert werden. Als Lösungsverfahren wird die Finite-Volumen-Methode angewandt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	4
1.2	Mathematische Formulierung . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Diskretisierung</b>	<b>6</b>
2.1	Kugelkoordinaten . . . . .	6
2.2	Finite Volumen Methode . . . . .	6
2.3	Diskretisierung des Gebiets . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Berechnung</b>	<b>9</b>
3.1	Homogene Dirichlet-Randbedingungen . . . . .	10
3.2	Robin'sche Randbedingungen . . . . .	11
3.3	Rechte Seite . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>12</b>
4.1	Vergleich zwischen Dirichlet- und Robin'schen Randbedingungen . . . . .	12
4.2	Vergleich zwischen verschiedenen Schrittweiten . . . . .	13
4.3	Vergleich zwischen Rand- und Mittelpunkt . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>16</b>

# 1 Einführung

## 1.1 Problemstellung

In dieser Arbeit soll eine instationäre Wärmeleitgleichung exemplarisch mit Methoden der numerischen Mathematik gelöst werden. Dafür sei angenommen, dass eine Kartoffel mit einem Radius von  $r = 5\text{cm}$  vorliegt, die zur Vereinfachung als kugelförmig angenommen wird. Die Kartoffel wird in kochendem Wasser auf eine Temperatur von 373 Kelvin ( $\approx 99,85^\circ\text{C}$ ) gleichmäßig erhitzt.

Anschließend soll sie in einem Wasserbad mit einer konstanten Temperatur von 291 Kelvin ( $\approx 17,85^\circ\text{C}$ ) auskühlen. Im Folgenden wird nun mathematisch untersucht, wie sich die Temperatur am Rand und im Inneren der Kartoffel im Laufe der Zeit verhält und wann ihre Temperatur unter 333 Kelvin ( $\approx 59,85^\circ\text{C}$ ) sinkt.

## 1.2 Mathematische Formulierung

Die instationäre Wärmeleitgleichung ist eine parabolische partielle Differentialgleichung der Form

$$u_t = a\Delta u = a(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (1)$$

mit entsprechenden Randbedingungen. Das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sei aufgrund der gegebenen Eigenschaften der Kartoffel als

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$$

gewählt.

Des Weiteren werden noch einige physikalische Eigenschaften der Kartoffel benötigt, nämlich

$$\text{Wärmeleitkoeffizient} : \lambda = 0,16 \frac{\text{W}}{\text{mk}}$$

$$\text{Temperaturleitungskoeffizient} : a = 5,6 \cdot 10^4 \frac{\text{m}^2}{3600\text{s}}$$

$$\text{Konvektionswärmeübertragungskoeffizient} : \alpha = 30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

Da ein Anfangs-Randwert-Problem betrachtet werden soll, müssen zusätzlich noch die Randbedingungen definiert werden. In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Randbedingungen untersucht.

Zunächst einmal homogenen Dirichlet-Randbedingungen, d.h.

$$u = 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega$$

und schließlich auch Robin'schen Randbedingungen der Form

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(u - u_\infty) \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega, \quad (2)$$

wobei  $\mathbf{n}$  den äußeren Normalenvektor bezeichnet.  $u_\infty$  bezeichnet die Entdimensionalisierungs-Konstante der Differentialgleichung.

## 2 Diskretisierung

### 2.1 Kugelkoordinaten

Wie bei mathematischen Problemen auf Kugelgebieten üblich, soll das betrachtete Gebiet  $\Omega$  zunächst in Kugelkoordinaten überführt werden, da es sich damit wesentlich leichter rechnen lässt. Kugelgebiete sind nämlich rotationssymmetrisch und somit unabhängig von den Winkelkoordinaten.

