

FV/FD-Methode zur Lösung partieller Differentialgleichungen

Projekt: Diskretisierung der Stokes-Gleichung

Elwin van der Auweraert

6. September 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Problemaufgabe</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Diskretisierung</b>	<b>5</b>
3.1	Entdimensionierung . . . . .	5
3.2	Staggered-Grid-Methode . . . . .	5
3.3	Kontinuitätsgleichung . . . . .	6
3.4	Momentumgleichung . . . . .	7
3.5	Behandlung der Randbedingungen . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Lösung des Gleichungssystems</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>11</b>

# 1 Vorwort

In diesem Projekt ist das so genannte 'lid driven cavity' Problem gelöst. Das Problem enthält eine Diskretisierung der Stokes-Gleichungen in einem rechteckigen Gebiet. Die Problembeschreibung findet man in Kapitel 2. Zur Diskretisierung ist die Finite-Volumen-Methode benutzt, zusammen mit der Staggered-Grid-Methode. Eine Erklärung dazu findet man in Kapitel 3. Das resultierende Gleichungssystem und das Verfahren zur Lösung sind in Kapitel 4 dargestellt. Im 5. Kapitel wird mit den Ergebnissen, das Geschwindigkeitsfeld, die Druckverteilung und die Druckcontourlinien, abgeschlossen.

## 2 Problemaufgabe

Die Stokes-Gleichung (eigentlich ist es ein System von Gleichungen) hat die folgende Form

$$-\eta\Delta\mathbf{v} + \nabla p = f \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

mit  $\eta$  die dynamische Viskosität,  $\mathbf{v} = [u, v]^T$  die Geschwindigkeitsvektor mit  $u$  die horizontale und  $v$  die vertikale Komponente,  $p$  der Druck und  $f$  der Volumenkraft. Gleichung 1 nennt man normalerweise die Momentungleichung und Gleichung 2 die Kontinuitätsgleichung.

Für dieses Projekt wird der Volumenkraft  $f$  gleich null gewählt. Diese vereinfachte Form der Stokes-Gleichung wird auf dem Gebiet  $\Omega = (0, 1) \times (-1, 0)$  diskretisiert. Die Stokes-Gleichungen werden abgeschlossen durch die folgende Randbedingungen:  $u = 1, v = 0$  auf dem nördlichen Rand, und  $u = 0, v = 0$  auf den westlichen, südlichen und östlichen Rändern.

Die obere mathematische Beschreibung bezieht sich auf dem physischen Problem einer sogenannten 'lid driven cavity'. Bei diesem Problem gibt es eine Flüssigkeit in einer Kiste. Die Decke der Kiste bewegt sich (in unserem Fall nach rechts), wodurch die Flüssigkeit rechtsrum dreht. Die untere Abbildung zeigt eine graphische Darstellung des Problems.

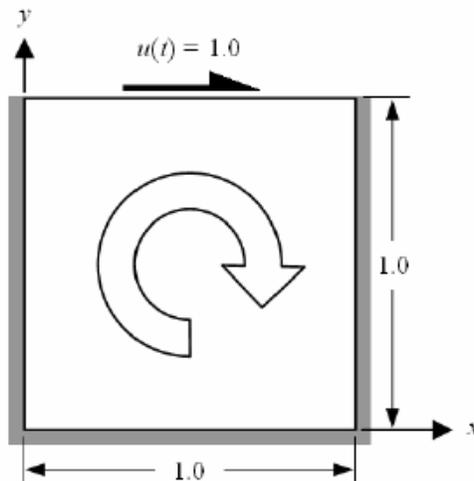


Abbildung 1: Darstellung des Problems

## 3 Diskretisierung

Zur Diskretisierung der Stokes-Gleichungen wird die Finite-Volumen-Methode benutzt. Davor müssen die Gleichungen aber erst entdimensioniert werden.

### 3.1 Entdimensionierung

Da wir ein Problem mit echten physikalischen Größen haben, sollte man die physische Gleichungen normalerweise entdimensionieren. In dem Fall von den Stokes-Gleichungen handelt es sich aber um lineare Gleichungen. Daher kann man leicht einsehen, dass die Gleichungen unabhängig sind von den physikalischen Größen. Praktisch bedeutet das, dass die numerische Modellierung für jede Flüssigkeit (unterschiedliche Dichten), Geschwindigkeit und jedes Maß gleich ist.

