

Schranken für Färbungs- und Cliquesüberdeckungsanzahl geometrisch repräsentierbarer Graphen

Clemens Hendler

19. November 1998

1 Einführung

In dieser Arbeit wollen wir die gegenseitige Abhängigkeit von chromatischer Zahl und Cliquesanzahl für bestimmte Klassen von Graphen betrachten. Für alle Graphen gilt, daß die chromatische Zahl ($\chi(G)$) mindestens so groß ist wie die Cliquesanzahl ($\omega(G)$). Was uns nun interessiert ist, ob und wie man die chromatische Zahl in Abhängigkeit der Cliquesanzahl für bestimmte Klassen von Graphen nach oben beschränken kann.

Definition 1.1. Für eine Klasse \mathcal{G} von Graphen sei $\chi^*(\mathcal{G}, \omega)$ die kleinste Zahl so daß gilt:

$$\text{f. a. } G \in \mathcal{G} : (\omega(G) \leq \omega \Rightarrow \chi(G) \leq \chi^*(\mathcal{G}, \omega))$$

Für das duale Problem, also die Cliquesüberdeckungsanzahl ($\theta(G)$) in Abhängigkeit der Unabhängigkeitszahl ($\alpha(G)$) für Graphen aus einer Graphenklasse \mathcal{G} einzuschränken, sei $\theta^*(\mathcal{G}, \alpha)$ analog definiert.

Für die Klasse der perfekten Graphen (\mathcal{PER}) sind die gesuchten Schranken schon durch die Definition dieser Klasse gegeben. Es gilt:

$$\chi^*(\mathcal{PER}, \omega) = \omega \text{ und } \theta^*(\mathcal{PER}, \alpha) = \alpha.$$

Da man dreiecksfreie Graphen mit beliebiger chromatischer Zahl konstruieren kann, besteht für eine gegebene Graphenklasse \mathcal{G} die erste Aufgabe darin, zu prüfen, ob die Schranken $\chi^*(\mathcal{G}, \omega)$ bzw. $\theta^*(\mathcal{G}, \alpha)$ überhaupt existieren. Ist das der Fall, sagen wir \mathcal{G} ist χ - bzw. θ -beschränkt. Ziel ist natürlich immer, optimale Schranken für \mathcal{G} anzugeben, also eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ so daß $\chi^*(\mathcal{G}, \omega) = f(\omega)$ bzw. $\theta^*(\mathcal{G}, \alpha) = f(\alpha)$. Falls uns dies nicht gelingt, wollen wir uns zumindest bemühen, eine möglichst kleine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zu finden, für die wir zeigen können $\chi^*(\mathcal{G}, \omega) \leq f(\omega)$ bzw. $\theta^*(\mathcal{G}, \alpha) \leq f(\alpha)$.

Neben dem rein theoretischen Interesse hat die Suche nach einer Grenze des Verhältnisses $\chi(G)/\omega(G)$ bzw. $\theta(G)/\alpha(G)$ einen hohen praktischen Nutzen, da oftmals ein Beweis von $\chi^*(\mathcal{G}, \omega) \leq f(\omega)$ eine Anleitung für einen approximativen Färbungsalgorithmus mit akzeptablem Laufzeitverhalten liefert, der maximal $f(\omega)$ Farben benutzt und somit ein maximal um Faktor $f(\omega)/\omega$ schlechteres Ergebnis liefert, als ein optimaler.

In dieser Arbeit befassen wir uns mit Graphenklassen, die eine gewisse 'Verwandtschaft' mit Intervallgraphen haben und so definiert sind, daß sie genau die Graphen enthalten, die eine bestimmte geometrische Repräsentation besitzen. Eine geometrische Repräsentation eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Tripel $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \phi)$, wobei \mathcal{R} den Grundraum (zB eine reelle Achse) bezeichnet, \mathcal{F} eine Familie $(f_v)_{v \in V}$ von Teilmengen aus \mathcal{R} und ϕ eine Formel in zwei freien Variablen ist, so daß gilt:

f. a. $u, v \in V (uv \in E \Leftrightarrow \phi(u, v) \text{ ist wahr})$. Bezeichnet $\phi(u, v)$ zB die Formel $f_u \cap f_v \neq \emptyset$, spricht man von Durchschnittsgraphen. Es ist klar, daß jedes Tripel dieser Art genau einen Graphen induziert, so daß man Grapheneigenschaften wie zB Cliquenzahl und chromatische Zahl auf so definierte Repräsentationen übertragen kann.

2 Methoden und Werkzeuge

Da wir Graphenklassen betrachten, die über spezielle Repräsentationsmöglichkeiten definiert sind, liegt es auf der Hand, die durch eine Repräsentation gegebene Struktur auszunutzen. Man erinnere sich zum Beispiel an den gängigen Beweis für die Perfektheit von Intervallgraphen. In diesem wird die Repräsentation eines Intervallgraphen G genutzt, um zu zeigen, daß der First Fit Färbungsalgorithmus bei geeigneter Eingabereihenfolge (welche wiederum aus der Repräsentation hervorgeht) nicht mehr als $\omega(G)$ Farben, und somit wegen $\chi(G) \geq \omega(G)$ genau $\omega(G)$ Farben benutzt. Die Rolle, die der First Fit Algorithmus in diesem Beweis spielt, läßt sich wie folgt zusammenfassen:

Lemma 2.1. $\delta(G)$ bezeichne den Minimalgrad des Graphen G . Es gilt:

$$\text{f. a. } H \subseteq G : \delta(H) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \chi(G) \leq \delta + 1$$

Beweis: Sei $G = (V, E)$ gegeben. Wir indizieren die Knotenmenge wie folgt:

v_n sei ein Knoten mit minimalem Grad in G

v_i sei ein Knoten mit minimalem Grad in $G_i := G[V \setminus \{v_{i+1}, \dots, v_n\}]$

Nun Wählen wir (v_1, \dots, v_n) als Eingabeordnung für den First Fit Färbungsalgorithmus. Dieser färbt den Knoten v_i mit der kleinstmöglichen Farbe, die er noch nicht an einen Nachbarn von v_i vergeben hat, also mit einer Farbe $\leq d_{G_i}(v_i) + 1 \leq \delta + 1$ □

In dieser Arbeit betrachten wir Graphenklassen, die abgeschlossen sind gegen induzierte Subgraphen (was zwar nicht zwingend notwendig, aber für über 'natürliche' Repräsentationen definierte Graphenklassen typisch ist). Da also die induzierten Subgraphen eines Graphen G durch die gleiche Repräsentationsform wie G dargestellt werden können, und die Cliquenzahl eines induzierten Subgraphen kleinergleich der des ursprünglichen ist, haben wir, falls wir feststellen, daß jede Repräsentation der gerade betrachteten Art ein geometrisches Objekt enthält, dessen Grad sich in Abhängigkeit der Cliquenzahl einschränken läßt, mit obigem Lemma schon eine χ -Schranke für diese Graphenklasse gefunden. Am Beispiel der Intervallgraphen liefert das Intervall, dessen rechter Endpunkt am weitesten links liegt die gewünschte Beschränkung: Alle mit ihm 'benachbarten' Intervalle enthalten seinen rechten Endpunkt und bilden somit eine Clique, weshalb der Grad dieses Intervalls die Cliquenzahl nicht erreichen kann.

Es kommt vor, daß eine Repräsentationsform zwar nicht unmittelbar eine Schranke für den Grad eines geometrischen Objektes erkennen läßt, es aber möglich ist, über die Struktur der Repräsentation eine Orientierung des zugrundeliegenden Graphen anzugeben, so daß der maximale Ausgangsgrad in Abhängigkeit von der Cliquenzahl eingeschränkt ist. Mit dem folgenden Lemma können wir mittels einer solchen Schranke eine Schranke für den Minimalgrad, also eine χ -Schranke angeben. Zuvor noch einige Bezeichnungen:

Definition 2.2. Für einen gerichteten Graphen $\vec{G} = (V, \vec{E})$ und einen Knoten $v \in V$ bezeichne

$d_{\vec{G}}^+(v)$ den Ausgangsgrad von v in \vec{G} , also $d_{\vec{G}}^+(v) = |\{w \mid (v, w) \in \vec{E}\}|$

$d_{\vec{G}}^-(v)$ den Eingangsgrad von v in \vec{G} , also $d_{\vec{G}}^-(v) = |\{w \mid (w, v) \in \vec{E}\}|$
 $\delta^+(\vec{G})$ den minimalen Ausgangsgrad in \vec{G} , also $\delta^+(\vec{G}) = \min_{v \in V} d_{\vec{G}}^+(v)$, und
 $\Delta^+(\vec{G})$ den maximalen Ausgangsgrad in \vec{G} , also $\Delta^+(\vec{G}) = \max_{v \in V} d_{\vec{G}}^+(v)$.

Lemma 2.3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $\vec{G} = (V, \vec{E})$ eine Orientierung von G .
Es gilt:

- i. f. a. $H \subseteq G : \delta(H) \leq 2\Delta^+(\vec{G})$
- ii. f. a. $\vec{H} \subseteq \vec{G} : \delta^+(\vec{H}) < \Delta^+(\vec{G}) \Rightarrow$ f. a. $H \subseteq G : \delta(H) < 2\Delta^+(\vec{G})$

Beweis: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, \vec{G} eine beliebige Orientierung von G . Wir wollen zeigen, daß in jedem induzierten Subgraphen von G ein Knoten mit einem Grad kleinergleich $2\Delta^+(\vec{G})$ (i) bzw. kleiner als $2\Delta^+(\vec{G})$ (ii) existiert. Sei $V' \subseteq V$ mit $|V'| = n'$. Betrachte nun den Knoten v , der in $\vec{G}[V']$ den minimalen *Eingangsgrad* hat.

i.: Wegen $n'\Delta^+(\vec{G}[V']) \geq \sum_{u \in V'} d_{\vec{G}[V']}^+(u) = \sum_{u \in V'} d_{\vec{G}[V']}^-(u)$ gilt aufgrund der Wahl von v als Knoten mit minimalem Eingangsgrad in $\vec{G}[V']$:

$$d_{\vec{G}[V']}^-(v) \leq \Delta^+(\vec{G}[V'])$$

, also

$$d_{G[V']}^+(v) = d_{\vec{G}[V']}^+(v) + d_{\vec{G}[V']}^-(v) \leq 2\Delta^+(\vec{G}[V']) \leq 2\Delta^+(\vec{G})$$

ii.: Mit der zusätzlichen Voraussetzung haben wir:

$$n'\Delta^+(\vec{G}[V']) > \sum_{u \in V'} d_{\vec{G}[V']}^+(u) = \sum_{u \in V'} d_{\vec{G}[V']}^-(u)$$

und können auf $d_{\vec{G}[V']}^-(v) < \Delta^+(\vec{G}[V'])$ schließen, also gilt

$$d_{G[V']}^+(v) < 2\Delta^+(\vec{G})$$

□

Ist nun jeder Graph einer Graphenklasse \mathcal{G} so orientierbar, daß wir den maximalen Ausgangsgrad durch eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von ω beschränken können, gilt also mit den obigen Lemmata $\chi^*(\mathcal{G}, \omega) \leq 2f(\omega) + 1$. Sind wir außerdem in der Lage festzustellen, daß der minimale Ausgangsgrad jedes induzierten Subgraphen echt kleiner als $f(\omega)$ ist, können wir schließen: $\chi^*(\mathcal{G}, \omega) \leq 2f(\omega)$.

Betrachten wir Graphenklassen, die durch Vereinigungen oder Schnittoperationen aus anderen Graphenklassen hervorgehen, stehen uns weitere elementare Werkzeuge zur Verfügung. Zunächst wollen wir definieren, was wir unter Schnitt, Vereinigung und Komplement von Graphenklassen verstehen:

Definition 2.4. Für Graphenklassen \mathcal{G}_i ist

$$\bigcup_{i=1}^k \mathcal{G}_i := \left\{ \bigcup_{i=1}^k G_i \mid G_i \in \mathcal{G}_i \right\}, \quad \bigcap_{i=1}^k \mathcal{G}_i := \left\{ \bigcap_{i=1}^k G_i \mid G_i \in \mathcal{G}_i \right\}$$

$$\bar{\mathcal{G}} := \{ \bar{G} \mid G \in \mathcal{G} \}$$

Läßt sich nun eine Graphenklasse \mathcal{G} als Vereinigung von Graphenklassen \mathcal{G}_i ($1 \leq i \leq k$) darstellen, so folgt aus den wohlbekanntem Tatsachen, daß die chromatische Zahl der Vereinigung von Graphen kleinergleich dem Produkt der Färbungszahlen der ursprünglichen Graphen ist, und daß die Cliquenzahl der Vereinigung nicht kleiner als die Cliquenzahlen der an der Vereinigung beteiligten Graphen sein kann das folgende

Lemma 2.5. *Für Graphenklassen $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k$ gilt:*

- i) $\chi^*(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{G}_i, \omega) \leq \prod_{i=1}^k \chi^*(\mathcal{G}_i, \omega)$
ii) $\theta^*(\bigcap_{i=1}^k \mathcal{G}_i, \alpha) \leq \prod_{i=1}^k \theta^*(\mathcal{G}_i, \alpha)$

Punkt zwei des Lemmas folgt mit analoger Argumentation wie oben, nicht aber aus der Dualität von χ und θ bzw. ω und α , denn mangels einer gemeinsamen Grundmenge, auf der die Komplementoperation arbeitet, kann man die de Morganschen Regeln nicht ohne weiteres auf Schnitte bzw. Vereinigungen von Graphen anwenden. Sie gelten i.a. nur für Graphen, die über eine gemeinsame Knotenmenge verfügen. Für Graphenklassen ergibt sich daraus folgendes

Lemma 2.6. *i) sind $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k$ abgeschlossen gegen induzierte Subgraphen gilt:*

$$\overline{\bigcap_{i=1}^k \mathcal{G}_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{\mathcal{G}_i}$$

ii) sind $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k$ abgeschlossen gegen disjunkte Vereinigung mit unabhängigen Mengen gilt:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^k \mathcal{G}_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^k \overline{\mathcal{G}_i}$$

Beweis: i) sei $G \in \overline{\bigcap_{i=1}^k \mathcal{G}_i}$, also $G = \bigcap_{i=1}^k G_i$ mit $G_i \in \mathcal{G}_i$. Aufgrund der Abgeschlossenheit der Graphenklassen \mathcal{G}_i gegen induzierte Subgraphen, können wir davon ausgehen, daß die Graphen G_i auf derselben Knotenmenge basieren wie G und die de Morganschen Regeln anwenden. Es gilt also: $\overline{G} = \overline{\bigcap_{i=1}^k G_i} = \bigcup_{i=1}^k \overline{G_i} \in \bigcup_{i=1}^k \overline{\mathcal{G}_i}$
ii) analog □

So kann man also z.B. unter der Voraussetzung der Abgeschlossenheit von $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k$ gegen induzierte Subgraphen eine χ - bzw. θ -Schranke für $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{G}_i$ als θ - bzw. χ -Schranke für $\bigcap_{i=1}^k \overline{\mathcal{G}_i}$ verwenden.