Ab nun soll also das Gebiet

$$\Omega_{r,\vartheta,\varphi} = \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 5], \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in (-\pi, \pi]\}$$

betrachtet werden. Dafür muss aber natürlich auch die Gleichung (1) in Kugelkoordinaten überführt werden. Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

erhält man nach einigen Umformungen schließlich für den Laplace-Operator:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

### 2.2 Finite Volumen Methode

Bei der Finiten-Elemente-Methode muss das betrachtete Gebiet  $\Omega$  zur Diskretisierung zu gegebenen Stützstellen  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  in so genannte Voronoi-Boxen zerlegt werden.

Das bedeutet, dass das Gebiet  $\Omega$  bzw.  $\Omega_{r,\vartheta,\varphi}$  in  $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, n$  zerlegt wird, sodass

$$x_i \in \Omega_i, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Omega}_i, \quad \bigcap_{i=1}^n \Omega_i = \emptyset.$$

gilt.

Die Idee der Finiten-Elemente-Methode besteht nun darin, auf jeder der Voronoi-Boxen

$$\int_{\Omega_i} u_t \, d\Omega_i = \int_{\Omega_i} a \Delta u \, d\Omega_i \quad (3)$$

zu lösen.

Denn durch die Erhaltungseigenschaft des Integrals ist (3) äquivalent zu

$$u_t = a \Delta u \text{ auf } \Omega_i.$$

Dafür müssen die beiden Integrale jedoch zunächst einmal transformiert und anschließend diskretisiert werden, denn es sollen die in Kapitel (2.1) vorgestellten Polarkoordinaten ihre Anwendung finden.

Dazu sei zunächst einmal festgestellt, dass auf Grund des Transformationsatzes

$$d\Omega = r^2 \sin \vartheta d\Omega_{r,\vartheta,\varphi} = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi dr$$

gilt.

Weiterhin stellen wir fest, dass auf Grund der Kugeleigenschaft des Gebietes und der Tatsache, dass sich die Kartoffel in einem Wasserbad befindet, die Differentialgleichung als unabhängig von den Koordinaten  $\vartheta$  und  $\varphi$  betrachtet werden kann. Das liegt daran, dass das Gebiet rotationssymmetrisch ist und als konstante Materie angenommen werden kann.

Denn für die Temperaturberechnung an einem Punkt  $P$  zu einem Zeitpunkt  $t$  ist es nur wichtig, in welchem Abstand  $r$  zum Mittelpunkt sich dieser Punkt befindet, jedoch nicht in welchem Winkel.

Dadurch vereinfacht sich die betrachtete Differentialgleichung (1) in Kugelkoordinaten zu

$$u_t = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

auf  $(0, 5)$  mit den entsprechenden Randbedingungen. Daher lässt sich (3) vereinfacht schreiben als:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} u_t r^2 dr &= \int_{\Omega_i} a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) r^2 dr \\ &= \int_{\Omega_i} a \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr. \end{aligned} \tag{4}$$

### 2.3 Diskretisierung des Gebiets

Als nächstes stellt sich die Frage, wie das Gebiet  $\Omega_{r,\vartheta,\varphi}$  am besten zu diskretisieren ist, bzw. wie die Stützstellen  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  gewählt werden sollen.

Wie schon festgestellt, ist das Problem unabhängig von den Koordinaten  $\vartheta$  und  $\varphi$ . Das bedeutet, dass  $\Omega_{r,\vartheta,\varphi}$  nur noch in  $r$ -Richtung auf dem Intervall  $[0, 5]$  zu diskretisieren ist.

Sei  $n$  die Anzahl der Stützstellen  $x_i$ . Dann sollen diese so gewählt sein, dass

$$x_i = h \cdot i - \sigma, h = \frac{5}{n},$$

wobei  $\sigma = \frac{h}{2}$  der Abstand einer Stützstelle  $x_i$  zum Rand  $x_{i-1/2}$  bzw.  $x_{i+1/2}$  ihrer Voronoi-Box ist.