**Bemerkung:** wenn man die Navier-Stokes-Gleichungen benutzt statt der Stokes-Gleichungen muss man durch Benutzung der Reynolds-Zahl die Momentum-Gleichung entdimensionieren. Diesen Unterschied zwischen den beiden Gleichungssystemen gibt es, da die Momentum-Gleichung bei Navier-Stokes nichtlinear ist.

### 3.2 Staggered-Grid-Methode

Zür Wahl der Stützpunktstellen wird in dieser Arbeit die Staggered-Grid-Methode benutzt. Bei der Staggered-Grid-Methode werden die Stützstellen für die Druckpunkte und für die Geschwindigkeitspunkte unterschiedlich gewählt. Abbildung 2 zeigt wie diese Wahl. Die Druck wird in den Mitten der Voronoi-Boxen gewählt, die horizontale Geschwindigkeit am westlichen und östlichen Rand und die vertikale Geschwindigkeit am südlichen und nördlichen Rand. Die Logik hinter dieser Wahl wird im Folgenden klar.

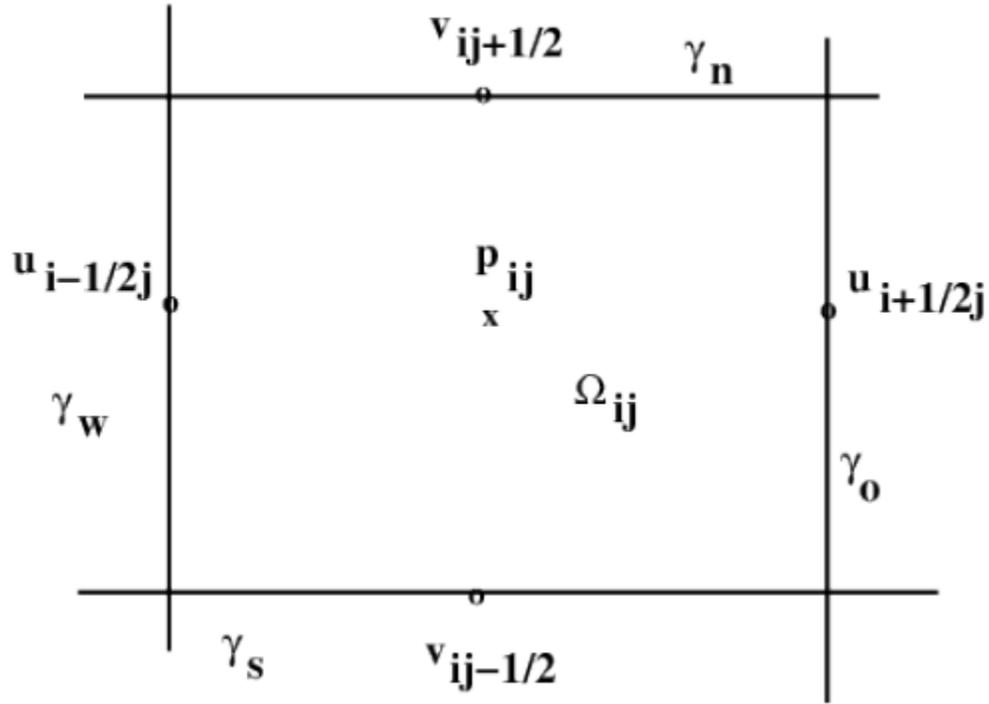


Abbildung 2: Stützpunktwahl für die Staggered-Grid-Methode

### 3.3 Kontinuitätsgleichung

Erst diskretisiert man die Kontinuitätsgleichung (Gleichung 2 in Abschnitt 2). Nach Integration über eine Voronoi-Box und Verwendung des Gaußschen Integralsatzes ergibt sich

$$\int_{\Omega_{ij}} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_{ij} = 0. \quad (3)$$

Dieses Integral kann verteilt werden über die vier Ränder so dass

$$\int_{\gamma_o} u \, dy - \int_{\gamma_w} u \, dy + \int_{\gamma_n} v \, dx - \int_{\gamma_s} v \, dx = 0 \quad (4)$$

folgt. Die individuelle Randintegrale können alle mit Hilfe einer Mittelpunktsgeschwindigkeit approximiert werden. Für den ostliche Rand ist die Approximation

$$\int_{\gamma_o} u dy \approx u_{i+1/2j} h \quad (5)$$

mit  $h$  die Höhe einer Voronoi-Box. Im Weiteren wird neben  $h$ ,  $b$  für die Breite einer Box benutzt. Für die andere Ränder ist die Approximation analog und nach Substituierung dieser Approximationen in Gleichung 4 ergibt sich letztendlich

$$(u_{i+1/2j} - u_{i-1/2j})h + (v_{ij+1/2} - v_{ij-1/2})b = 0. \quad (6)$$

Jetzt ist also die Wahl der Geschwindigkeitsstützpunktstellen klar.