Nur in den seltensten Fällen kann man mit den vorgestellten elementaren Werkzeugen direkt eine (gute) Schranke angeben. Die grundlegende Methode, die fast allen Beweisen dieser Arbeit zugrundeliegt, besteht darin, für eine Graphenklasse \mathcal{G} ein geeignetes Partitionierungsschema zu finden. Unter einem geeigneten Partitionierungsschema für \mathcal{G} verstehen wir eine Anleitung, die Knotenmenge eines Graphen $G \in \mathcal{G}$ so zu partitionieren, daß die dadurch induzierten Subgraphen H_i in Graphenklassen \mathcal{G}_i liegen, deren Schranken schon bekannt oder aber mit Hilfe unserer elementaren Werkzeuge angegeben werden können.

Da Cliquen- und Unabhängigkeitszahl von knoteninduzierten Subgraphen nicht größer sind als die des ursprünglichen, können wir Färbungs- und Cliquenüberdeckungsanzahl der induzierten Subgraphen einschränken, haben also $\chi(H_i) \leq \chi^*(\mathcal{G}_i, \omega(G))$ bzw. $\theta(H_i) \leq \theta^*(\mathcal{G}_i, \alpha(G))$. Im Idealfall sind wir sogar in der Lage, mit Hilfe des Partitionierungsschemas Schranken für die Cliquen bzw. Unabhängigkeitszahl der Subgraphen H_i nachzuweisen, die kleiner sind als die triviale Schranke $\omega(G)$ bzw. $\alpha(G)$,

also Funktionen f_i mit $\omega(H_i) \leq f_i(\omega(G)) \leq \omega(G)$ bzw. $\alpha(H_i) \leq f_i(\alpha(G)) \leq \alpha(G)$. Färben wir nun die Subgraphen H_i mit paarweise disjunkten Farbmengen, ist klar, daß die Vereinigung dieser Farbmengen ausreicht, um G zu färben, und überdecken wir die Subgraphen H_i mit Cliques, so stellt die Vereinigung dieser Cliquesüberdeckungen eine Cliquesüberdeckung für G dar. Da wir zum Ziel haben, eine χ - bzw. θ -Schranke für \mathcal{G} allein in Abhängigkeit von α bzw. ω anzugeben, muß das Partitionierungsschema außerdem noch gewährleisten, daß die Anzahl der Subgraphen, in die G zerlegt wird, durch eine Funktion f in $\alpha(G)$ bzw. $\omega(G)$ beschränkt ist. Haben wir ein Partitionierungsschema gefunden, das all diesen Ansprüchen genügt, können wir somit schließen: $\chi^*(\mathcal{G}, \omega) \leq \sum_{i=1}^{f(\omega)} \chi^*(G_i, f_i(\omega))$, bzw. $\theta^*(\mathcal{G}, \alpha) \leq \sum_{i=1}^{f(\alpha)} \theta^*(G_i, f_i(\alpha))$.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Klasse \mathcal{KB} der Kreisbogensgraphen, die genau aus den Graphen besteht, die sich als Durchschnittsgraphen von Kreisliniensegmenten repräsentieren lassen. Um eine geeignete Partitionierung eines Kreisbogensgraphens G vorzunehmen, wählen wir einen Punkt p der Kreislinie und betrachten den induzierten Subgraphen C , der auf den Knoten basiert, deren Bögen den Punkt p enthalten, und den Subgraphen I , basierend auf den Knoten, deren Bögen p nicht enthalten. Da alle Bögen der Knoten aus $V(C)$ den Punkt p enthalten sind sie paarweise benachbart, C ist also ein vollständiger und somit perfekter Graph. Desweiteren sieht man leicht, daß I zur Klasse der Intervallgraphen gehört: Man zerschneide einfach die Kreislinie am Punkt p und biege sie zu einer Geraden. Die so entstandene Intervallrepräsentation ist offensichtlich eine Repräsentation für I . Wir haben also einen Kreisbogensgraphen in zwei perfekte Graphen partitioniert. Betrachten wir nun die Unabhängigkeitszahl dieser induzierten Subgraphen. $\alpha(I)$ können wir lediglich durch $\alpha(G)$ beschränken. Für C dagegen haben wir $\alpha(C) = 1$, da C eine Clique ist, und erhalten: $\theta^*(\mathcal{KB}, \alpha) \leq \theta^*(\mathcal{PER}, 1) + \theta^*(\mathcal{PER}, \alpha) = \alpha + 1$. Auch für die Cliqueszahl von C können wir die Schranke $\omega(G)$ noch verbessern. Dazu müssen wir unser Partitionierungsschema allerdings noch ein wenig verfeinern: Es ist immer möglich, den Punkt der Kreislinie so zu wählen, daß maximal $\omega(G) - 1$ Bögen diesen Punkt enthalten: wähle den Punkt p beliebig, sollte er in $\omega(G)$ Bögen enthalten sein, wähle einen neuen Punkt zwischen dem ersten Endpunkt dieser Bögen und dem Anfangspunkt des ersten nachfolgenden Bogens. Somit haben wir $\omega(C) = |V(C)| \leq \omega(G) - 1$, also $\chi^*(\mathcal{KB}, \omega) \leq \chi^*(\mathcal{PER}, \omega) + \chi^*(\mathcal{PER}, \omega - 1) = 2\omega - 1$.

3 Boxgraphen

Als erstes wollen wir uns den Klassen von Graphen widmen, die, für gegebenes d durch d -dimensionale Boxen im d -dimensionalen Euklidischen Raum (mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen) repräsentierbar sind, so daß zwei Knoten genau dann adjazent sind, wenn sich ihre Boxen schneiden. Diese Klasse von Graphen bezeichnen wir mit $d\mathcal{BOX}$. Eine Box B kann durch die Angabe eines d -Intervalltupels (I_1, \dots, I_d) vollständig wie folgt beschrieben werden: $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \min(I_i) \leq x_i \leq \max(I_i), i = 1, \dots, d\}$. Also gibt es für einen Graphen $G = (V, E) \in d\mathcal{BOX}$ neben der auf Boxen basierenden Repräsentation $\mathcal{R}_{BOX} = (\mathbb{R}^d, (Box_v)_{v \in V}, \phi_{BOX})$ (mit $\phi_{BOX}(u, v) = (Box_u \cap Box_v \neq \emptyset)$) auch eine auf Intervalltupeln basierende Repräsentation, nämlich $\mathcal{R}_{INT} = (\mathbb{R}, (\mathbf{I}_v)_{v \in V}, \phi_{INT})$ mit $\mathbf{I}_v = (I_1^v, \dots, I_d^v)$ und $\phi_{INT}(u, v) = (\text{f. a. } i \in \{1, \dots, d\} : I_i^u \cap I_i^v \neq \emptyset)$. Die Intervalltupelrepräsentation macht deutlich, daß es sich bei den Graphen aus $d\mathcal{BOX}$ um genau die Graphen handelt, die durch den Schnitt von d Intervallgraphen darstellbar sind, also gilt: $d\mathcal{BOX} = \bigcap^d \mathcal{INT}$. Ob die Intervalle bzw. Boxen geschlossen oder offen sind ist für die Beschreibung der Graphenklasse irrelevant. Wir gehen in dieser Arbeit immer von einer Darstellung durch abgeschlossene Intervalle / Boxen aus. Desweiteren gehen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß die Endpunkte der

Intervalle in jeder Koordinate paarweise disjunkt sind. Wir werden nach belieben zwischen den beiden Repräsentationsformen wechseln, je nachdem, welche gerade eine einfachere Darstellung des Sachverhalts verspricht.

3.1 $\theta^*(d\mathcal{BO}\mathcal{X}, \alpha)$

Bezüglich der Cliquesüberdeckungszahl liefert die Darstellung als Schnitt von Intervallgraphen mit Lemma 2.5 unmittelbar $\theta^*(d\mathcal{BO}\mathcal{X}, \alpha) \leq \alpha^d$, was auch schon (mit Ausnahme für $\theta^*(2\mathcal{BO}\mathcal{X}, 2)$) die bisher beste bekannte Schranke für die Cliquesüberdeckungszahl war. Das folgende Lemma wird uns ermöglichen, die Größenordnung der Schranke zu reduzieren. Desweiteren wird uns der Beweis als Anleitung für einen approximativen Algorithmus mit effizienter Laufzeit dienen.

Lemma 3.1. *Sei \mathcal{G} θ -beschränkt, abgeschlossen gegen induzierte Subgraphen und gegen disjunkte Vereinigung. Für $G = G_1 \cap G_2$ mit $G_1 \in \mathcal{INT}$, $G_2 \in \mathcal{G}$ gilt:*

$$\theta(G) \leq (\lfloor \log_2(\alpha(G_1)) \rfloor + 1) \theta^*(\mathcal{G}, \alpha(G))$$

Beweis: Wir werden die in Kapitel 2 vorgestellte Methode, die Knotenmenge des Graphen so zu partitionieren, daß die dadurch Induzierten Subgraphen in einer θ -beschränkten Graphenklasse liegen benutzen. Als Hilfsmittel für die Partitionierung der Knotenmenge betrachten wir zunächst folgende Teilmengen von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$: Für $i \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{N}_i := \{n \mid \text{ex. } k \in \mathbb{N} : n = 2^i + k2^{i+1}\}$.

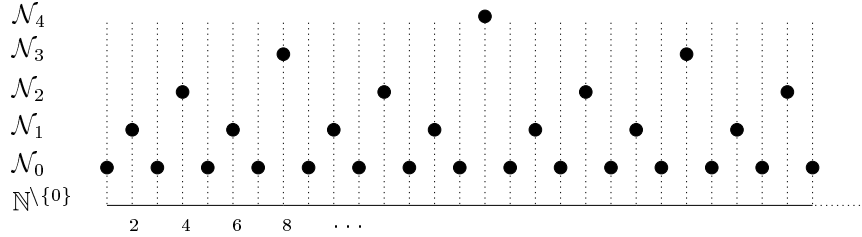


Abbildung 1: Partitionierung von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

Für $(\mathcal{N}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt:

- $(\mathcal{N}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist Partitionierung von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$:
 - f. a. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ex. $i : n \in \mathcal{N}_i$:
Wähle $i := \max\{m \mid n \equiv 0 \pmod{2^m}\}$, $k_0 := n/2^i$. Also k_0 ungerade und $n = k_0 2^i = 2^i + (k_0 - 1)2^i = 2^i + \frac{k_0 - 1}{2} 2^{i+1}$.
 - $\mathcal{N}_{i_0} \cap \mathcal{N}_{i_1} \neq \emptyset \Rightarrow i_0 = i_1$:
Sei $i_1 = i_0 + l$. $2^{i_0} + k_0 2^{i_0+1} = 2^{i_0+l} + k_1 2^{i_0+l+1}$
 $\Rightarrow k_0 = \frac{2^{i_0+l} + k_1 2^{i_0+l+1} - 2^{i_0}}{2^{i_0+1}} = 2^{l-1} + k_1 2^l - 1/2$
 $\Rightarrow l = 0$ da $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$
- (†) f. a. $n, n' \in \mathcal{N}_i : n < n' \Rightarrow$ ex. $j > i$, ex. $n_j \in \mathcal{N}_j : n < n_j < n'$:
Sei $n = 2^i + k2^{i+1}$. $n < n' \Rightarrow n < (k+1)2^{i+1} < n'$.
 $j := \max\{m \mid (k+1)2^{i+1} \equiv 0 \pmod{2^m}\}$.
Es gilt: $j \geq i+1$ und $(k+1)2^{i+1} \in \mathcal{N}_j$ (s.o.).

Seien $G = (V, E)$, $G = G_1 \cap G_2$ mit $G_1 \in \mathcal{INT}$, $G_2 \in \mathcal{G}$ (\mathcal{G} wie gefordert), und eine Intervallrepräsentation \mathcal{R}_1 von G_1 basierend auf der Familie $(I_v)_{v \in V(G_1)}$ gegeben. Wir können $V(G_1) = V$ annehmen.

Da Intervallgraphen perfekt sind, besitzt G_1 eine Cliquesüberdeckung der Größe

$\alpha(G_1)$. Sei $P = \{p_1, \dots, p_{\alpha(G_1)}\} \subset \mathbb{R}$ mit $i < j \Rightarrow p_i < p_j$ eine Punktmenge, die in \mathcal{R}_1 eine Cliquesüberdeckung induziert. (Intervallgraphen haben die Helly Eigenschaft, also gibt es für jede Clique C einen Punkt p so daß f. a. $v \in C : p \in I^v$ (nimm z.B. $\min\{\max(I_v) \mid v \in C\}$))

Mittels P und $(\mathcal{N}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ partitionieren wir V wie folgt:

Für $i = 0, \dots, \lfloor \log_2(\alpha(G_1)) \rfloor$ sei

$$P_i := \{p_j \in P \mid j \in \mathcal{N}_i\}, \text{ und}$$

$$V_i := \{v \mid \text{ex. } p \in P_i : p \in I_1^v \text{ \& f. a. } j > i \text{ f. a. } p \in P_j : p \notin I_1^v\}.$$

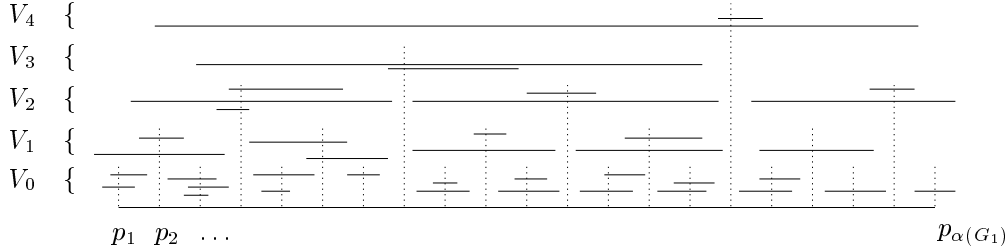


Abbildung 2:

Die V_i sind paarweise disjunkt, und $\bigcup_{i=0}^{\lfloor \log_2(\alpha(G_1)) \rfloor} V_i = V$ gilt, da für $j > \lfloor \log_2(\alpha) \rfloor$

alle n aus \mathcal{N}_j größer als $\alpha(G_1)$ sind.

V_i wiederum partitionieren wir in $(V_i^p)_{p \in P_i}$ mit $V_i^p := \{v \in V_i \mid p \in I_1^v\}$.

Da die Intervalle aller Knoten aus V_i^p den Punkt p enthalten, ist $G_1[V_i^p]$ eine Clique, also gilt

$$G[V_i^p] = G_2[V_i^p].$$

Wegen (†) gilt, daß für $p < p' \in P_i$ ein $j > i$ und ein $p_j \in P_j$ existieren, so daß $p < p_j < p'$ gilt. Das bedeutet für Knoten $v \in V_i^p, w \in V_i^{p'}$, daß ihre Intervalle durch dieses p_j voneinander getrennt sind, da sie p_j nach Konstruktion nicht enthalten dürfen. Daraus folgt, daß sie in G_1 , und somit in G nicht benachbart sind. Schreiben wir die Disjunkte Vereinigung von Graphen als Summe, können wir feststellen:

$$G[V_i] = \sum_{p \in P_i} G[V_i^p] = \sum_{p \in P_i} G_2[V_i^p].$$

Da \mathcal{G} abgeschlossen ist gegen disjunkte Vereinigung und induzierte Subgraphen, gilt also

$$G[V_i] \in \mathcal{G}.$$

Mit $\alpha(G) \geq \alpha(G[V_i])$ haben wir: $\theta(G[V_i]) \leq \theta^*(\mathcal{G}, \alpha(G))$, also

$$\begin{aligned} \theta(G) &\leq \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2(\alpha(G_1)) \rfloor} \theta(G[V_i]) \\ &\leq (\lfloor \log_2(\alpha(G_1)) \rfloor + 1) \theta^*(\mathcal{G}, \alpha(G)). \end{aligned}$$

□

Satz 3.2.

$$\theta^*(dBO\mathcal{X}, \alpha) \leq \alpha (\lfloor \log_2(\alpha) \rfloor + 1)^{d-1}$$

Beweis: Induktion über d .