Durch diese Definition ergibt sich eine äquidistante Zerlegung des Intervalls  $[0, 5]$  mit  $x_{1/2} = 0$  und  $x_{n+1/2} = 5$ , wobei die  $n + 1$  Randpunkte der Voronoi-Boxen  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

gegeben sind durch

$$x_{i-1/2} = h \cdot (i - 1), \quad x_{i+1/2} = h \cdot i.$$

Damit lässt sich (4) nochmals vereinfachen zu

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t r^2 dr = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} a \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Mit dieser Formel soll nun im nächsten Abschnitt das ursprüngliche Problem (1) numerisch gelöst werden.



### 3 Berechnung

In diesem Abschnitt soll aus (5) eine Formel hergeleitet werden, mit der schließlich das Problem (1) implementiert und gelöst werden kann. Das bedeutet, dass letzten Endes ein lineares Gleichungssystem der Form

$$Au = f \tag{6}$$

gelöst werden soll. Dabei ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $u = (u_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$  und  $f = (f_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$ .

Dafür werden zunächst beide Seiten von (5) integriert, was für die linke Seite zu

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t r^2 dr = u_t \frac{x_{i+1/2}^3 - x_{i-1/2}^3}{3}$$

und für die rechte Seite zu

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} a \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr &= a \left( x_{i+1/2}^2 \frac{\partial u}{\partial r} - x_{i-1/2}^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ &= a \left( x_{i+1/2}^2 \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - x_{i-1/2}^2 \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) \\ &= a \frac{u_{i+1} - u_i}{h} (x_{i+1/2}^2 - x_{i-1/2}^2) \end{aligned}$$

führt. Insgesamt erhält man also die Gleichung

$$u_t \frac{x_{i+1/2}^3 - x_{i-1/2}^3}{3} = a \frac{u_{i+1} - u_i}{h} (x_{i+1/2}^2 - x_{i-1/2}^2), \tag{7}$$

wobei für  $u_t$  eine geeignete Approximation der Zeitableitung zu wählen ist.

Durch entsprechende Umformungen ergibt sich aus (7)

$$a \left( -\frac{x_{i-1/2}^2}{h^2 x_i^2} u_{i-1} + \frac{x_{i-1/2}^2 + x_{i+1/2}^2}{h^2 x_i^2} u_i - \frac{x_{i+1/2}^2}{h^2 x_i^2} u_{i+1} \right) = 0 \tag{8}$$

und somit für die Zeilen der Koeffizientenmatrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  für  $2 \leq i \leq n-1$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} a \frac{x_{i-1/2}^2 + x_{i+1/2}^2}{h^2 x_i^2}, & i = j \\ -a \frac{x_{i-1/2}^2}{h^2 x_i^2}, & j = i - 1 \\ -a \frac{x_{i+1/2}^2}{h^2 x_i^2}, & j = i + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

In die erste und  $n$ -te Zeile der Matrix  $A$  fließen dabei die Randbedingungen ein. Dabei wird der Ansatz der sogenannten „Ghost“-Zellen genutzt. Dabei wird angenommen, dass

es einen weiteren Stützpunkt  $x_{n+1}$  gibt, für den

$$\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}$$

gilt. Diese Gleichung kann man schließlich so umformen, dass man einen Ausdruck für  $x_{n+1}$  erhält, der in den entsprechenden Formeln eingesetzt werden kann.

An dieser Stelle ist schon erkennbar, dass die Matrix  $A$  einige bestimmte Eigenschaften aufweist. Sie ist eine Tridiagonalmatrix, wobei die Einträge auf den Nebendiagonalen kleiner als null sind. Ihre Hauptdiagonaleinträge dagegen sind größer als null.

Da die Summe der Nebendiagonaleinträge kleiner oder gleich der Hauptdiagonaleinträge ist, ist die Matrix  $A$  eine sogenannte  $M$ -Matrix. Mit Hilfe von Ergebnissen der linearen Algebra lässt sich damit folgern, dass (7) eindeutig lösbar ist, da  $A$  invertierbar ist.