### 3.4 Momentumgleichung

Die Momentumgleichung ist eine Vektorgleichung und kann gespalten werden in eine Gleichung für die horizontale und die vertikale Geschwindigkeit. Da die Diskretisierung der beiden Gleichungen analog ist, zeige ich nur die Diskretisierung der skalaren Gleichung der horizontalen Geschwindigkeit:

$$-\eta \Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \iff \nabla \cdot (\eta \nabla u) + \nabla \cdot [p \ 0]^T = 0. \quad (7)$$

Wegen der Wahl der horizontalen Geschwindigkeitsstützpunktstellen, ist es jetzt vorgegeben über Voronoi-Boxen mit  $u_{i+1/2j}$  als Mittelpunkt zu integrieren. So eine Box ist dargestellt in Abbildung 3. Auf die rechte Form der Gleichung kann man nach Integration über eine Voronoi-Box  $\Omega_{i+1/2j}$  den Gaußschen Integralsatz verwenden.

$$\int_{\Omega_{i+1/2j}} \nabla \cdot (\eta \nabla u) d\Omega_{i+1/2j} + \int_{\Omega_{i+1/2j}} \nabla \cdot [p \ 0]^T d\Omega_{i+1/2j} = 0 \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_{i+1/2j}} \eta \nabla u \cdot \mathbf{n} d\Gamma_{i+1/2j} + \int_{\Gamma_{i+1/2j}} [p \ 0]^T \cdot \mathbf{n} d\Gamma_{i+1/2j} = 0 \quad (9)$$

Diese Integrale können wieder über die vier Ränder verteilt werden.

$$\int_{\gamma_o} \eta \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{\gamma_w} \eta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{\gamma_n} \eta \frac{\partial u}{\partial y} dx - \int_{\gamma_s} \eta \frac{\partial u}{\partial y} dx + \int_{\gamma_o} p dy - \int_{\gamma_w} p dy = 0 \quad (10)$$

Die Fluxen durch die Ränder können in der folgenden Weise approximiert werden:

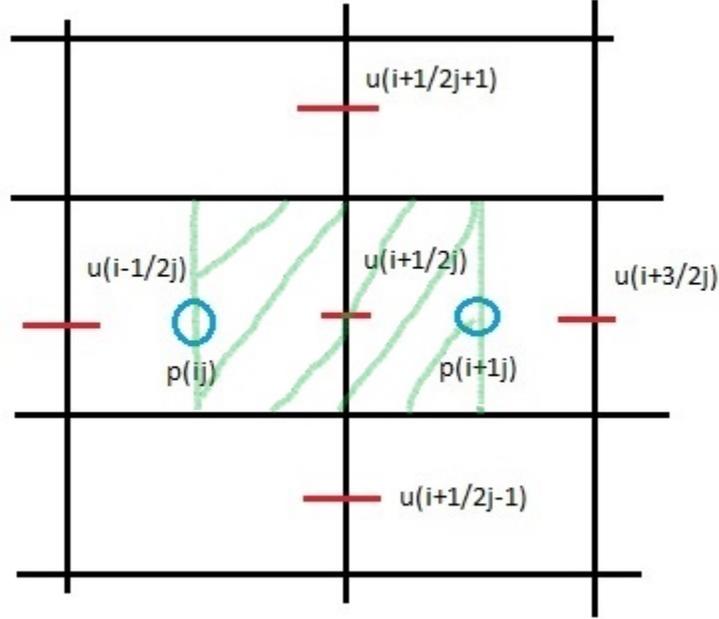


Abbildung 3: Voronoi-Box  $\Omega_{i+1/2j}$

$$\int_{\gamma_o} \eta \frac{\partial u}{\partial x} dy \approx \frac{u_{i+3/2j} - u_{i+1/2j}}{b} h. \quad (11)$$