Für $d = 1$ liegen Intervallgraphen vor und die Behauptung stimmt.

Sei also $d > 1$, $G \in d\text{BOX}$. Es gilt: $G = G_1 \cap G_2$ mit $G_1 \in \text{INT}$ und $G_2 \in (d-1)\text{BOX}$.

Wir können annehmen, daß $V(G) = V(G_1)$, also $\alpha(G) \geq \alpha(G_1)$.

$(d-1)\text{BOX}$ ist abgeschlossen gegen induzierte Subgraphen und disjunkte Vereinigung und nach Induktionshypothese θ -beschränkt mit $\theta^*((d-1)\text{BOX}, \alpha) \leq \alpha(\lfloor \log_2(\alpha) \rfloor + 1)^{d-2}$.

Mit Lemma 3.1 folgt: $\theta(G) \leq (\lfloor \log_2(\alpha(G)) \rfloor + 1) \alpha(\lfloor \log_2(\alpha) \rfloor + 1)^{d-2}$ \square

Der Beweis von Lemma 3.1 kann in einen Algorithmus zum Finden einer Cliquenüberdeckung (bestehend aus maximal $(\lfloor \log_2(\alpha) \rfloor + 1)^{d-1} \alpha$ Cliquen) eines $d\text{Box}$ -graphen umgesetzt werden.

Die Procedure *Partitioniere* ist die Umsetzung der im Beweis von Lemma 3.1 vorgenommenen Partitionierung der Knotenmenge anhand der Lage der Intervalle relativ zu einer überdeckenden Punktmenge. Sie erhält als Eingabe eine Menge von d -Intervallen (R) und die Information, nach welcher Komponente die Partitionierung vorgenommen werden soll (t). Zunächst wird R nach den rechten Endpunkten der Intervalle der Komponente t sortiert. Diese sortierte Liste wird dann von links nach rechts abgearbeitet, wobei im Greedyverfahren eine überdeckende Punktmenge erzeugt wird ($p[1, \dots, n]$, n Arrayfelder sind wegen $\alpha \leq n$ ausreichen). Gleichzeitig wird die Partitionierung der Intervalltupel vorgenommen, und zwar in die Mengen, die wir im Beweis von Lemma 3.1 mit V_i^p bezeichnet haben (Zeilen 10, 16). $last[j]$ ist der Index des zuletzt konstruierten Punktes, dessen Index in \mathcal{N}_j liegt. In Zeile 15 wird mit dieser Information ermittelt, welches das größtindizierte P_j ist, das einen Punkt aus dem betrachteten Intervall enthält. (Bezeichnung siehe Beweis Lemma 3.1). Dieses P_j enthält (wegen \dagger) genau einen Punkt des betrachteten Intervalls, nämlich $p[last[j]]$. $V[last[j]]$ entspricht also der Menge $V_j^{p[last[j]}}$ des Beweises, bzw. $V[i]$ der Menge $V_j^{p_i}$ wobei j eindeutig durch $i \in \mathcal{N}_j$ bestimmt ist.

```

1  procedure Partitioniere ( $R, t, Partitionierung$ )
2  sortiere  $R$  nach rechten Endpunkten der Intervalle aus Komponente  $t$ 
3   $i := 0$ 
4   $p[0] := -\infty$ ;
5  while  $R \neq \emptyset$  do
6     $Tupel := \min\{R\}$ ;
7    if linkerEndpunkt( $Tupel, t$ ) >  $p[i]$  then
8       $i := i + 1$ ;
9       $p[i] :=$  rechterEndpunkt( $Tupel, t$ );
10      $V[i] := \{Tupel\}$ 
11      $j \leftarrow j$  mit  $i \in \mathcal{N}_j$ 
12      $last[j] := i$ 
14   else
15      $j \leftarrow \max\{j \mid p[last[j]] \in \text{Intervall}(Tupel, d)\}$ 
16      $V[last[j]] := V[last[j]] \cup \{Tupel\}$ 
17   endif
18    $R := R \setminus \{Tupel\}$ 
19 endwhile
20  $Partitionierung := \{V[1], \dots, V[i]\}$ 

```

```

procedure Cliquenüberdeckung( $R, Cliquecover$ );
 $Partitionierung := \{R\}$ 

```



```

for  $i := 1$  to  $d$  do
   $C := \emptyset$ 
  forall  $M \in \text{Partitionierung}$  do
    Partitioniere( $M, i, D$ );
     $C := C \cup D$ ;
  endforall
   $\text{Partitionierung} := C$ 
endfor
 $\text{Cliquecover} := \text{Partitionierung}$ 

```

Satz 3.3. 'Cliquesüberdeckung' läuft in $O(dn \log(n))$ Zeit und liefert eine Cliquesüberdeckung einer d -dimensionalen Boxrepräsentation R der Größe kleiner-gleich $(\lfloor \log_2(\alpha(R)) \rfloor + 1)^{d-1} \alpha$

Beweis: Daß der Algorithmus eine Cliquesüberdeckung der Größe $\leq (\lfloor \log_2(\alpha) \rfloor + 1)^{d-1} \alpha$ liefert ist mit dem Beweis von Lemma 3.1 klar. Zeigen müssen wir also noch das Laufzeitverhalten. Betrachten wir zunächst die Procedure *Partitioniere* mit Eingabegröße n . Das Sortieren in Zeile 2 benötigt $O(n \log(n))$ Zeit. Die *while* Schleife wird n mal durchlaufen. In dieser Schleife sind alle Zeilen bis auf die Zeilen 11 und 15 in konstanter Zeit ausführbar. Betrachten wir Zeile 11. Diese kann so realisiert werden, daß sie $O(\log(\alpha))$ Zeit benötigt:

```

 $j := \lfloor \log(\alpha) \rfloor$ 
while  $i \bmod 2^j \neq 0$  do  $j := j - 1$ 

```

Daß diese Zeilen das gewünschte Ergebnis liefern, haben wir schon im Beweis von Lemma 3.1 gezeigt.

Zeile 15 kann wie folgt realisiert werden:

```

 $j := \lfloor \log(\alpha) \rfloor$ ;
while  $p[\text{last}[j]] < \text{linkerEndpunkt}(\text{Tupel}, t)$  do  $j := j - 1$ ;

```

benötigt also auch nur $O(\log(\alpha))$ Zeit. α ist iA nicht bekannt, wir können es aber durch n ersetzen. *Partitioniere* benötigt somit insgesamt $O(n \log(n))$ Zeit.

In Cliquesüberdeckung wird die äußere Schleife d mal durchlaufen. Betrachten wir einen solchen Durchlauf. *Partitionierung* enthalte die Mengen M_1, \dots, M_t , also wird die forall Schleife t mal durchlaufen, und t mal wird 'Partitioniere' aufgerufen. Mit $n_i := |M_i|$ wird also $c't + \sum_{i=1}^t c n_i \log(n_i)$ Zeit in der forall Schleife verbraucht. Da die M_i eine Partitionierung der Menge R sind, gilt: $\sum_{i=1}^t n_i = n$, also $\sum_{i=1}^t c n_i \log(n_i) \leq c n \max_{1 \leq i \leq t} \log(n_i) \leq c n \log(n)$ \square

Für den Fall $\alpha = 2$ liefert Satz 3.2 keine Verbesserung der alten Schranke α^d . In [9] zeigen Gyárfás und Lehel, daß $\theta^*(2\text{BO}\mathcal{X}, 2) = 3$ gilt und stellen die Frage nach dem Wachstum einer Schranke für den Fall $\alpha = 2$ in Abhängigkeit von der Dimension. Wir zeigen nun:

Satz 3.4.

$$\theta^*(d\text{BO}\mathcal{X}, 2) \leq d + 1$$

Beweis: Induktion über d :

Für $d = 1$ liegen Intervallgraphen vor und die Behauptung gilt.

$d > 1$: Sei $G = (V, E) \in d\text{BO}\mathcal{X}$ mit $\alpha(G) = 2$, und \mathcal{R} eine auf der Intervalltupelfamilie $((I_1^v, \dots, I_d^v))_{v \in V}$ basierende Repräsentation von G .

Seien G_1, G_2 die durch die Repräsentationen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &:= (\mathbb{R}, (I_1^v)_{v \in V}, \phi_1) \text{ und} \\ \mathcal{R}_2 &:= (\mathbb{R}^{d-1}, (\mathbf{I}'_v)_{v \in V}, \phi_2) \text{ mit } \mathbf{I}'_v = (I_2^v, \dots, I_d^v) \end{aligned}$$

induzierten Graphen. Es gilt: $\alpha(G_1), \alpha(G_2) \leq \alpha(G)$. Falls die Unabhängigkeitszahl von G_1 oder G_2 gleich eins ist, ist nichts weiter zu zeigen, sei also $\alpha(G_1) = \alpha(G_2) =$

2.

Seien $P_1 = \{p_1^1, p_2^1\} \subset \mathbb{R}$ und $P_2 = \{p_1^2, \dots, p_{\theta(G_2)}^2\} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ Cliquesüberdeckungen von G_1 bzw. G_2 induzierende Punktmenge (auch Boxrepräsentationen haben die Helly-Eigenschaft). Es gelte $p_1^1 < p_2^1$, und p_1^1 sei so groß wie möglich gewählt. Dann existiert ein $v \in V$ so daß $p_1^1 = \max(I_1^v)$.

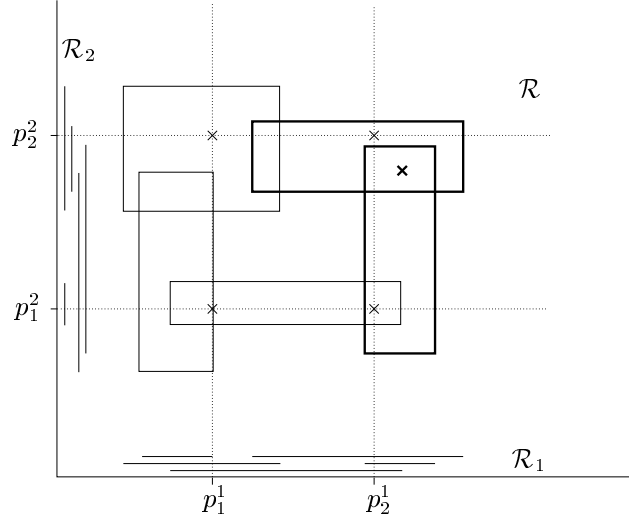


Abbildung 3: Boxen, die keinen der Punkte (p_1^1, p_i^2) enthalten bilden eine Clique und können durch einen Punkt überdeckt werden

Mit $P^i := \{(p_1, \dots, p_d) \mid p_1 = p_1^i, (p_2, \dots, p_d) \in P_2\} (i = 1, 2)$ ist klar, daß $P := P^1 \cup P^2 \subset \mathbb{R}^d$ eine Cliquesüberdeckung für G induziert.

Betrachten wir nun einen Knoten w , dessen Box keinen Punkt aus P^1 enthält. Box_w enthalte den Punkt $(p_2^1, p_2, \dots, p_d) \in P^2$. Da Box_w nicht den Punkt (p_1^1, p_2, \dots, p_d) enthält, gilt $p_1^1 < \min(I_1^w)$.

Daraus folgt, daß das v mit $\max(I_1^v) = p_1^1$ zu keinem Knoten, der keinen Punkt aus P^1 enthält benachbart sein kann, woraus wiederum folgt, daß diese eine Clique bilden, da sonst eine unabhängige Menge größer als zwei existierte. Wir können also P^2 durch einen einzigen Punkt p ersetzen und erhalten mit $P^1 \cup \{p\}$ eine Punktmenge, die eine Cliquesüberdeckung der Größe $|P^1| + 1 = \theta(G_2) + 1 \leq \theta^*((d-1)\mathcal{BO}\mathcal{X}, 2) + 1 \leq d + 1$ induziert. \square

3.2 $\chi^*(d\mathcal{BO}\mathcal{X}, \omega)$

Eine Schranke für die Chromatische Zahl in Abhängigkeit der Cliquenzahl läßt sich dagegen für $d \geq 3$ nicht angeben: J.P.Burling stellte in [3] eine Konstruktionsanleitung dreiecksfreier dreidimensionaler Boxgraphen für beliebige Chromatische Zahl vor, also gilt:

Satz 3.5. *Für $d \geq 3$ ist $d\mathcal{BO}\mathcal{X}$ nicht χ -beschränkt*

Damit hat er auch gezeigt, daß eine denkbare Analogie des Perfect Graph Theorem (G χ -beschränkt $\Leftrightarrow G$ θ -beschränkt) nicht gilt. Außerdem folgt mit Lemma 2.6:

Corollar 3.6. *f. a. $\mathcal{G} \supseteq \overline{INT} \cup \overline{INT} \cup \overline{INT} : \mathcal{G}$ ist nicht θ -beschränkt.*

Insbesondere ist also die Klasse der Vereinigungen von drei Vergleichbarkeitsgraphen nicht θ -beschränkt.

Bei eindimensionalen Boxgraphen handelt es sich um die Klasse der (perfekten) Intervallgraphen. Widmen wir uns also der Untersuchung der zweidimensionalen Boxgraphen (auch Rechteckgraphen genannt). Für diese ist folgendes Lemma (eine Verallgemeinerung eines Lemmas aus [2]) von besonderer Bedeutung

Lemma 3.7. *Sei $G = (V, E) \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}$, \mathcal{R} eine Boxrepräsentation von G . Dann läßt sich G in $2^d(\omega(G) - 1)$ Graphen G_i zerlegen, die die Eigenschaft haben, daß die Adjazenzrelation in der durch G_i induzierten Repräsentationen R_i ausschließlich durch Kreuzungen von Boxen dargestellt wird,*

wobei wir unter einer Kreuzung einen Schnitt von Boxen verstehen, ohne daß eine Box eine Ecke der anderen Box enthält. Die 'besondere Bedeutung' dieses Lemmas für $2\mathcal{BO}\mathcal{X}$ Graphen liegt darin, daß durch Kreuzungen repräsentierbare Rechteckgraphen perfekt sind. Um das zu sehen orientiere man den Kreuzungsgraphen so, daß gilt: $(u, v) \in \vec{E} \Rightarrow I_1^u \subset I_1^v$ (und somit $I_2^v \subset I_2^u$). Diese Orientierung ist transitiv, also handelt es sich um einen (perfekten) Vergleichbarkeitsgraphen.