### 3.1 Homogene Dirichlet-Randbedingungen

Homogene Dirichlet-Randbedingungen besagen allgemein, dass

$$u = 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega.$$

Für den hier vorliegenden Fall bedeutet das, dass

$$u(x_{1/2}) = u(0) = 0 \text{ und } u(x_{n+1/2}) = u(5) = 0$$

gilt. Setzt man diese Bedingungen für  $i = 1$  in (8) ein, so ergibt sich, dass der erste Summand von (8) entfällt, da  $x_{1/2} = 0$  gilt.

Für die erste Zeile der Matrix  $A$  ergibt sich damit:

$$a_{11} = a \frac{x_{1+1/2}^2}{h^2 x_1^2},$$

$$a_{12} = -a \frac{x_{1+1/2}^2}{h^2 x_1^2}.$$

Für die letzte Zeile  $n$  der Matrix  $A$  muss dagegen noch  $u_{i+1} = u_{n+1}$  aus dem dritten Summanden von (8) geeignet gewählt werden. Wählt man dafür den Ansatz, dass

$$\frac{h}{2}u_n + \frac{h}{2}u_{n+1} = x_{n+1/2} = 0,$$

so ergeben sich für die letzte Zeile von  $A$  folgende Koeffizienten:

$$a_{n-1,n} = -a \frac{x_{n-1/2}^2}{h^2 x_n^2},$$

$$a_{nn} = a \frac{x_{n-1/2}^2 + x_{n+1/2}^2}{h^2 x_n^2} + \frac{x_{n+1/2}^2}{h^2 x_n^2}.$$

### 3.2 Robin'sche Randbedingungen

Für den Fall der Robin'schen Randbedingungen verfährt man ähnlich. Auch hier entfällt für  $i = 1$  der erste Summand aus (8), d.h. es gilt wiederum

$$a_{11} = a \frac{x_{1+1/2}^2}{h^2 x_1^2},$$

$$a_{12} = -a \frac{x_{1+1/2}^2}{h^2 x_1^2}.$$

Für  $i = n$  kann man mit Hilfe von (2) einen Ausdruck für  $u_{n+1}$  ermitteln und erhält

$$a_{n-1,n} = -a \frac{x_{n-1/2}^2}{h^2 x_n^2},$$

$$a_{nn} = a \left( \frac{x_{n-1/2}^2 + x_{n+1/2}^2}{h^2 x_n^2} - \frac{x_{n+1/2}^2}{h^2 x_n^2} \right).$$

### 3.3 Rechte Seite

Für die rechte Seite  $f$  des linearen Gleichungssystems (6) gilt:

$$f_i = 0, \text{ falls } i = 1, \dots, n-1$$

und

$$f_n = \begin{cases} a \frac{291 x_{n+1/2}^2}{x_n^2 h^2}, & \text{für Dirichlet - Randbedingungen} \\ a \frac{291 x_{n+1/2}^2}{x_n^2 h^2} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha}, & \text{für Robin'sche Randbedingungen.} \end{cases}$$

Mit diesen Herleitungen ist es nun möglich, ein Programm zum numerischen Lösen von (1) zu implementieren.

## 4 Auswertung

Die folgenden Berechnungen wurden mit der Matlab-version MATLAB R2014 auf einem Computer mit 64-Bit-Betriebssystem, 1.90GHz Prozessor und 4,00 GB RAM durchgeführt. Zum Berechnen von (6) wurde der von Matlab angebotene Löser ode23s genutzt.

Die angegebenen Zeitintervalle sind stets so gewählt, dass man die Resultate der jeweiligen Untersuchung gut beobachten kann,

### 4.1 Vergleich zwischen Dirichlet- und Robin'schen Randbedingungen

Als erstes soll untersucht werden, wie sich die verschiedenen Randbedingungen auf die Lösung auswirken. Dafür wurde eine Stützpunktzahl von  $n = 50$  gewählt, d.h. für die Schrittweite gilt  $h = \frac{1}{10}$ . Man könnte die Temperaturentwicklung in verschiedenen Punkten untersuchen. Zunächst soll aber die Temperaturentwicklung an einem Randpunkt, d.h. ein beliebiger Punkt auf der Kartoffel mit  $r = 5\text{cm}$  betrachtet werden.