Für die andere Ränder sind die Approximationen analog. Die Approximation des Drucks geht sowie die Approximation der Geschwindigkeiten in der Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung. Nach substituierung aller dieser Approximationen und Division durch  $bh$  ergibt sich

$$\eta \frac{u_{i+3/2j} - 2u_{i+1/2j} + u_{i-1/2j}}{h^2} + \eta \frac{u_{i+1/2j+1} - 2u_{i+1/2j} + u_{i+1/2j-1}}{b^2} + \frac{p_{i+1j} - p_{ij}}{b} = 0. \quad (12)$$

### 3.5 Behandlung der Randbedingungen

Die Behandlung der Randbedingungen ist für alle Ränder analog, da sie alle eine Dirichlet-Randbedingung haben. Ich zeige deswegen nur die Behandlung der Randbedingung am nördlichen Rand. Am nördlichen Rand gibt es das Problem, dass die horizontale Geschwindigkeit  $u_{i+1/2j+1}$  fehlt. Man kann an dieser Stelle aber einen Ghostpunkt einführen. In Abbildung 4 ist eine Voronoi-Box am nördlichen Rand dargestellt. Da

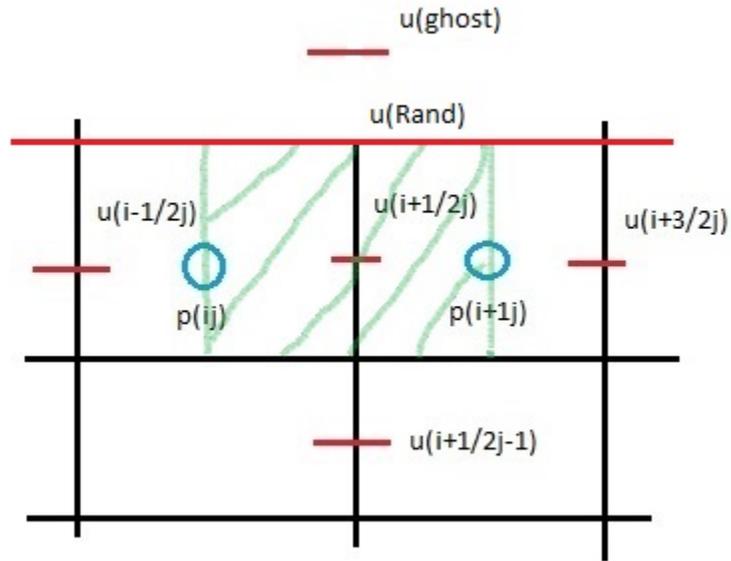


Abbildung 4: Voronoi-Box am nördlichen Rand

die Geschwindigkeit am Rand gegeben ist durch die Randbedingung kann man aus der Beziehung

$$u_{Rand} = \frac{u_{i+1/2j} + u_{ghost}}{2} \quad (13)$$

einen Wert für den Ghostpunkt finden, nämlich

$$u_{ghost} = 2u_{Rand} - u_{i+1/2j}. \quad (14)$$

Bei dem inhomogenen nördlichen Rand, muss der Anteil durch den Term  $2u_{Rand}$  zur rechten Seite des Gleichungssystems gebracht werden.

**Bemerkung:** Bei den Voronoi-Boxen in den Ecken sollte man zwei Ghostpunkten einführen.

## 4 Lösung des Gleichungssystems

Aus den Gleichungen 6 und 12 ergibt sich nach Berücksichtigung auf den Randbedingungen ein Blockgleichungssystem in der folgenden Form:

$$\begin{bmatrix} L_u & 0 & G_u \\ 0 & L_v & G_v \\ D_u & D_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$L_u$  und  $L_v$  sind die viskosen Operatoren,  $G_u$  und  $G_v$  die Gradienten-Operatoren und  $D_v$  und  $D_u$  die Divergenz-Operatoren. Die folgende Beziehung gilt zwischen den Gradienten- und den Divergenz-Operatoren:  $G_u = -D_u^T$  und  $G_v = -D_v^T$ .

Wenn man ein Druckgitter der Dimension  $N \times M$  hat, dann sind die entsprechende Dimensionen für die Vektoren:  $u \in \mathbb{R}^{(N-1)M}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{N(M-1)}$ ,  $p \in \mathbb{R}^{NM}$ . Und für die Matrizen sind die Dimensionen:  $L_u \in \mathbb{R}^{(N-1)M \times (N-1)M}$ ,  $L_v \in \mathbb{R}^{N(M-1) \times N(M-1)}$ ,  $G_u \in \mathbb{R}^{(N-1)M \times NM}$ ,  $G_v \in \mathbb{R}^{N(M-1) \times NM}$ ,  $D_u \in \mathbb{R}^{NM \times (N-1)M}$  und  $D_v \in \mathbb{R}^{NM \times N(M-1)}$ .