Beweis: Zunächst wollen wir ein paar einfache Beobachtungen über nicht eckenfreie Boxenschnitte zusammentragen: Die zu v gehörende Box hat folgende Eckenmenge: $C(v) := \{(a_1, \dots, a_d) : a_i \in \{\min(I_i^v), \max(I_i^v)\}, i = 1, \dots, d\}$. Box_w enthält eine Ecke von Box_v , also $C(v) \cap Box_w \neq \emptyset$ gdw $\text{ex.}(a_1, \dots, a_d) \in C(v)$ f. a. $j = 1, \dots, d : a_j \in I_j^w$. Daraus folgt unmittelbar, daß sich für u, v die Anzahl der Ecken von Box_v in Box_u wie folgt darstellen läßt:

$$|C(v) \cap Box_u| = \prod_{j=1}^d |\{\max(I_j^v), \min(I_j^v)\} \cap I_j^u|$$

, also gleich null oder eine Zweierpotenz ist. Enthält Box_w genau eine Ecke von Box_v so muß gelten: f. a. $j = 1, \dots, d : |\{\min(I_j^v), \max(I_j^v)\} \cap I_j^w| = 1$, woraus folgt: f. a. $j = 1, \dots, d : |\{\min(I_j^w), \max(I_j^w)\} \cap I_j^v| = 1$, also $|C(v) \cap Box_w| = 1 \Leftrightarrow |C(w) \cap Box_v| = 1$. Enthält Box_w mehr als eine Ecke von Box_v , muß ein $j \in \{1, \dots, d\}$ existieren mit $I_j^v \subset I_j^w$, woraus $C(w) \cap Box_v = \emptyset$ folgt. Für $j = 0, \dots, d$ bezeichne $U_i(v)$ die Menge aller Nachbarn von v , deren Boxen 2^i Ecken von v enthalten.

Angenommen das Lemma gilt nicht. Sei G ein minimales Gegenbeispiel, \mathcal{R} eine Repräsentation von G , die die gewünschte Zerlegbarkeit nicht zuläßt. Wir werden jetzt die Kanten genauer betrachten, die in \mathcal{R} durch einen nicht eckenfreien Schnitt repräsentiert werden. Diese seien mit E' bezeichnet. Unsere bisherigen Erkenntnisse liefern: $|E'| \leq \sum_{v \in V(G)} (\frac{1}{2}|U_0(v)| + \sum_{j=1}^d |U_j(v)|)$. Da die Boxen, die einen Punkt p des Euklidischen Raumes enthalten in G eine Clique bilden, kann jede Ecke einer Box in höchstens $\omega(G) - 1$ anderen Boxen liegen. Es gilt also: $|U_0(v)| \leq 2^d(\omega(G) - 1)$. Diese Mächtigkeit kann $U_0(v)$ aber nur erreichen, wenn f. a. $j = 1, \dots, d : U_j(v) = \emptyset$ gilt. Für jedes $w \in U_k(v)$ reduziert sich die mögliche Mächtigkeit von $U_0(v)$ um 2^k . Es gilt also: $|U_0(v)| \leq 2^d(\omega(G) - 1) - \sum_{j=1}^d 2^j |U_j(v)|$. Betrachten wir nun zB den Knoten v , für den $\min(I_1^v)$ minimal ist, können die Ecken von Box_v der Gestalt $(\min(I_1^v), a_2, \dots, a_d)$ in keiner anderen Box enthalten sein. Also gilt für die $v \in V(G)$, die 'am Rand' der Boxrepräsentation liegen: $|U_0(v)| \leq 2^{d-1}(\omega(G) - 1) - \sum_{j=1}^d 2^j |U_j(v)|$. Das bedeutet für E' :

$$\begin{aligned} |E'| &\leq \sum_{v \in V(G)} \left(\frac{1}{2}|U_0(v)| + \sum_{j=1}^d |U_j(v)| \right) \\ &< \sum_{v \in V(G)} \left(2^{d-1}(\omega(G) - 1) - \sum_{j=1}^d 2^{j-1}|U_j(v)| + \sum_{j=1}^d |U_j(v)| \right) \\ &\leq n(G) 2^{d-1}(\omega(G) - 1) \end{aligned}$$

Mit $N'(v) := \{w \in N(v) \mid vw \in E'\}$ gilt andererseits aufgrund der Minimalität von G : f. a. $v \in V$: $|N'(v)| \geq 2^d(\omega(G) - 1)$. (Wäre das für ein v nicht der Fall, gäbe es ein G_i in der Aufteilung von $G \setminus v$, in dem auch durch das Einbeziehen von Box_v in \mathcal{R}_i nur eckenfreie Boxenschnitte vorhanden wären, also wäre die gewünschte Zerlegung schon für G möglich.) Daraus folgt: $|E'| = 1/2 \sum_{v \in V} |N'(v)| \geq n(G) 2^{d-1}(\omega(G) - 1)$ —Widerspruch. \square

Wir können also einen Rechteckgraphen in $4(\omega - 1)$ perfekte Subgraphen partitionieren und somit eine erste Schranke für die Chromatische Zahl von Rechteckgraphen angeben: $\chi^*(2\mathcal{BOX}, \omega) \leq 4(\omega - 1)\omega$, was dem Ergebnis von Asplund und Grünbaum in [2] entspricht. Angesichts der Dinge die noch kommen werden wollen wir unser Zwischenergebnis aber präziser formulieren:

Definition 3.8. $k(G)$ bezeichne das Minimum der Kreuzungstiefen über alle Boxrepräsentationen eines Rechteckgraphen G , wobei wir unter Kreuzungstiefe die maximale Anzahl sich paarweise eckenfrei schneidender Boxen verstehen.

Lemma 3.9. Für $G \in 2\mathcal{BOX}$ gilt:

$$\chi(G) \leq 4(\omega(G) - 1)k(G)$$

Bemerkung: Burling stellte in [3] einen vermeintlichen Beweis vor, der mit ähnlicher Vorgehensweise wie im Beweis von Lemma 3.7 zeigen sollte daß für $G \in 2\mathcal{BOX}$ gilt: $\chi(G) \leq (2\omega(G) - 1)\omega(G)$. Leider stellt sich bei genauerem Hinsehen heraus, daß seine Argumentation einen logischen Fehler enthält und der Beweis nicht haltbar ist.

Versuchen wir uns nun, dem Problem des Färbens von Rechteckgraphen über den Greedy First-Fit Algorithmus zu nähern, bzw. eine Anwendungsmöglichkeit für Lemma 2.1 zu finden (Lemma 2.1 besagt, daß wir die Färbungszahl eines Graphen mittels einer den minimalen Grad aller induzierten Subgraphen beschränkenden Funktion einschränken können). Der Knoten v des Graphen, für den die rechte Seite seiner Box am weitesten links liegt ist für die Untersuchung des minimalen Grades ein natürlicher Kandidat, da alle Nachbarn seine rechte Seite schneiden. Finden wir eine Funktion, die den Grad eines solchen Knotens (aufgrund seiner speziellen Lage in der Repräsentation) beschränkt, so stellt diese Funktion nicht nur eine Schranke für den minimalen Grad des untersuchten Graphen dar, sondern auch eine Schranke für den minimalen Grad aller induzierten Subgraphen, da natürlich jede durch einen induzierten Subgraphen induzierte Repräsentation eine Box in entsprechender Lage enthält.

Betrachten wir ein v mit $\max(I_1^v)$ minimal, können wir leider im Allgemeinen nur Aussagen über die Anzahl der Boxen machen, die einen der beiden Endpunkte der Rechten Seite enthalten, da in Abhängigkeit von ω allein beliebig viele 'niedrige' Boxen die rechte Seite schneiden können. Abhilfe schafft nur, die Klasse der zu betrachtenden Graphen einzuschränken, so daß eben nicht beliebig viele niedrige Boxen die rechte Seite schneiden können. Beschränken wir uns zB auf die Rechteckgraphen, die eine Repräsentation besitzen, in der keine Box die rechte Seite einer anderen Box schneidet, ohne einen Endpunkt derselben zu beinhalten, erhalten wir unmittelbar: $\delta(G) \leq 2(\omega(G) - 1)$, also mit Lemma 2.1: $\chi(G) \leq 2\omega(G) - 1$. Boxrepräsentationen dieser Art werden horizontal einfach, Repräsentationen, in der keine Box die obere Seite einer anderen Box schneidet, ohne auch einen Endpunkt dieser Seite zu beinhalten vertikal einfach genannt. Die Klassen von Graphen, die über horizontal bzw. vertikal einfache Repräsentationen definiert sind, sind identisch, und enthalten zB die Klasse der normierten Quadratgraphen. Wir zeigen nun, daß es möglich ist, von einer Rechteckrepräsentation \mathcal{R} eine horizontal einfache und eine vertikal einfache Boxenmenge so abzuspalten, daß die maximale Kreuzungstiefe

des Rests $\omega(G) - 2$ nicht übersteigt, so daß wir mit Lemma 3.9 schließen können: $\chi^*(2\mathcal{BO}\mathcal{X}, \omega) \leq 2(2\omega - 1) + 4(\omega - 1)(\omega - 2)$, also

Satz 3.10.

$$\chi^*(2\mathcal{BO}\mathcal{X}, \omega) \leq 4\omega^2 - 8\omega + 6$$

Beweis: Sei $G = (V, E) \in 2\mathcal{BO}\mathcal{X}$, $\omega = \omega(G)$, \mathcal{R} eine Repräsentation von G . Die Knoten von G seien mit v_1, \dots, v_n so bezeichnet, daß gilt: $i < j \Rightarrow \min(I_1^{v_i}) < \min(I_1^{v_j})$.

$V_1 := \{v_1\}$, und für $i < n$ sei

$$V_{i+1} := \begin{cases} V_i \cup \{v_{i+1}\} & \text{falls } \mathcal{R}[V_i \cup \{v_{i+1}\}] \text{ vertikal einfach} \\ V_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\mathcal{R}[V_n]$ ist eine vertikal einfache Repräsentation des induzierten Subgraphen $G[V_n] \subseteq G$.

$V' := V \setminus V_n = \{v'_1, \dots, v'_{n'}\}$ mit $i < j \Rightarrow \min(I_2^{v'_i}) < \min(I_2^{v'_j})$

$H_1 := \{v'_1\}$

$$H_{i+1} := \begin{cases} H_i \cup \{v'_{i+1}\} & \text{falls } \mathcal{R}[H_i \cup \{v'_{i+1}\}] \text{ horizontal einfach} \\ H_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachten wir nun den Graphen, der nach Abspalten der Knoten aus V_n und $H_{n'}$ übrig bleibt, also auf der Knotenmenge $V'' := V \setminus (V_n \cup H_{n'})$ basiert.

Angenommen, in V'' existieren Knoten $u_1, \dots, u_{\omega-1}$, so daß gilt: $i < j \Rightarrow I_2^{u_i} \subset I_2^{u_j}$ und $I_1^{u_j} \subset I_1^{u_i}$, also eine Kreuzung mit Tiefe $\omega - 1$ (siehe Abb. 4). Da $u_{\omega-1} \notin H_{n'}$ existiert ein $h \in H_{n'}$ mit $I_2^{u_{\omega-1}} \subset I_2^h$ und $\max(I_1^h) \in I_1^{u_{\omega-1}}$. Somit gilt f. a. $i \in \{1, \dots, \omega - 1\}$: $I_2^{u_i} \subset I_2^h$ und $I_1^{u_i} \cap I_1^h \neq \emptyset$, woraus folgt, daß $u_1, \dots, u_{\omega-1}, h$ eine ω -Clique bilden. Analog finden wir (ausgehend von u_1) ein $v \in V_n$ so daß $u_1, \dots, u_{\omega-1}, v$ eine ω -Clique bilden. Allerdings sind auch v und h benachbart: Wegen $I_2^v \cap I_2^{u_1} \neq \emptyset$ und $I_2^{u_1} \subset I_2^h$ folgt $I_2^v \cap I_2^h \neq \emptyset$, und aus $I_1^h \cap I_1^{u_1} \neq \emptyset$ und $I_1^{u_1} \subset I_1^v$ folgt $I_1^v \cap I_1^h \neq \emptyset$ — Widerspruch. \square

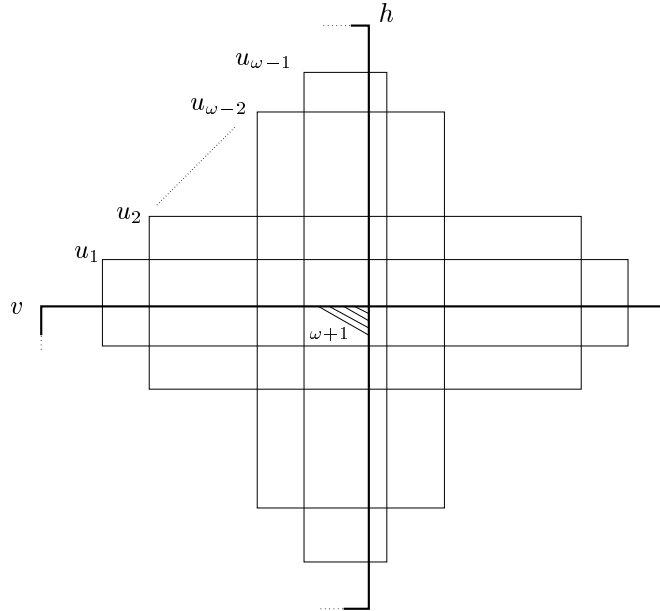


Abbildung 4: eine Kreuzung mit Tiefe $\omega - 1$ in $G[V'']$ hätte wegen der Boxen v und h eine $\omega + 1$ Clique in G zur Folge

So weit entfernt vom Optimum die gefundene Schranke auch sein mag, für dreiecksfreie Graphen ist sie scharf:

Satz 3.11.

$$\chi^*(2\mathcal{BO}\mathcal{X}, 2) = 6$$

Beweis: (Asplund & Grünbaum in [2]) Wir werden einen Graphen mit Cliquenzahl 2 konstruieren, für dessen Färbung 6 Farben benötigt werden. Als Grundbaustein wird der Graph in Abb. 5 dienen. Die in der Abbildung durch gepunktete

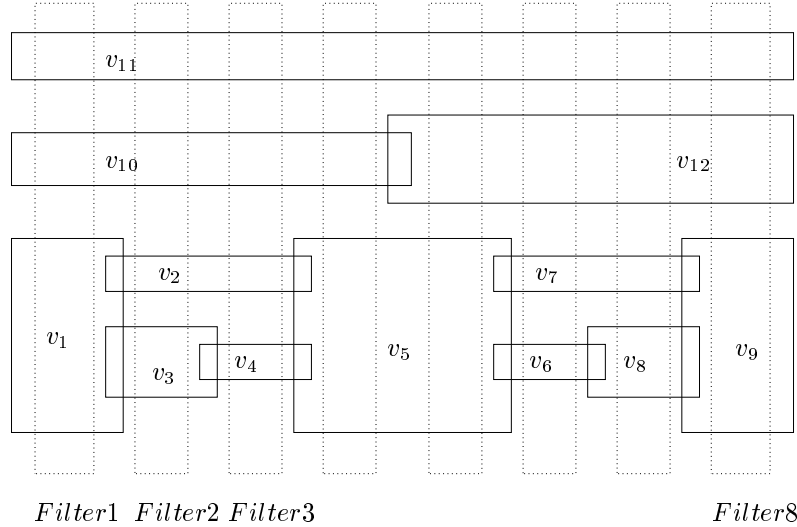


Abbildung 5:

Rechtecke markierten Bereiche wollen wir Filter nennen. Es gilt: Für alle Färbungen des Graphen enthält mindestens ein Filter mindestens drei Farben: Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die oberen beiden Boxen in Filter 1 unterschiedlich gefärbt sind (ansonsten beginnen wir unsere Betrachtungen mit Filter 8). Seien v_{10} und v_{11} also mit Farben 1 und 2 gefärbt. Enthält Filter 1 keine drei Farben, ist v_1 OE mit 1 gefärbt. Um in Filter 2 mit zwei Farben auszukommen, müssen v_2 und v_3 beide mit 2 gefärbt sein, was uns in Filter 3 zwingt, v_4 die Farbe 1 zuzuweisen, was wiederum dazu führt, daß wir spätestens in Filter 4 eine dritte Farbe hinzuziehen müssen. Nun zur Konstruktion des Graphen: Zunächst zeichnen wir 8^8 identische Kopien der Boxrepräsentation aus Abb. 5 vertikal übereinander. In den Schacht, der durch die jeweils ersten Filter dieser übereinandergestapelten horizontal ausgerichteten Grundgraphen entsteht, zeichnen wir eine um 90° gedrehte Kopie des Grundgraphen, und zwar so, daß in jedem Filter dieser vertikal ausgerichteten Kopie genau 8^7 der horizontalen Grundgraphen vertreten sind. In den Schacht, der durch die zweiten Filter der horizontalen Graphen gebildet wird, zeichnen wir 8 vertikal übereinandergestapelte Kopien des vertikalen Grundgraphen so, daß in jedem Filter dieser 8 Kopien genau 8^6 horizontale Grundgraphen vertreten sind. Auf diese Weise fahren wir mit der Konstruktion fort (in den i -ten Filterschicht 8^{i-1} übereinandergestapelte vertikale Kopien mit jeweils 8^{8-i} horizontalen Grundgraphen pro Filter). Der so konstruierte Graph hat Cliquenzahl 2, denn neue Schnitte von Boxen sind nur zwischen Boxen aus horizontal und vertikal ausgerichteten Kopien im Schnittbereich der Filter entstanden, und die Filterbereiche des Grundgraphen zeichnen sich dadurch aus, daß sie keine Boxenschnitte enthalten. (siehe Abb. 6). Desweiteren stellen wir fest, daß die Boxen, die an einem Schnitt zwischen einem horizontal und einem vertikal ausgerichteten

Grundgraphen beteiligt sind, einen vollständigen bipartiten Graphen induzieren. Nun zeigen wir, daß 6 Farben für eine gute Färbung des konstruierten Graphen

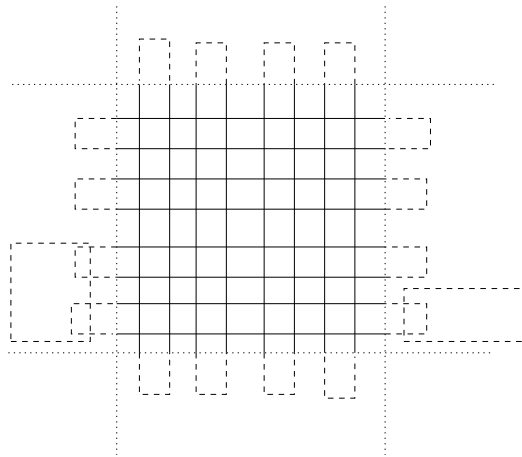


Abbildung 6: neue Boxenschnitte entstehen nur im Schnittbereich zweier Filter und können nicht zu einer 3-Clique führen

nötig sind: Nehmen wir an es existiert eine 5-Färbung. Der vertikale Graph im ersten Filterschicht hat ein Filter, in dem mindestens drei Farben vorkommen. Für die 8^7 horizontalen Graphen, die in diesem Filter vertreten sind, hat dies zur Folge, daß die Boxen in ihrem ersten Filter mit nur zwei Farben gefärbt sein dürfen. Betrachten wir nun die zweiten Filter dieser 8^7 horizontalen Graphen. Diese sind wieder auf die 8 Filter eines vertikalen Graphen im zweiten Filterschicht verteilt, einer der Filter des vertikalen Graphen muß mit drei Farben gefärbt sein, also wird durch unsere Annahme, mit fünf Farben auszukommen erzwungen, daß 8^6 der horizontalen Graphen in den ersten beiden Filtern mit nur zwei Farben auskommen. Führt man diese Argumentation in analoger Art fort, so endet man schließlich mit 8 horizontal ausgerichteten Graphen, die in Filtern 1 bis 7 mit jeweils nur zwei Farben auskommen, und deren 8. Filter sich je mit einem der acht Filter eines vertikal ausgerichteten Graphen kreuzen, woraus wir wieder schließen, daß für einen dieser acht horizontalen Graphen auch das 8. Filter mit nur zwei Farben auskommen muß—Widerspruch. \square

Nun wollen wir uns verschiedenen Subklassen von Boxgraphen zuwenden. Wie schon angedeutet, werden wir Einschränkungen suchen, die uns ermöglichen, den minimalen Grad eines Graphen zu begrenzen, indem wir verhindern, daß beliebig viele niedrige Boxen die Seite einer Box schneiden dürfen. Mit diesem Ziel haben wir schon die Klasse der horizontal/vertikal einfachen Graphen definiert. Doch auch nicht so extreme Restriktionen wie das grundsätzliche Verbot eines Boxenschnittes der Form, daß eine Box die rechte Seite einer anderen Box schneidet, ohne einen Endpunkt dieser Seite zu beinhalten, erlauben die gewünschte Beschränkung. Wir werden Graphenklassen betrachten, in denen das Seitenlängenverhältnis der Boxen beschränkt ist, und Graphenklassen, in denen die Unabhängigkeitszahl der Graphen beschränkt ist. Wir werden sehen, daß jede dieser Einschränkungen bei beliebiger Dimension zu (in ω) linearen oberen Schranken für die chromatische Zahl führt. Es ist erwähnenswert, daß eine Beschränkung der chromatischen Zahl in Abhängigkeit der Cliquenzahl *und* der Unabhängigkeitszahl für alle Graphen gegeben ist, denn für den maximalen Grad eines Graphen G (bezeichnet mit $\Delta(G)$) gilt, daß er kleiner als die Ramseyzahl von $\alpha(G) + 1$ und $\omega(G)$ ($\mathbf{R}(\alpha(G) + 1, \omega(G))$) ist: $\mathbf{R}(a, b)$ ist

die kleinste Zahl n , so daß jeder Graph auf n Knoten eine unabhängige Menge der Größe a oder eine Clique der Größe b enthalten muß. Hätte nun ein Knoten v von G mehr als $\mathbf{R}(\alpha(G)+1, \omega(G))$ Nachbarn, enthielte die Nachbarschaft von v , und somit auch G eine unabhängige Menge der Größe $\alpha(G)+1$, was unmöglich ist, oder die Nachbarschaft von v enthielte eine $\omega(G)$ Clique, was eine $\omega(G)+1$ Clique in G zur Folge hätte und somit ebenfalls unmöglich ist. Wir können also den Maximalgrad von G durch $\mathbf{R}(\alpha(G)+1, \omega(G))$, und somit wegen $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ die chromatische Zahl von G durch $\mathbf{R}(\alpha(G)+1, \omega(G))+1$ beschränken. Wie bei Ergebnissen aus der Ramseytheorie üblich ist diese Schranke wegen des unbekanntenen aber nachweislich großen Wachstumsverhaltens ($\mathbf{R}(p, p) \in \Omega(2^p)$) nur von geringem praktischen Interesse. Wir zeigen nun, daß für die Klasse der d -dimensionalen Boxgraphen, deren Unabhängigkeitszahl α nicht übersteigt (bezeichnet mit $d\mathcal{BO}\mathcal{X}_\alpha$) gilt:

Satz 3.12.

$$\chi^*(d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{\alpha, \omega}) \leq \alpha^{d-1}(\omega - (d-1)) + \sum_{i=0}^{d-2} \alpha^i$$

Beweis: durch Induktion über d

Für $d=1$ liegen Intervallgraphen vor und die Behauptung stimmt. Sei also $d > 1$, $G \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}_\alpha$ und eine Repräsentation \mathcal{R} gegeben. Betrachten wir den Knoten v , dessen rechter Endpunkt seines ersten Intervalls ($\max(I_1^v)$) minimal ist. Aufgrund dieser Eigenschaft muß für alle Nachbarn von v gelten, daß ihre ersten Intervalle den Punkt $\max(I_1^v)$ enthalten. Da also für alle Nachbarn von v gilt, daß ihre ersten Intervalle einen nichtleeren Schnitt haben, kann man die Adjazenz von Knoten aus $N(v)$ schon durch einen nichtleeren Schnitt der Intervallkomponenten $2, \dots, d$ beschreiben. Das wiederum bedeutet, daß gilt: $G[N(v)] \in (d-1)\mathcal{BO}\mathcal{X}_\alpha$. Außerdem wissen wir, daß $\omega(G[N(v)]) \leq \omega(G) - 1$ und können mit der Induktionshypothese für $G[N(v)]$ schließen:

$$\chi(G[N(v)]) \leq \chi^*((d-1)\mathcal{BO}\mathcal{X}_{\alpha, \omega(G)-1}) \leq \alpha^{d-2}(\omega(G) - 1 - (d-2)) + \sum_{i=0}^{d-3} \alpha^i$$

Mit der allgemeingültigen Ungleichung $\chi(G) \geq n(G)/\alpha(G)$ können wir nun den Grad von v in G beschränken. Es gilt:

$$\chi(G[N(v)]) \geq \frac{n(G[N(v)])}{\alpha(G[N(v)])} \geq \frac{n(G[N(v)])}{\alpha},$$

also

$$d_G(v) = n(G[N(v)]) \leq \alpha \chi(G[N(v)]) \leq \alpha^{d-1}(\omega(G) - (d-1)) + \sum_{i=1}^{d-2} \alpha^i$$

Da wir auch in jedem induzierten Subgraphen von G einen Knoten mit einem so eingeschränkten Grad finden, folgt mit Lemma 2.1 die Behauptung. \square

Bemerkung: Beim Anwenden der Induktionshypothese ist nicht nur d , sondern auch ω um eins reduziert ist. Das führt dazu, daß im Fall $\omega < d$ der nicht mehr reduzierbare Fall ($\omega = 1$) in den einem induktiven Beweis zugrundeliegenden Folgeungssequenzen schon eintritt, bevor wir die Dimensionen 'abgearbeitet' haben. Daher können wir für $\omega < d$ die Färbungszahl durch $\sum_{i=0}^{\omega-1} \alpha^i$ beschränken, wobei sich der Beweis lediglich dadurch vom obigen Beweis unterscheidet, daß wir die Induktion nicht über d , sondern über ω führen.

Nun betrachten wir die Klassen der d -dimensionalen Boxgraphen G , die Repräsentationen besitzen, so daß für gegebene Konstanten $r_2, \dots, r_d \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{f. a. } i = 2 \dots d : \frac{\max_{v \in V(G)} |I_i^v|}{\min_{v \in V(G)} |I_i^v|} \leq r_i,$$

also die Klasse der d -Boxgraphen mit Repräsentationen, in denen das Seitenverhältnis aller Knoten in mindestens allen bis auf die erste Dimension beschränkt ist. Diese Klasse bezeichnen wir mit $d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r_2, \dots, r_d)}$.

Lemma 3.13. *für $G \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r_2, \dots, r_d)}$ gilt:*

$$\chi(G) \leq (\omega(G) - 1) \prod_{i=2}^d (r_i + 1) + 1$$

Beweis: Seien $G = (V, E) \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r_2, \dots, r_d)}$ mit $\omega(G) = \omega$ und eine entsprechende Repräsentation gegeben. Max_i bezeichne die Länge der längsten Seite in Dimension i ($\max_{v \in V} |I_i^v|$), Min_i die Länge der kürzesten.

Auf der Suche nach einem Knoten mit durch eine Funktion in ω begrenzbarem Grad wählen wir wieder das v mit minimalem $\max(I_1^v)$, wodurch gewährleistet ist, daß für alle Nachbarn w von v gilt: $\max(I_1^w) \in I_1^v$. Installieren wir nun in dem $d-1$ dimensionalen Teilraum $T := \max(I_1^v) \times \mathbb{R}^{d-1}$ ein Punktgitter, bei dem der Abstand der Punkte in Dimension i der minimal vorkommenden Seitenlänge aller Boxen in Dimension i (also Min_i) entspricht, müssen alle Boxen der mit v benachbarten Knoten mindestens einen Punkt des Gitters enthalten. Um dieses zu gewährleisten, muß sich das Gitter nicht über den ganzen Teilraum T erstrecken, sondern lediglich den Schnitt von T mit Box_v umfassen. Da wir eine Repräsentation betrachten, in der das Verhältnis von maximaler zu minimaler Seitenlänge in Dimension i durch r_i beschränkt ist, gilt für die Seitenlängen von Box_v : $|I_i^v| \leq r_i Min_i$ ($i = 2, \dots, d$). Also sind die Seitenlängen von Box_v in Dimension i höchstens r_i mal so groß wie die Abstände im Punktgitter in Dimension i , das heißt, daß das Gitter, um den Schnitt von T und Box_v zu umfassen, nicht mehr als $\prod_{i=2}^d (r_i + 1)$ Punkte benötigt. Betrachte z.B. das Gitter, das aus dem direkten Produkt der folgenden Punktmen-gen entsteht:

$$P^1 := \{\max(I_1^v)\}$$

$$i = 2, \dots, d : P^i := \{p_k^i \mid p_k^i = \min(I_i^v) + k Min_i, k = 0, \dots, r_i\}.$$

Da die Boxen, die einen Punkt p enthalten eine Clique bilden, gilt, daß maximal ω Boxen einen Punkt enthalten können, womit schon mal klar ist, daß die Nachbarschaft von v auf $\omega \prod_{i=2}^d (r_i + 1)$ Knoten beschränkt ist. Da Box_v selbst schon fast alle relevanten Punkte enthält, ist noch eine Verbesserung möglich. Box_v enthält nur *fast* alle relevanten Punkte, da die Punkte, die nicht in Box_v liegen und zwischen ihnen und dem Rand von Box_v kein weiterer Punkt des Gitters liegt benötigt werden, um zu garantieren, daß alle Nachbarn von v einen Punkt des Gitters enthalten. Dieses Problem können wir aber leicht beseitigen, indem wir in den Punktmen-gen P^i den Punkt $\min(I_i^v) + r_i Min_i$ durch $\max(I_i^v)$ ersetzen (siehe Abb. 8).