Das Problem (1) wird nun einmal mit Robin'schen und einmal mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen gelöst. Als Zeitintervall wird dabei  $I = [0, 295000]$  in Millisekunden, das bedeutet ca. die ersten fünf Minuten des Abkühlungsprozesses, betrachtet.

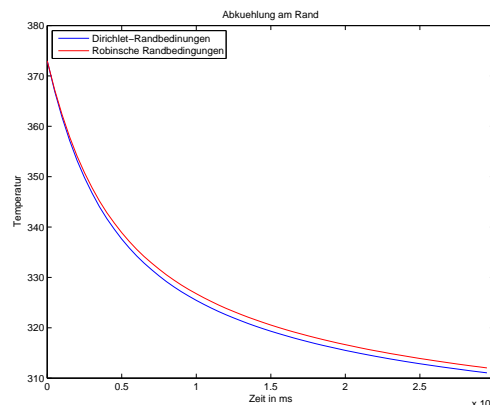


Abbildung 1: Vergleich von Robin- und Dirichlet-Randbedingungen am Rand der Kartoffel

Wie man in Abbildung 1 beobachten kann, kühlt sich die Kartoffel etwas schneller ab, wenn man das Problem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen löst. Allerdings sind die Unterschiede nicht von erheblichem Ausmaß.

## 4.2 Vergleich zwischen verschiedenen Schrittweiten

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie sich die Wahl der Anzahl der Stützpunkte auf die Lösung auswirkt. Dafür werden verschiedene  $n = 15, 25, 50, 100, 150$  gewählt. Hier wird ein etwas größeres Zeitintervall betrachtet, nämlich  $I = [0, 5900000]$ , d.h. ca. ein- einhalb Stunden. Das Problem wird wiederum mit den beiden verschiedenen Randbedingungen gelöst. Außerdem wird zunächst wieder ein beliebiger Punkt auf dem Rand der Kartoffel, d.h. ein Punkt mit  $r = 5\text{cm}$ , betrachtet.

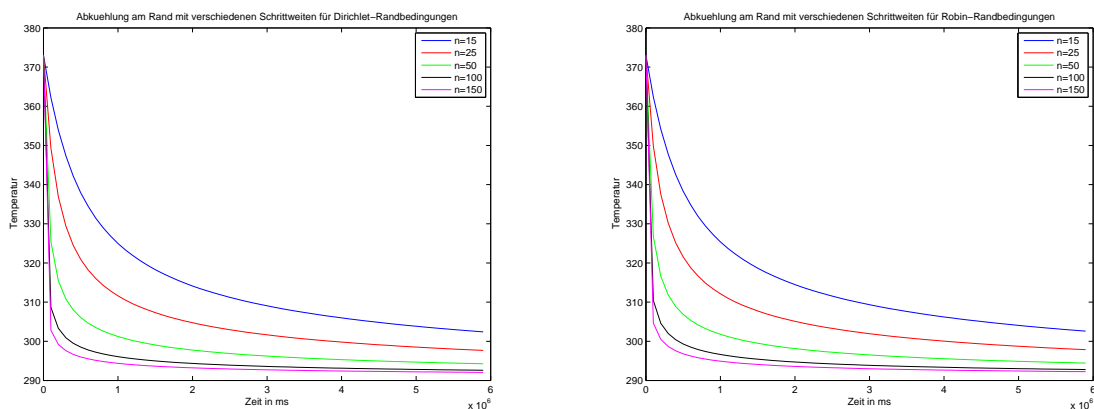


Abbildung 2: Vergleich für verschiedene Schrittweiten für einen Punkt am Rand der Kartoffel. links: für Dirichlet-Randbedingungen. rechts: für Robin-Randbedingungen

In Abbildung 2 ist auffällig, dass für beide Randbedingungen die Kurve mit wachsender Stützstellenanzahl sehr viel steiler abfällt. Das war jedoch auch zu erwarten, da eine steigende Stützstellenanzahl an mehr Punkten das Problem betrachtet. Hat man dagegen nur weniger Stützstellen, nimmt die Kurve eine „Abkürzung“ und füllt daher die linke untere Ecke der Grafiken nicht aus.