Auf der rechten Seite gibt es nur einen Vektor, der ungleich Null ist, da dieser Vektor den Beitrag der inhomogenen Randbedingungen enthält.

Das Gleichungssystem wird letztendlich mit dem 'backslash command' gelöst.

## 5 Ergebnisse

Das wichtigste Ergebnis ist das Geschwindigkeitsfeld. In Abbildungen 5 und 6 sind die Geschwindigkeitsfelder für ein 20 bei 20 bzw. 30 bei 30 (Druck-)Gitter dargestellt. Man sieht, dass es keine große Unterschiede gibt zwischen den beiden Geschwindigkeitsfeldern. Bei den beiden Plots sieht man, dass die Geschwindigkeit am nördlichen Rand am höchsten ist, sowie erwartet. Außerdem dreht die Strömung rechtsrum, was auch den physikalischen Erwartungen entspricht.

**Bemerkung:** Die Modellierung mit den Stokes-Gleichungen ist eine vereinfachte Modellierung bezüglich einer Modellierung mit den Navier-Stokes-Gleichungen. Bei einer Modellierung mit den Navier-Stokes-Gleichungen würde man zwei Wirbel in den Ecken rechts- und links unten erwarten. Die Stokes-Gleichungen sind leider zu einfach um diese Dynamik der Flüssigkeit zu beschreiben.