Nun gilt, daß Box_v alle relevanten Punkte enthält (soll heißen: alle Nachbarboxen von Box_v enthalten einen Punkt des Gitters, der in Box_v liegt), also kann jeder dieser Punkte nur noch in maximal $\omega - 1$ Nachbarboxen enthalten sein, woraus $d_G(v) \leq (\omega - 1) \prod_{i=2}^d (r_i + 1)$ folgt. Da wir für alle Induzierten Subgraphen von G auf analoge Art einen Knoten mit so beschränktem Grad finden, folgt mit Lemma 2.1: $\chi(G) \leq (\omega(G) - 1) \prod_{i=2}^d (r_i + 1) + 1$. \square

Nun ist dieses Ergebnis nur für kleine r_i eine Verbesserung des Ergebnisses von Ewa Malesinska, die diese Klasse von Boxgraphen (zumindest für $d = 2$) in [16]

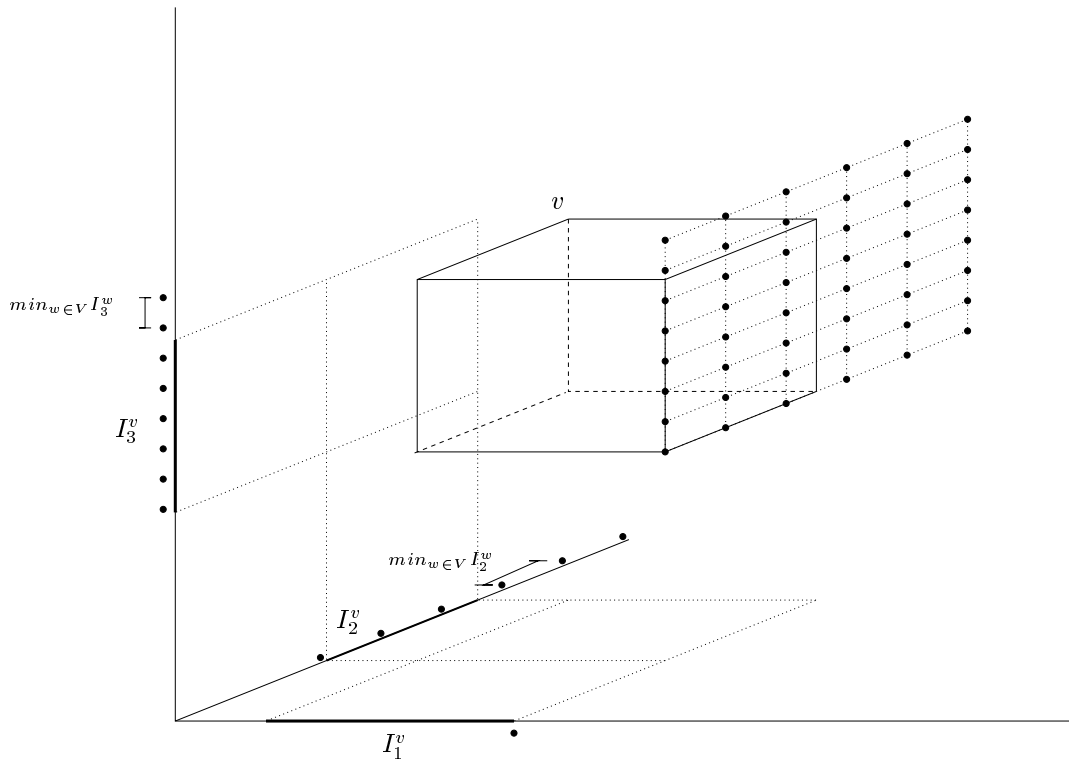


Abbildung 7: Eine mit v benachbarte Box muß einen Punkt des Gitters enthalten

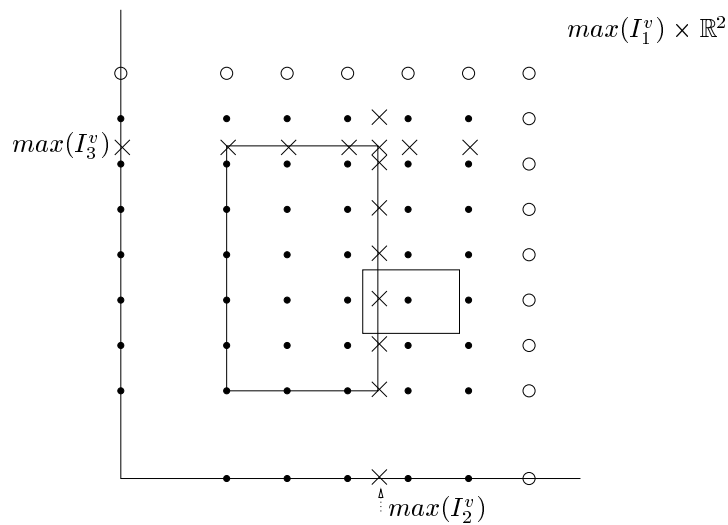


Abbildung 8: Eine mit v benachbarte Box enthält einen Punkt des modifizierten Gitters, der in Box_v liegt

eingeführt hat. In Ihrem Ansatz wird ein Rechteckgraph in Subgraphen zerlegt, die ein Seitenlängenverhältnis kleiner gleich zwei haben, um diese dann in Streifen aufzuteilen, die je einen Intervallgraphen induzieren. Aufgrund dieser Vorgehensweise gibt sie für Rechteckgraphen eine Schranke von $3(\log_2(r) + 1)\omega$ an. Auch wir partitionieren nun die Knotenmenge, so daß das Seitenlängenverhältnis der Boxen der Knoten in jeder Teilmenge durch zwei begrenzt ist. Mit obigem Lemma, welches ja gerade für kleine Seitenlängenverhältnisse gute Werte liefert, erhalten wir (neben der Verallgemeinerung auf d -dimensionale Boxgraphen) folgende Verbesserung:

Lemma 3.14. *Für $G \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r_2, \dots, r_d)}$ gilt:*

$$\chi(G) \leq \left(\prod_{i=2}^d \max\{1, \lceil \log_2(r_i) \rceil\} \right) (3^{d-1}(\omega(G) - 1) + 1)$$

Beweis: Sei $G = (V, E) \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r_2, \dots, r_d)}$, \mathcal{R} eine Repräsentation von G . Max_i bezeichne die größte Seitenlänge in Dimension i . Die Partitionierung des Graphen in Subgraphen, deren maximales Seitenverhältnis kleiner gleich 2 ist, nehmen wir (kanonisch) wie folgt vor:

für $j_i \in \{1, \dots, \max\{1, \lceil \log_2(r_i) \rceil\}\}$ ($i = 2, \dots, d$), sei

$$V_{(j_2, \dots, j_d)} := \{v \in V \mid \frac{Max_i}{2^{j_i}} \leq |I_i^v| < \frac{Max_i}{2^{j_i-1}}, i = 2, \dots, d\},$$

wobei im Fall $j_i = 1$ das Kleinerzeichen durch \leq zu ersetzen ist. G ist nun vollständig in maximal $\prod_{i=2}^d \max\{1, \lceil \log_2(r_i) \rceil\}$ Subgraphen aufgeteilt, wobei jeder dieser Subgraphen zur Klasse $d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(2, \dots, 2)}$ gehört, also gilt mit Lemma 3.13:

$$\chi(G) \leq \left(\prod_{i=2}^d \max\{1, \lceil \log_2(r_i) \rceil\} \right) \chi^*(d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(2, \dots, 2)}, \omega(G)),$$

also

$$\chi(G) \leq \left(\prod_{i=2}^d \max\{1, \lceil \log_2(r_i) \rceil\} \right) (3^{d-1}(\omega(G) - 1) + 1).$$

□

Eine weitere Optimierung der Methode ist noch für den Spezialfall möglich, daß die Werte r_i in einigen Dimensionen gleich eins sind, sich also die Seitenlängen der Boxen in diesen Richtungen nicht unterscheiden. Dieser Fall wird in Lemma 3.14 nur soweit berücksichtigt, daß keine Aufteilung des Graphen in diesen Dimensionen vorgenommen wird. Die Optimierungsmöglichkeit besteht nun darin, die gefundenen Subgraphen nicht pauschal $d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(2, \dots, 2)}$ zuzuordnen, sondern $d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r'_2, \dots, r'_d)}$ mit $r'_i = \min\{2, r_i\}$, so daß wir insgesamt haben:

Satz 3.15. *Mit $d_1 := |\{r_i \mid r_i = 1, i = 2, \dots, d\}|$ gilt:*

$$\chi^*(d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r_2, \dots, r_d)}, \omega) \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \left(\prod_{i=2}^d \max\{1, \lceil \log_2(r_i) \rceil\} \right) (2^{d_1} 3^{d-1-d_1}(\omega - 1) + 1) \\ \left(\prod_{i=2}^d (r_i + 1) \right) (\omega - 1) + 1 \end{array} \right.$$

Wie oben schon erwähnt, hatte Ewa Malesinska eine Möglichkeit gefunden, Rechteckgraphen aus $2\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r)}$ in Intervallgraphen aufzusplitten. Wir werden nun in einem analogen Verfahren zeigen, daß es möglich ist, d Boxgraphen, deren Seitenverhältnisse in mindestens allen bis auf *zwei* Dimensionen eingeschränkt sind ($d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r_3, \dots, r_d)}$), in Rechteckgraphen aufzuteilen und auf diesem Weg eine obere Schranke für die chromatische Zahl dieser Graphen in Abhängigkeit von ω anzugeben:

Satz 3.16.

$$\chi^*(d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r_3, \dots, r_d)}, \omega) \leq 3^{d-2} \chi^*(2\mathcal{BO}\mathcal{X}, \omega) \prod_{i=3}^d \max\{1, \lceil \log_2(r_i) \rceil\}$$

Beweis: Sei $G = (V, E) \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}_{(r_3, \dots, r_d)}$ und eine entsprechende Repräsentation \mathcal{R} fest gewählt, $Max_i := \max_{v \in V} |I_i^v|$. Wie im Beweis von Lemma 3.14 partitionieren wir zunächst G in Subgraphen $G[V_{(j_3, \dots, j_d)}]$, deren Seitenlängenverhältnis in Richtung $3, \dots, d$ durch zwei begrenzt ist. Es sei also für $j_i \in \{1, \dots, \max\{1, \lceil \log_2(r_i) \rceil\}\}$, ($3 \leq i \leq d$)

$$V_{(j_3, \dots, j_d)} := \{v \in V : \frac{Max_i}{2^{j_i}} \leq |I_i^v| < \frac{Max_i}{2^{j_i-1}}, i = 3, \dots, d\},$$

wobei wieder für $j_i = 1$ das Kleinerzeichen durch \leq zu ersetzen ist.

Betrachten wir ein $\mathcal{R}[V_{(j_3, \dots, j_d)}]$ mit Seitenlängenverhältnis kleinergleich 2 in den Dimensionen $3, \dots, d$. Wir partitionieren den Euklidischen Raum in Teilräume, deren Breite in Richtung i ($3 \leq i \leq d$) $Max_i/2^{j_i}$ beträgt, also kleinergleich der minimal in $\mathcal{R}[V_{(j_3, \dots, j_d)}]$ vorkommenden Seitenlänge in Richtung i ist: Für $l_i \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_{(l_3, \dots, l_d)} := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid l_i \frac{Max_i}{2^{j_i}} < x_i \leq (l_i + 1) \frac{Max_i}{2^{j_i}}, i = 3, \dots, d\}.$$

Für jeden dieser Teilräume $T_{(l_3, \dots, l_d)}$ betrachten wir nun den Graphen, der durch die Boxen, deren Ecke 'unten links' in $T_{(l_3, \dots, l_d)}$ liegt, also durch die Knotenmenge

$$V_{(j_3, \dots, j_d)}^{(l_3, \dots, l_d)} := \{v \in V_{(j_3, \dots, j_d)} \mid (\min(I_1^v), \dots, \min(I_d^v)) \in T_{(l_3, \dots, l_d)}\}$$

induziert wird. Da die Breite des Teilraumes in Richtung i ($3 \leq i \leq d$) kleinergleich der minimalen Länge der Intervalle I_i^v für $v \in V_{(j_3, \dots, j_d)}$ ist, gilt:

$$\text{f. a. } v, w \in V_{(j_3, \dots, j_d)}^{(l_3, \dots, l_d)}, \text{ f. a. } i = 3, \dots, d : I_i^v \cap I_i^w \neq \emptyset,$$

so daß die Adjazenzrelation in $G[V_{(j_3, \dots, j_d)}^{(l_3, \dots, l_d)}]$ vollständig durch einen nichtleeren Schnitt der Intervalle in Dimension 1 und 2 beschrieben wird. Das heißt, es liegt ein Rechteckgraph vor.

Da die maximale Intervalllänge in Dimension i höchstens die doppelte Teilraumbreite in Richtung i beträgt ($3 \leq i \leq d$), kann jede Box nur bis in den übernächsten Teilraum hineinragen, weshalb Schnitte zwischen Boxen, die zu Teilräumen gehören, die in einer Richtung mindestens zwei Teilräume zwischen sich haben, unmöglich sind. Präzise:

$$\text{f. a. } v \in V_{(j_3, \dots, j_d)}^{(l_3, \dots, l_d)} \text{ f. a. } v' \in V_{(j_3, \dots, j_d)}^{(l'_3, \dots, l'_d)} :$$

$$Box_v \cap Box_{v'} \neq \emptyset \Rightarrow \text{f. a. } i (3 \leq i \leq d) : |l_i - l'_i| \leq 2$$

Vereinigen wir nun die Knotenmengen, die Teilräumen zugeordnet sind, die je einen Abstand von mindestens 3 in einer Richtung haben, so ist der durch diese Menge induzierte Subgraph eine disjunkte Vereinigung von Rechteckgraphen, und somit selbst ein Rechteckgraph. Wir können also $G[V_{(j_3, \dots, j_d)}]$ in 3^{d-2} Rechteckgraphen

$$G\left[\bigcup_{e_3, \dots, e_d \in \mathbb{Z}} V_{(j_3, \dots, j_d)}^{(k_3+3e_3, \dots, k_d+3e_d)}\right], \quad k_3, \dots, k_d \in \{0, 1, 2\}$$

partitionieren. Somit gilt:

$$\chi(G[V_{(j_3, \dots, j_d)}]) \leq 3^{d-2} \chi^*(2\mathcal{BO}\mathcal{X}, \omega(G[V_{(j_3, \dots, j_d)}]))$$

Aufsummieren über alle $G[V_{(j_3, \dots, j_d)}]$ liefert die Behauptung. \square

Abschließend ist noch Anzumerken, daß $d\mathcal{BO}\mathcal{X}$ -Graphen mit eingeschränktem Seitenverhältnis für alle bis auf 3 Dimensionen eine Oberklasse von $3\mathcal{BO}\mathcal{X}$ bilden, also keine Beschränkung des Verhältnisses von chromatischer Zahl zur Cliquenzahl gegeben ist.