## 4.3 Vergleich zwischen Rand- und Mittelpunkt

Bisher wurde nur ein beliebiger Randpunkt der Kartoffel betrachtet. Es soll nun aber auch der Mittelpunkt der Kartoffel untersucht werden. Außerdem soll in diesem Abschnitt die anfangs gestellte Frage geklärt werden, wann die Temperatur der Kartoffel unter  $333\text{K}$  sinkt.

Hierfür wird die Schrittweite der Diskretisierung auf  $n = 50$  festgesetzt. Als Zeitintervall wird  $I = [0, 23600000]$  betrachtet, das sind ungefähr sechseinhalb Stunden. Auch in dieser Untersuchung sollen die beiden Randbedingungen betrachtet werden.

In Abbildung 3 ist deutlich zu erkennen, wie groß der Unterschied des Abkühlungsprozesses zwischen einem beliebigen Randpunkt und dem Mittelpunkt der Kartoffel ist. Das gilt

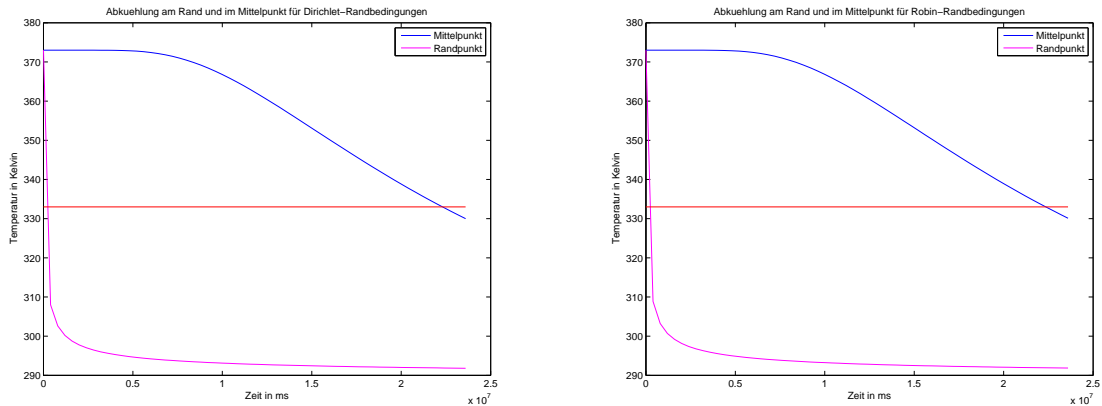


Abbildung 3: Vergleich des Abkühlungsprozesses an einem Randpunkt und in der Mitte der Kartoffel. links: für Dirichlet-Randbedingungen. rechts: für Robin-Randbedingungen

für beide betrachteten Randbedingungen.

Während die Temperatur am Rand schon nach einigen Sekunden unter die geforderten 333 Kelvin gefallen ist, dauert es im Mittelpunkt fast sechseinhalb Stunden, bis die Kartoffel sich weitestgehend abgekühlt hat.

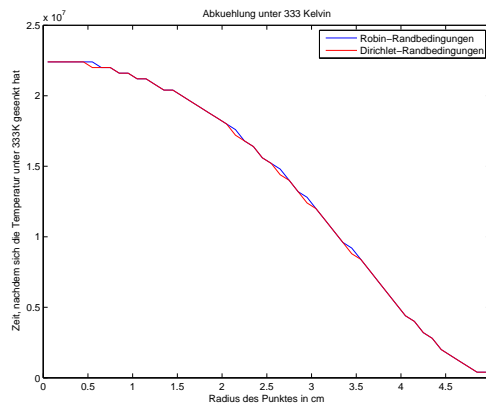


Abbildung 4: Abkühlungsprozess innerhalb der Kartoffel nach Zeit

Wie in Abbildung 4 nochmals verdeutlicht wird, gibt es einen erheblichen Unterschied zwischen der Abkühlungszeit der Kartoffel, je nachdem welcher Punkt betrachtet wird. Auch wird hier deutlich, dass die Abkühlung-Radius-Beziehung annähernd linear ist.