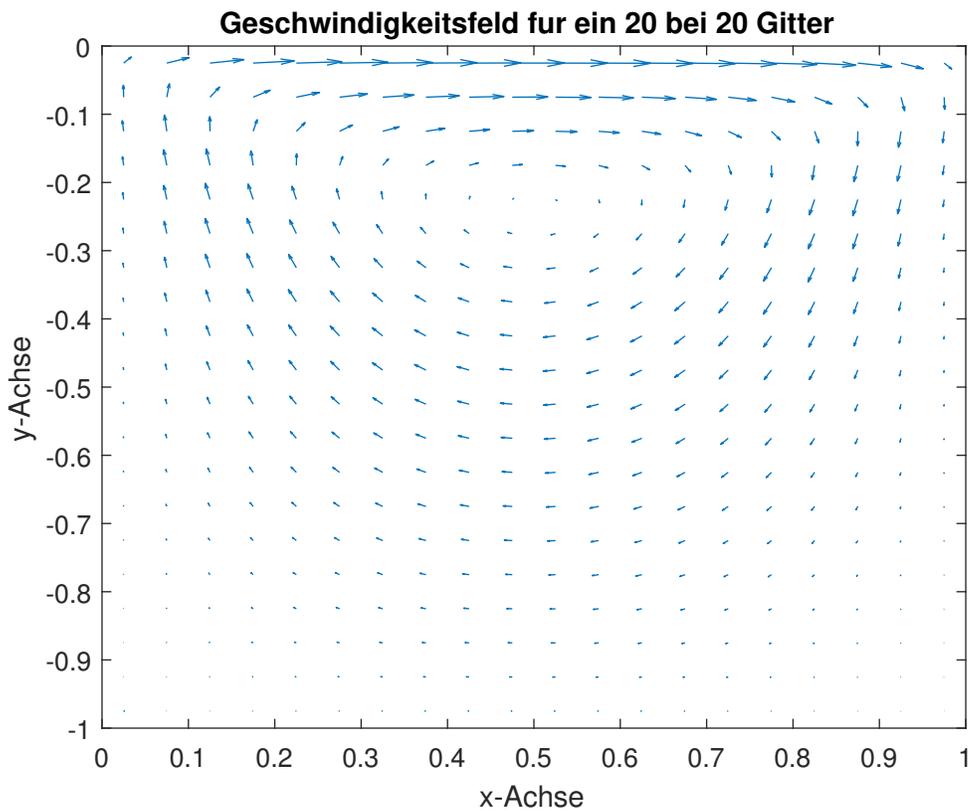


Abbildung 5: Geschwindigkeitsfeld für ein 20 bei 20 Gitter

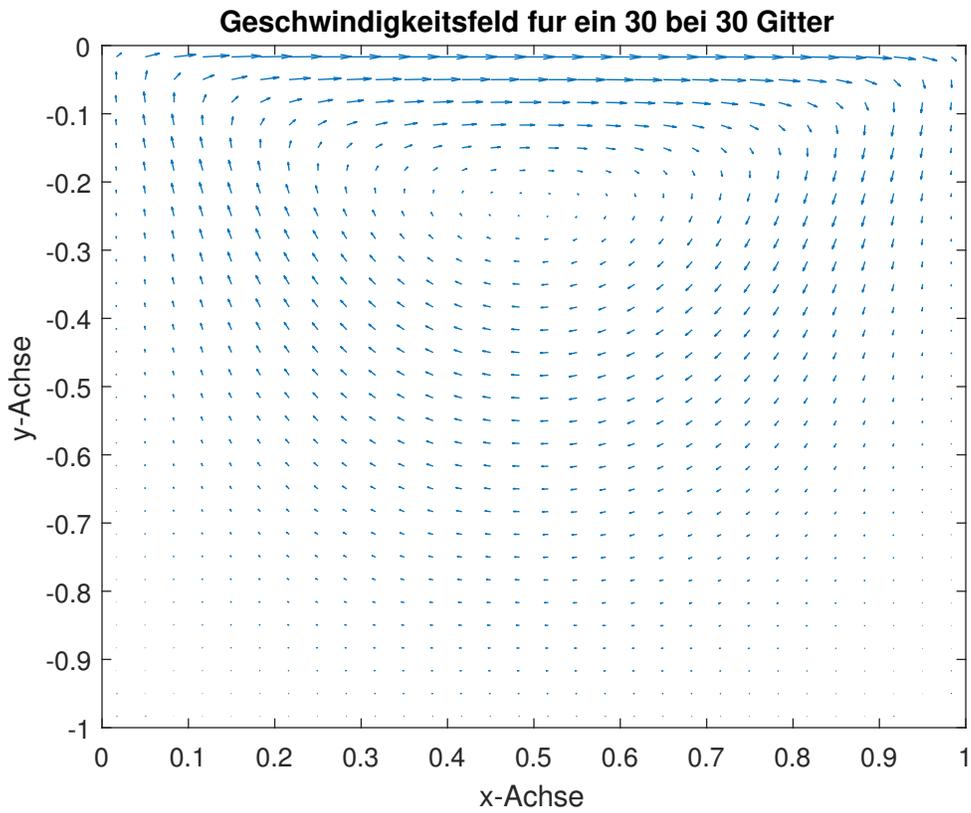


Abbildung 6: Geschwindigkeitsfeld für ein 30 bei 30 Gitter

Das andere wichtige Ergebnis ist die Druckverteilung im diskretisierten Gebiet. In Abbildung 7 ist die Druckverteilung visualisiert. Die interessante Stellen sind die Ecken links- bzw. rechtsoben, wo ein starker Unterdruck bzw. Oberdruck ist.