Eine weitere Möglichkeit, die zu betrachtende Klasse von Boxgraphen einzuschränken, indem man dem Verhältnis von Seitenlängen eine Schranke zuweist, besteht darin, die Seitenlängen in den d Richtungen jeder einzelnen Box ins Verhältnis zu setzen, und dieses Seitenverhältnis zu begrenzen. Wir betrachten also für Konstanten $c_2^1, c_2^2, \dots, c_d^1, c_d^2$ Klassen von Graphen G , für die eine d -Boxrepräsentation existiert, so daß gilt: f. a. $v \in V(G)$, f. a. $i = 2, \dots, d$: $c_i^2 \leq |I_i^v|/|I_1^v| \leq c_i^1$. Es ist klar, daß man durch Strecken bzw. Stauchen der Repräsentation in Dimension i mit Faktor $1/c_i^2$ erreichen kann, daß die untere Schranke immer 1 beträgt. Wir bezeichnen mit $d\mathcal{BO}\mathcal{X}^{(c_2, \dots, c_d)}$ also die Klasse von Graphen, für die eine d Boxrepräsentation existiert, so daß für alle Knoten v gilt: $1 \leq |I_i^v|/|I_1^v| \leq c_i$ ($i = 2, \dots, d$). Sei nun $G = (V, E) \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}^{(c_2, \dots, c_d)}$, \mathcal{R} eine Repräsentation, und begeben wir uns wieder auf die Suche nach einem Knoten, dessen Grad wir (in Abhängigkeit von ω) möglichst klein begrenzen können. Wählen wir v , so daß $|I_1^v|$ minimal ist, können wir folgendes feststellen:

- Alle Nachbarn von v müssen in ihrem ersten Intervall einen Endpunkt des Intervalls I_1^v enthalten.
- Es gilt: f. a. $w \in V$: $|I_i^w| \geq |I_1^w| \geq |I_1^v| \geq |I_i^v|/c_i$, also $|I_i^v| \leq c_i |I_i^w|$.
Das heißt, daß die Seitenlänge von Box_v in Richtung i höchstens das c_i -fache der minimal vorkommenden Seitenlänge in Richtung i ($=: Min_i$) beträgt.

Dadurch ist es uns möglich, ein analoges Verfahren wie im Beweis von Lemma 3.13 anzuwenden. Dieses mal müssen wir lediglich das Punktgitter nicht nur in dem Teilraum $max(I_1^v) \times \mathbb{R}^{d-1}$, sondern auch in dem Teilraum $min(I_1^v) \times \mathbb{R}^{d-1}$ installieren. Es sei also

$P^1 := \{min(I_1^v), max(I_1^v)\}$, und für $i = 2, \dots, d$ sei

$P^i := \{p_k^i \mid p_k^i = min(I_i^v) + k Min_i, \quad k = 0, \dots, \lceil c_j \rceil - 1\} \cup \{max(I_i^v)\}$.

Wieder gilt, daß alle Nachbarboxen von Box_v einen Punkt aus $\mathbf{X}_{i=1}^d P^i$ enthalten, der auch in Box_v enthalten ist, woraus wir wieder schließen können:

$$d_G(v) \leq (\omega - 1)2 \prod_{j=2}^d (\lceil c_j \rceil + 1)$$

Mit Lemma 2.1 haben wir also:

$$\chi(G) \leq 1 + (\omega - 1)2 \prod_{j=2}^d (\lceil c_j \rceil + 1)$$

Auch dieses Ergebnis können wir für große c_i wieder verbessern, indem wir den Graphen in Subgraphen partitionieren, in denen die Varianz der Seitenlängenverhältnisse durch 2 beschränkt ist:

Satz 3.17. *Mit $d_1 := |\{c_j \mid c_j = 1, j = 2, \dots, d\}|$ gilt:*

$$\chi^*(d\mathcal{BO}\mathcal{X}^{(c_2, \dots, c_d)}, \omega) \leq \min \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2(\omega - 1) \prod_{j=2}^d (\lceil c_j \rceil + 1) \\ (2^{d_1} 3^{d-1-d_1} 2^{(\omega - 1) + 1}) \prod_{j=2}^d \max\{1, \lceil \log_2(c_j) \rceil\} \end{array} \right\}$$

Beweis Seien $G = (V, E) \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}^{(c_2, \dots, c_d)}$ und eine entsprechende Repräsentation gegeben.

Wir partitionieren G in Subgraphen, bei denen die Verhältnisse von Seitenlänge i zu Seitenlänge 1 in einem Wertebereich liegen, die uns ermöglichen, durch Strecken oder Stauchen der entsprechenden Subrepräsentationen zu erreichen, daß die Seitenlängenverhältnisse in den gestreckten Subrepräsentationen größer als eins und kleiner als zwei sind: Für

$j_i \in \{1, \dots, \max\{1, \lceil \log_2(c_i) \rceil\}\}$ ($i = 2, \dots, d$) sei

$$V_{(j_2, \dots, j_d)} := \{v \mid \frac{c_i}{2^{j_i}} \leq \frac{|I_i^v|}{|I_1^v|} < \frac{c_i}{2^{j_i-1}}, i = 2, \dots, d\}$$

Ersetzen wir wieder das Kleinerzeichen für $i_j = 1$ durch \leq , so stellt dies eine vollständige Partitionierung von V dar. Strecken wir nun die Repräsentationen $\mathcal{R}[V_{(j_2, \dots, j_d)}]$ in Richtung i mit Faktor $2^{j_i}/c_i$ gilt für diese modifizierten Repräsentationen $\hat{\mathcal{R}}[V_{(j_2, \dots, j_d)}] : \text{f. a. } v \in V_{(j_2, \dots, j_d)} \text{ f. a. } i = 2, \dots, d : 1 \leq |\hat{I}_i^v|/|\hat{I}_1^v| \leq 2$. $G[V_{(j_2, \dots, j_d)}]$ liegt also in $d\mathcal{BO}\mathcal{X}^{(2, \dots, 2)}$. Berücksichtigen wir wieder die Fälle, daß schon in der ursprünglichen Repräsentation in einigen Dimensionen keine Seitenlängenunterschiede im Vergleich zur ersten Dimension bestanden (also $c_i = 1$), haben wir $G[V_{(j_2, \dots, j_d)}] \in d\mathcal{BO}\mathcal{X}^{(c'_2, \dots, c'_d)}$ mit $c'_j = \min\{c_j, 2\}$. Mit der schon gefundenen Schranke für $d\mathcal{BO}\mathcal{X}^{(c_2, \dots, c_d)}$ Graphen gilt also für $d_1 := |\{c_i \mid c_i = 1, i = 2, \dots, d\}| :$

$$\chi(G[V_{(j_2, \dots, j_d)}]) \leq 2^{d_1} 3^{d-1-d_1} 2^{(\omega(G) - 1) + 1}$$

Aufsummieren über alle $G[V_{(j_2, \dots, j_d)}]$ liefert:

$$\chi(G) \leq (2^{d_1} 3^{d-1-d_1} 2^{(\omega(G) - 1) + 1}) \prod_{i=2}^d \max\{1, \lceil \log_2(c_i) \rceil\}$$

□

Für d dimensionale Quadratgraphen (also Graphen aus $d\mathcal{BO}\mathcal{X}^{(1, \dots, 1)}$) gilt, daß sich zwei Boxen nicht eckenfrei schneiden können. Lemma 3.7 besagt somit, daß sich diese Graphen in $2^d(\omega - 1)$ unabhängige Mengen zerlegen lassen, also ist für diesen Fall eine Verbesserung um 1 möglich: $\chi^*(d\mathcal{BO}\mathcal{X}^{(1, \dots, 1)}, \omega) \leq 2^d(\omega - 1)$

4 Vereinigungen von Intervallgraphen

In diesem Kapitel wollen wir 2 Klassen von Graphen betrachten: Zum einen die Klasse von Graphen, die durch die Vereinigung von maximal t Intervallgraphen beschrieben werden können, also $\mathfrak{U}^t \mathcal{INT}$. Eine natürliche Repräsentation der Graphen dieser Klasse ist gegeben durch t reelle Achsen $\mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_t$ und eine V repräsentierende Familie von t -Intervalltupeln $((I_1^v, \dots, I_t^v))_{v \in V}$, mit $I_i^v \subset \mathbb{R}_i$, wobei die Adjazenzrelation in dieser Repräsentation durch die Formel $\phi(u, v) = \text{ex. } i : I_i^u \cap I_i^v \neq \emptyset$ gegeben ist. Die zweite Klasse von Graphen, die sogenannten Mehrfachintervallgraphen sind auch das Ergebnis einer Vereinigungsoperation, allerdings nicht im herkömmlichen Sinn: $t\mathcal{MIN}\mathcal{T}$ bezeichne die Klasse von Graphen $G = (V, E)$, die durch Schnittrepräsentationen $(\mathbb{R}, (M_v)_{v \in V}, \phi)$ repräsentierbar sind, wobei M_v (bezeichnet als Mehrfachintervall) aus der Vereinigung von maximal t Intervallen besteht, und $\phi(u, v) = M_u \cap M_v \neq \emptyset$ ist. Äquivalent dazu, und meist besser zu handhaben sind die Repräsentationen, die auf t -Intervalltupeln $(\mathbf{I}_v)_{v \in V}$ beruhen, wobei die

'Adjazenzformel' dann wie folgt lautet: $\phi(u, v) = \text{ex. } i \text{ ex. } j : I_i^u \cap I_j^v \neq \emptyset$. Wir werden wieder nach belieben zwischen der Intervalltupel und Teilmengenrepräsentation wechseln, je nachdem, welche gerade für unsere Formulierungen am dienlichsten ist. Die Klasse $\Psi^t \mathcal{INT}$ ist eine Subklasse von $tMINT$: wir können eine Repräsentation eines Graphen aus $\Psi^t \mathcal{INT}$ in eine Repräsentation für $tMINT$ überführen, ohne den zugrundeliegenden Graphen zu verändern, indem wir die benutzten Bereiche der Achsen $\mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_t$ nebeneinander auf einer reellen Achse plazieren. Schnitte von Intervallen mit unterschiedlichem Index sind somit ausgeschlossen, und die zu dieser $tMINT$ Darstellung gehörende Adjazenzformel liefert dieselben Kanten wie die ursprüngliche $\Psi^t \mathcal{INT}$ Darstellung.

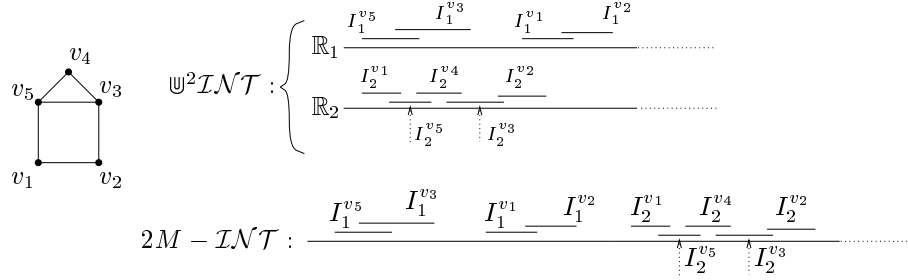


Abbildung 9:

4.1 $\chi^*(\Psi^t \mathcal{INT}, \alpha), \chi^*(tMINT, \alpha)$

Mit Lemma 2.5 läßt sich unmittelbar die Schranke ω^t für die chromatische Zahl von $\Psi^t \mathcal{INT}$ Graphen angeben. Es lohnt aber die Mühe, etwas genauer hinzuschauen:

Satz 4.1. [6]

$$\chi^*(\Psi^t \mathcal{INT}, \omega) \leq \chi^*(tMINT, \omega) \leq 2t(\omega - 1)$$

Beweis: Sei $G = (V, E) \in tMINT$. Die bisher häufig angewandte Methode, die Existenz eines Knotens mit einem aufgrund seiner Lage in der Repräsentation durch ω ausdrückbaren Grad zu garantieren, scheint hier nicht zu greifen - die Konstellationen, die zu einer Nachbarschaft führen sind zu vielfältig. Anders verhält es sich, wenn wir versuchen, eine Orientierung des Graphen zu finden, die einen in Termen von ω begrenzten maximalen Ausgangsgrad liefert: Wir orientieren den Graphen so, daß gilt: $(u, v) \in \vec{E} \Rightarrow \text{ex. } i, j : \max(I_i^u) \in I_j^v$. Da die Mehrfachintervalle, die einen Punkt $p \in \mathbb{R}$ enthalten, eine Clique bilden, kann es für das Maximum eines Intervalls eines Knotens höchstens $(\omega(G) - 1)$ andere Knoten geben, deren Mehrfachintervalle dieses Maximum enthalten. Somit gilt für den maximalen Ausgangsgrad des orientierten Graphen: $\Delta^+(G) \leq t(\omega(G) - 1)$. Nicht alle Knoten kommen für einen so hohen Ausgangsgrad in Frage: Betrachten wir den Knoten v , dessen Mehrfachintervall M_v den maximalen Punkt p aller in der Repräsentation verwendeten Intervalle enthält. Das Intervall I_i^v , dessen Maximum p ist, kann keinen Beitrag zum Ausgangsgrad liefern, also gilt: $d^+(v) \leq (t - 1)(\omega(G) - 1) < t(\omega(G) - 1)$. Mit Lemma 2.3 folgt die Behauptung. \square

4.2 $\theta^*(\Psi^t \mathcal{INT}, \omega), \theta^*(tMINT, \omega)$

Nun zur Cliquesüberdeckungszahl. Zunächst betrachten wir die Klasse $\Psi^t \mathcal{INT}$. Da das Komplement eines Intervallgraphen in der Klasse der Vergleichbarkeitsgraphen (VER) liegt, können wir mit Lemma 2.6 χ -Schranken von der Klasse der Graphen,

die als Schnitt von t Vergleichbarkeitsgraphen darstellbar sind als θ -Schranken für $\Psi^t \mathcal{INT}$ übernehmen. Es gilt:

Satz 4.2. [7]

$$\chi^*(\cap^t \mathcal{VER}, \omega) \leq \chi^*(\Psi^{2^{t-1}} \mathcal{VER}, \omega) \leq \omega^{2^{t-1}}$$

Beweis: Sei $G = (V, E) = \cap_{i=1}^t G_i$ mit $G_i \in \mathcal{VER}$. \vec{E}_i sei transitive Orientierung der Kanten von G_i , und \vec{E} sei eine an \vec{E}_t angelehnte Orientierung der Kanten aus G (also $\vec{E} \subseteq \vec{E}_t$).

Nun Partitionieren wir \vec{E} in Mengen \vec{E}^a

mit $a \in A := \{(x_1, \dots, x_{t-1}) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$, wie folgt:

Für $(u, v) \in \vec{E}$ sei $(u, v) \in \vec{E}^a \Leftrightarrow$

$$\text{f. a. } i \in \{1, \dots, t-1\} : \begin{cases} (a_i = 1 \Rightarrow (u, v) \in \vec{E}_i) & \& \\ (a_i = 0 \Rightarrow (v, u) \in \vec{E}_i) \end{cases}$$

Für jeden $\{0, 1\}$ -Vektor a ist $G[\vec{E}^a]$ ein transitiv orientierter Graph, denn für $(u, v), (v, w) \in \vec{E}^a$ sind die Kanten uv und vw in jedem der orientierten Graphen \vec{G}_i ($i = 1, \dots, t$) entweder als (u, v) und (v, w) , oder als (w, v) und (v, u) vertreten. Da die \vec{G}_i transitiv orientiert sind, ist in jedem \vec{G}_i auch die gerichtete Kante (u, w) bzw. (w, u) vertreten. \vec{E}^a ist so konstruiert, daß es nun auch die gerichtete Kante (u, w) enthalten muß.