Abgesehen von einigen Punkten gibt es jedoch keine Unterschiede, ob man das Problem mit Robin'schen oder mit Dirichlet-Randbedingungen betrachtet.

## 5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine parabolische partielle Differentialgleichung numerisch gelöst. Dazu wurde zunächst das Problem so diskretisiert, dass man es mit Hilfe eines numerischen Algorithmus lösen kann. Die Methode der Finiten-Volumen war dabei von großem Nutzen.

Aber es hätte auch eine Vielzahl von anderen Methoden gegeben, um dieses Problem zu lösen, beispielsweise die Finite-Differenzen-Methode oder auch die Finite-Elemente-Methode.

Das Problem wurde um ein Einiges erleichtert, da es auf einem kugelförmigen Gebiet gelöst werden sollte. Dadurch konnte man die Aufgabenstellung so vereinfachen, dass man nur noch ein eindimensionales Problem zu lösen hatte.

Die Auswertung der numerischen Berechnung hat gezeigt, dass es zwar einige kleine Unterschiede gibt, ob man nun Dirichlet-, Robin'sche oder auch andere Randbedingungen ansetzt. Allerdings es gab keine großen Abweichungen zwischen den Lösungen, was auch zu erwarten war.

Auch wurde deutlich, dass sich Kartoffeln am Rand zwar sehr schnell abkühlen, aber je näher man dem Mittelpunkt der Kartoffel kommt, desto länger dauert dieser Abkühlungsprozess.

## 6 Anhang

Listing 1: Quellcode für die Berechnung des Problems mit Dirichlet-Randbedingungen  
language

```
%  
% Programm zum Loesen des Kartoffel-Problems mit homogenen Dirichlet - Randbedingungen  
%  
function [U] = Kartoffel_Dirichlet(n, t)  
% n : Anzahl der genutzten Stuetzstellen  
% t : Zeitintervall, auf dem das Problem betrachtet werden soll  
% U : Loesung als Matrix der Groesse size(t) x n, d.h. in der  
%     n-ten Spalte steht die Temperatur zu jedem Zeitschritt aus t  
  
% Initialisierung  
  
% Intervallgrenzen  
R0 = 0.;  
R1 = 5.;  
% Abstand zwischen den Stuetzstellen  
h = (R1 - R0)/n;  
% Starttemperatur  
Temp0 = 373.;  
% Temperatur des Wasserbads  
TempN = 291.;  
% Physikalische Konstanten der Kartoffel  
a = 5.6/3600*1.0e-4;  
  
% Stuetzstellen  
stuetz = linspace(R0+h/2, R1-h/2, n);  
% Randpunkte der Voronoi-Zellen  
randpkt = linspace(R0, R1, n+1);  
% Anfangsbedingung  
u0 = ones(n, 1)*Temp0 ;  
  
% Berechnung von A  
A = zeros(n, n);  
  
A(1,1) = a*(randpkt(1)^2 + randpkt(2)^2)/h / (stuetz(1)^2*h);  
A(1,2) = (-a*randpkt(2)^2/h) / (stuetz(1)^2 * h);  
for i = 2: n-1  
    A(i,i) = a*(randpkt(i+1)^2 + randpkt(i)^2)/h / (stuetz(i)^2 * h);  
    A(i,i-1) = (-a*randpkt(i)^2/h) / (stuetz(i)^2 * h);  
    A(i,i+1) = (-a*randpkt(i+1)^2 /h) / (stuetz(i)^2 * h);  
end  
A(n,n-1) = (-a*randpkt(n)^2/h) / (stuetz(n)^2*h);  
A(n,n) = (a*randpkt(n)^2/ h + a*randpkt (n+1)^2/ h ) / (stuetz(n)^2*h);  
  
% rechte Seite  
F = zeros(n,1);  
% Randbedingung in letzte Zeile  
F(n) = a*randpkt(n+1)^2 * TempN/(stuetz(n)^2 * h^2);  
  
% Gleichungssystem mit ode23s loesen  
lgs = @( t , x ) -A*x+F ;  
  
[T,U]= ode23s ( @( t , x ) lgs(t,x), t, u0);  
end
```