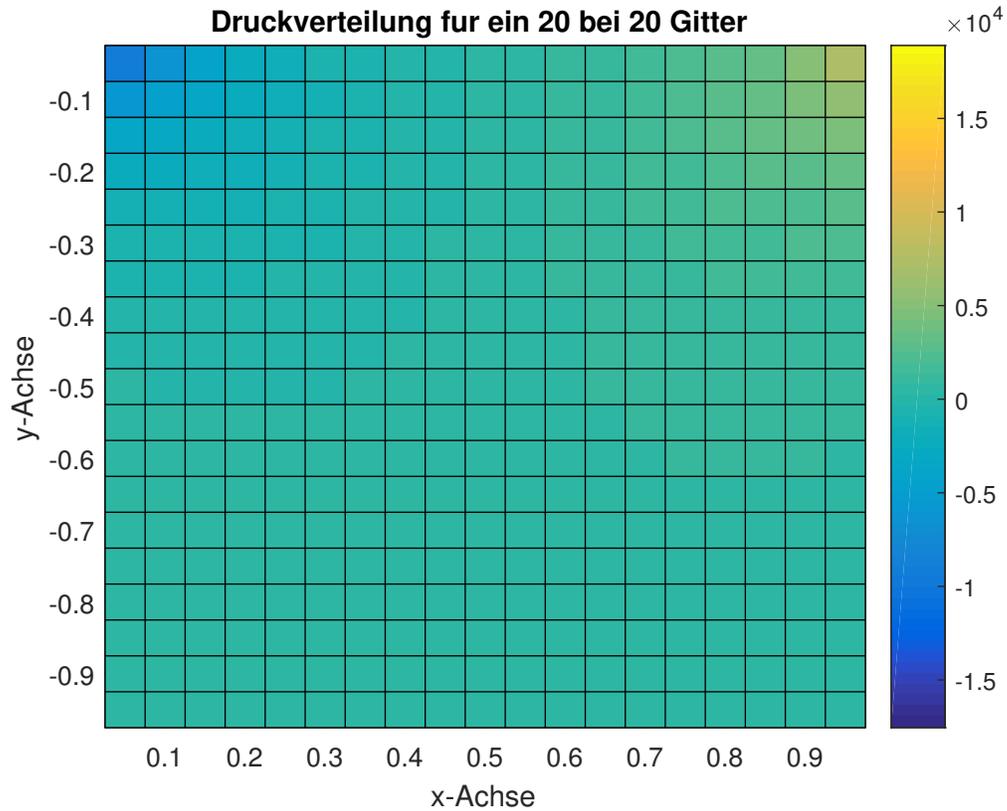


Abbildung 7: Druckverteilung im diskretisierten Gebiet für ein 20 bei 20 Gitter

Letztendlich gibt es noch einen interessanten Weg um zu prüfen ob die Geschwindigkeit und der Druck richtig miteinander zusammenhängen. Nämlich durch ein Plot von dem Geschwindigkeitsfeld und den Druckcontourlinien, die Linien vom gleichen Druck. Dieses Plot ist in Abbildung 8 dargestellt. Man bemerkt, dass die Geschwindigkeit überall senkrecht auf den Druckcontourlinien steht, sowie es physikalisch sein sollte.

### Geschwindigkeitsfeld und Druckcontourlinien für ein 20 bei 20 Gitter

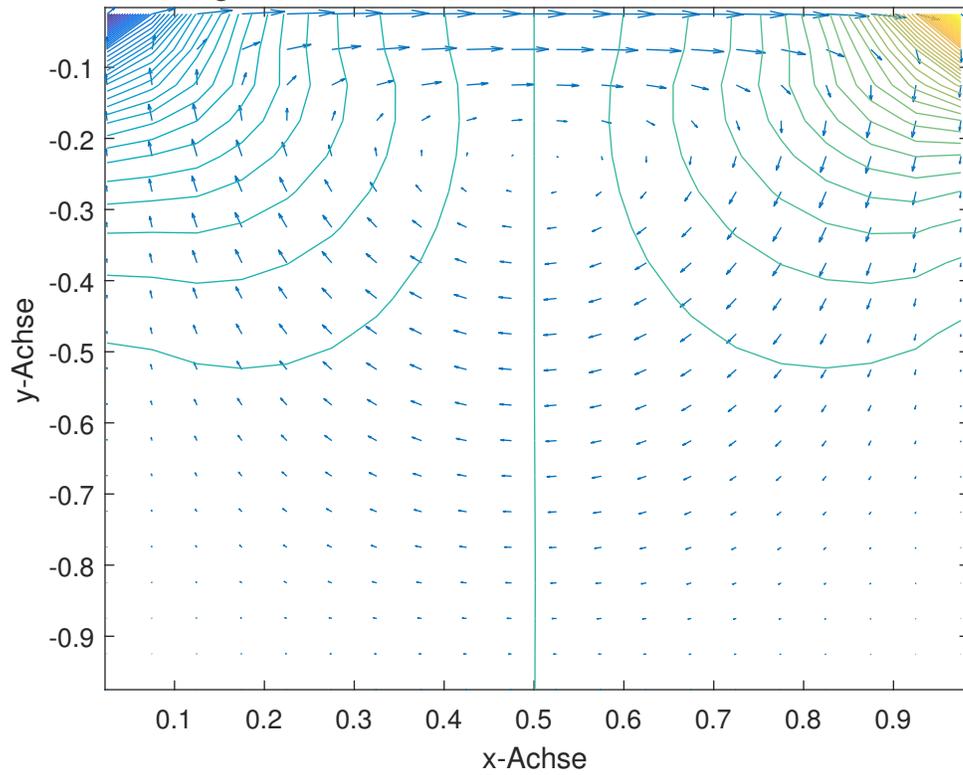


Abbildung 8: Geschwindigkeitsfeld und Druckcontourlinien für ein 20 bei 20 Gitter