Listing 2: Quellcode für die Berechnung des Problems mit Robin-Randbedingungen  
language

```

%
% Programm zum Loesen des Kartoffel-Problems mit Robin-Randbedingungen
%
function [U] = Kartoffel_Robin(n, t)
% n : Anzahl der genutzten Stuetzstellen
% t : Zeitintervall, auf dem das Problem betrachtet werden soll
% U : Loesung als Matrix der Groesse size(t) x n, d.h. in der
%     n-ten Spalte steht die Temperatur zu jedem Zeitschritt aus t

%%Initialisierung

% Intervallgrenzen
R0 = 0.;
R1 = 5.;
% Abstand zwischen den Stuetzstellen
h = (R1 - R0)/n;
% Starttemperatur
Temp0 = 373.;
% Temperatur des Wasserbads
TempN = 291.;
% Physikalische Konstanten der Kartoffel
a = 5.6/3600*1.0e-4;
lambda = 0.16;
alpha = 30;

% Stuetzstellen
stuetz = linspace(R0+h/2, R1-h/2, n);
% Randpunkte der Voronoi-Zellen
randpkt = linspace(R0, R1, n+1);
% Anfangsbedingung
u0 = ones(n, 1)*Temp0 ;

% Berechnung von A
A = zeros(n, n);

A(1,1) = a*(randpkt(1)^2 + randpkt(2)^2)/h / (stuetz(1)^2*h);
A(1,2) = (-a*randpkt(2)^2/h) / (stuetz(1)^2 * h);

for i = 2: n-1
    A(i,i) = a*(randpkt(i+1)^2 + randpkt(i)^2)/h / (stuetz(i)^2 * h);
    A(i,i-1) = (-a*randpkt(i)^2/h) / (stuetz(i)^2 * h);
    A(i,i+1) = (-a*randpkt(i+1)^2 /h) / (stuetz(i)^2 * h);
end
A(n,n-1) = (-a*randpkt(n)^2/h) / (stuetz(n)^2*h);
A(n,n) = (a*randpkt (n)^2/ h + a*randpkt (n+1)^2/ h ) / (stuetz(n)^2*h)-a*randpkt(n+1)^2/h*(lambda/h)/

% rechte Seite
F = zeros(n,1);
% Randbedingung in letzte Zeile
F(n) = a*randpkt(n+1)^2 * alpha/h / (lambda/h + alpha ) * TempN/(stuetz(n)^2 * h);

% Gleichungssystem mit ode23s loesen
lgs = @( t , x ) -A*x+F ;

[T,U]= ode23s ( @( t , x ) lgs(t,x), t, u0);
end

```

## Abbildungsverzeichnis

1	Robin- und Dirichlet-Randbedingungen am Rand der Kartoffel . . . . .	12
2	Verschiedene Schrittweiten für einen Punkt am Rand der Kartoffel . . . .	13
3	Abkühlungsprozess an einem Randpunkt und im Mittelpunkt der Kartoffel	14
4	Abkühlungsprozess innerhalb der Kartoffel nach Zeit . . . . .	14

## Listings

1	Quellcode für die Berechnung des Problems mit Dirichlet-Randbedingungen language . . . . .	16
2	Quellcode für die Berechnung des Problems mit Robin-Randbedingungen language . . . . .	16