G ist also als Vereinigung von 2^{t-1} Vergleichbarkeitsgraphen darstellbar: $G = \bigcup_{a \in A} G[\vec{E}^a]$. Da die Cliquenzahl eines kanteninduzierten Subgraphen nicht größer sein kann, als die des ursprünglichen, folgt mit Lemma 2.5: $\chi(G) \leq \prod_{a \in A} \chi(G[\vec{E}^a]) \leq \omega(G)^{2^{t-1}}$ \square

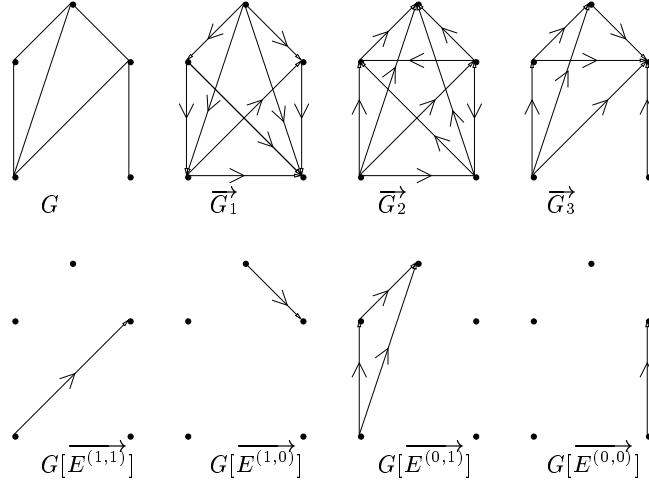


Abbildung 10: $G = G_1 \cap G_2 \cap G_3 = G[E^{(1,1)}] \cup G[E^{(1,0)}] \cup G[E^{(0,1)}] \cup G[E^{(0,0)}]$

Lemma 2.6 liefert

Corollar 4.3.

$$\theta^*(\Psi^t \mathcal{INT}, \alpha) \leq \alpha^{2^{t-1}}$$

Die Suche nach einer Schranke für die Cliquenüberdeckungsanzahl für $t\mathcal{INT}$ erweist sich als wesentlich komplizierter, aber immerhin ist es möglich eine solche Schranke in Abhängigkeit von der Unabhängigkeitszahl anzugeben.

Bei der Untersuchung von geometrischen Repräsentationen von Graphen stößt man auf Größen, die sich nur auf eine Repräsentation, nicht aber auf den repräsentierten Graphen beziehen. Im Kapitel über Boxgraphen hatten wir zB die Objekte E' und $N'(v)$ betrachtet, die auf speziellen Schnitten von Boxen beruhten, und somit von einer gegebenen Repräsentation abhängig waren, nicht aber vom zugrundeliegenden Graphen. Ein weiteres Beispiel ist die Kreuzungstiefe. Hier ist es möglich, den Begriff Kreuzungstiefe von der Menge der Repräsentationen auf die Menge der Graphen zu shiften, indem man die Kreuzungstiefe eines Graphen G als das Minimum der Kreuzungstiefen aller d Boxrepräsentationen von G definiert. Nun wollen wir eine weitere solche Größe betrachten, die Transversalzahl:

Definition 4.4. *Die Transversalzahl einer Repräsentation \mathcal{R} (bezeichnet mit $\tau(\mathcal{R})$) ist die kleinste Zahl n , so daß eine Menge P von n Punkten des \mathcal{R} zugrundeliegenden Raumes mit der Eigenschaft existiert, daß alle geometrischen Objekte der Repräsentation einen Punkt aus P enthalten.*

Bei Intervall und Boxrepräsentationen gilt, daß die Transversalzahl gleich der Cliquentüberdeckungszahl ist, da jeder Punkt eine Clique induziert, und jede Clique, also jede Menge sich paarweise schneidender Intervalle bzw. Boxen einen gemeinsamen Punkt enthält. Bei $\mathfrak{W}^t\mathcal{INT}$ und $t\mathcal{MLNT}$ Repräsentationen ist das aber nicht der Fall. Zwar induziert jeder Punkt eine Clique, aber nicht alle an einer Clique beteiligten Intervalltupel enthalten einen gemeinsamen Punkt (betrachte zB die Clique $\{v_3, v_4, v_5\}$ in Abb 9). Immerhin können wir feststellen, daß die Cliquentüberdeckungszahl eines Graphen kleinergleich dem Minimum der Transversalzahlen aller seiner Repräsentationen ist. Das wollen wir ausnutzen, um eine obere Grenze der Cliquentüberdeckungszahl für $t\mathcal{MLNT}$ Graphen in Abhängigkeit von α anzugeben. Gesucht ist also eine Schranke für die Transversalzahl aller $t\mathcal{MLNT}$ Repräsentationen in Abhängigkeit von α (bezeichnet mit $\tau^*(t\mathcal{MLNT}, \alpha)$). Grundlegende Idee unseres Vorgehens ist, eine $t\mathcal{MLNT}$ Repräsentation im wesentlichen in eine Anzahl von $\mathfrak{W}^t\mathcal{INT}$ Repräsentationen zu zerlegen, indem wir gewissen Partitionierungen der Reelen Achse die Intervalltupel zuordnen, deren i te Intervallkomponenten im Abschnitt i der Partitionierung liegen, so daß in den durch diese Intervalltupel induzierten Subrepräsentationen Schnitte von Intervallen unterschiedlichen Index unmöglich sind. Das hilft uns natürlich nur weiter, wenn wir $\tau^*(\mathfrak{W}^t\mathcal{INT}, \alpha)$ kennen. Es gilt:

Satz 4.5. [8]

$$\tau^*(\mathfrak{W}^t\mathcal{INT}, \alpha) \in O(\alpha^{t!})$$

Beweis: siehe Anhang.

Satz 4.6. *Für die Transversalzahl von Mehrfachintervallrepräsentationen gilt:*

$$\tau^*(t\mathcal{MLNT}, \alpha) \leq \tau^*((t-1)\mathcal{MLNT}, \alpha)^{t-1} \tau^*(\mathfrak{W}^t\mathcal{INT}, \alpha) + (t-1)\tau^*((t-1)\mathcal{MLNT}, \alpha)$$

Beweis: Sei $t > 1$. Betrachten wir eine $t\mathcal{MLNT}$ Repräsentation \mathcal{R} , basierend auf der Intervalltupelfamilie $((I_1^v, \dots, I_t^v))_{v \in V}$, wobei V eine beliebige Indexmenge ist. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß I_i^v links von I_{i+1}^v liegt. (Ausgehend von einer Repräsentation basierend auf Mehrfachintervallen $(M_v)_{v \in V}$ erhalten wir die gewünschte Intervalltupelrepräsentation, indem wir die Intervalle, aus denen M_v besteht von links nach rechts mit I_1^v, \dots, I_t^v bezeichnen. Besteht M_v nur aus $t' < t$ Intervallen, weisen wir den Intervallen $I_{t'+1}^v, \dots, I_t^v$ die leere Menge zu.) Betrachten wir nun die $(t-1)\mathcal{MLNT}$ Repräsentation, die auf den

Intervalltupeln basiert, die durch Ersetzen der ersten beiden Intervallkomponenten jedes Tupels (I_1^v, \dots, I_t^v) durch ihre konvexe Hülle entstehen, also die auf den $(t-1)$ -Interhaltupeln $(C(I_1^v, I_2^v), I_3^v, \dots, I_t^v) =: (\hat{I}_1^v, \dots, \hat{I}_{t-1}^v)$ ($v \in V$) basierende Repräsentation. Für die Unabhängigkeitszahl dieser Repräsentation ist klar, daß sie kleinergleich der Unabhängigkeitszahl der ursprünglichen Repräsentation ist. Die Induktionshypothese besagt, daß es für sie eine überdeckende Punktmenge P_1 mit $|P_1| \leq \tau^*((t-1)M\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)$ gibt. Nun ist diese gefundene Punktmenge natürlich noch nicht ausreichend für unsere ursprüngliche $tM\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}$ Repräsentation, da der in \hat{M}_v enthaltene Punkt ja zwischen den Intervallen I_1^v und I_2^v liegen kann. Das aber heißt wiederum, daß wir feststellen können, daß wir die noch nicht durch P_1 überdeckten Mehrfachintervalle M_v in (nicht notwendig disjunkte) Mengen V_p ($p \in P_1$) aufteilen können, so daß für $u, v \in V_p$ ein Schnitt zwischen den Intervallen I_1^v und I_2^u unmöglich ist, nämlich $V_p := \{v \in V \mid M_v \cap P_1 = \emptyset, \max(I_1^v) < p < \min(I_2^v)\}$.

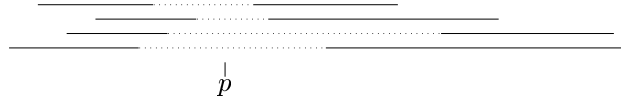


Abbildung 11: für $u, v \in V_p$ sind die Intervalle I_1^v und I_2^u durch p voneinander getrennt.

Bilden wir nun für $i = 2, \dots, t-1$ Mengen P_i auf analoge Weise, also als überdeckende Punktmenge der $(t-1)M\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}$ Repräsentation, die durch Ersetzen der Intervallkomponenten i und $i+1$ durch ihre konvexe Hülle entsteht, so können wir V wie folgt aufteilen: zunächst können wir die Menge aller v abspalten, deren Intervalltupel schon von $\bigcup_{i=1}^{t-1} P_i$ überdeckt werden. Für den Rest V' gilt:

$$\text{f. a. } v \in V', \text{ f. a. } i = 1, \dots, t-1 \text{ ex. } p \in P_i : \max(I_i^v) < p < \min(I_{i+1}^v)$$

(man beachte daß die v , in deren Intervalltupel ein leeres Intervall vertreten ist, zu der Menge der durch $\bigcup_{i=1}^{t-1} P_i$ überdeckten gehören, so daß diese Fälle in vorangehender Formulierung nicht berücksichtigt werden müssen).

Somit läßt sich V' für $p \in \mathbf{X}_{i=1}^{t-1} P_i$ in die (nicht notwendig disjunkten) Mengen

$$V_p := \{v \in V' \mid \text{f. a. } i \in \{1, \dots, t-1\} : \max(I_i^v) < p_i < \min(I_{i+1}^v)\}$$

aufteilen, wobei jede durch diese Mengen induzierte Subrepräsentation von \mathcal{R} einer $\mathcal{W}^t\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}$ Repräsentation entspricht, da Schnitte zwischen Intervallen unterschiedlichen Index unmöglich sind.

Fassen wir unser Ergebnis zusammen: Für die durch $\bigcup_{i=1}^{t-1} P_i$ überdeckten Intervalltupel sind maximal $(t-1)\tau^*((t-1)M\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)$ Punkte erforderlich. Wir haben die restlichen Intervalltupel $\tau^*((t-1)M\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)^{t-1}$ Mengen zugewiesen, die jeweils durch $\tau^*(\mathcal{W}^t\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)$ Punkte überdeckt werden können, womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Neben der trivialen Feststellung $\theta^*(tM\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha) \leq \tau^*(tM\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)$ haben wir:

Satz 4.7.

$$\theta^*(tM\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha) \leq \tau^*((t-1)M\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)^{t-1} \theta^*(\mathcal{W}^t\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha) + (t-1) \tau^*((t-1)M\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)$$

Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 4.6 zu führen: Mit demselben Verfahren wie oben erzeugen wir wieder Punktfolgen P_1, \dots, P_{t-1} . Diese Punktfolgen nutzen wir wieder zum einen, um schon mal eine Cliquesüberdeckung für die

Mehrfachintervalle zu generieren, die einen dieser Punkte enthalten (also höchstens $(t-1)\tau^*((t-1)M\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)$ Cliques, und zu anderen, um die restlichen Mehrfachintervalle so in $\tau^*((t-1)M\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)^{t-1}$ Mengen aufzuteilen, daß die auf ihnen beruhenden Subgraphen in $\Psi^t\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}$ liegen. Im Gegensatz zum obigen Beweis sind wir nicht an einer überdeckenden Punktmenge, sondern an einer Cliquesüberdeckung interessiert, können also diese $\Psi^t\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}$ Graphen gleich mit je maximal $\theta^*(\Psi^t\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{T}, \alpha)$ Cliques überdecken und erhalten so die Behauptung. \square

5 Kreisbographen

Eine weitere Verallgemeinerung von Intervallgraphen sind die Kreisbographen. Der Unterschied zu den Intervallgraphen besteht darin, daß die Intervalle nicht auf der reellen Achse, sondern auf einer Kreislinie aufgetragen werden. Die

Klasse der Kreisbographen (\mathcal{KB}) besteht also aus genau den Graphen, deren Knoten sich so durch Kreisbögen repräsentieren lassen, daß zwei Knoten adjazent sind genau dann wenn sich ihre entsprechenden Bögen schneiden. Wir gehen in diesem Kapitel ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß die Kreisbögen der Repräsentation abgeschlossen sind, keine zwei Bögen einen gleichen Endpunkt haben und kein Bogen die gesamte Kreislinie enthält. Den (vom Kreismittelpunkt aus betrachtet) rechten Endpunkt eines Bogens f bezeichnen wir mit $re(f)$, den linken entsprechend mit $li(f)$. In Kapitel 2 haben wir schon ausgeführt, daß für einen Kreisbographen G die Cliquesüberdeckungszahl $\alpha(G) + 1$ nicht überschreiten kann. Da Kreise (C_i) eine kanonische Kreisbogenrepräsentation besitzen, ist diese Grenze schon optimal und wir haben:

Satz 5.1.

$$\theta^*(\mathcal{KB}, \alpha) = \alpha + 1$$

Auch für die Chromatische Zahl hatten wir schon die obere Schranke $2\omega - 1$ angeben. Es sei vorweggenommen, daß diese noch nicht optimal ist. Zunächst wollen wir eine untere Schranke angeben:

Lemma 5.2.

$$\chi^*(\mathcal{KB}, \omega) \geq \lfloor 3/2 \omega \rfloor$$

Beweis: Wir konstruieren für gegebenes $\omega \in \mathbb{N}$ einen $\lfloor 3/2 \rfloor$ -chromatischen Kreisbographen wie folgt:

Plaziere $3\omega - 1$ Punkte $p_0, \dots, p_{3\omega-2}$ auf der Kreislinie (so daß die Indizes im Uhrzeigersinn ansteigen). Jeder dieser Punkte p_i sei nun linker Endpunkt eines Bogens b_i , dessen rechter Endpunkt zwischen den Punkten $p_{i+\omega-1}$ und $p_{i+\omega}$ liegt (Indizes seien modulo $3\omega - 1$). Die Cliqueszahl der so konstruierten Kreisbogenrepräsentation beträgt ω : je ω aufeinanderfolgende Bögen $b_i, \dots, b_{i+\omega-1}$ enthalten den Punkt $p_{i+\omega-1}$ und bilden somit eine Clique, während für Bögen b_i, b_j mit Abstand $i, j > \omega - 1$ $b_i \cap b_j = \emptyset$ gilt. Die Unabhängigkeitszahl dieses Kreisbographen beträgt zwei: die zu b_i nicht adjazenten Bögen sind die Bögen $b_{i+\omega}, \dots, b_{i-\omega}$, wobei diese wegen $i - \omega \equiv i + 2\omega - 1 \pmod{3\omega - 1}$ eine Clique bilden. Für die Chromatische Zahl des durch diese Kreisbogenrepräsentation repräsentierten Graphen G gilt nun: $\chi(G) \geq \lceil n(G)/\alpha(G) \rceil = \lceil (3\omega(G) - 1)/2 \rceil = \lfloor 3\omega(G)/2 \rfloor$. \square

Der im Beweis konstruierte Graphen macht desweiteren deutlich, daß es unmöglich ist, die schon gefundene χ -Schranke $2\omega - 1$ mit Lemma 2.1 (also auch nicht mit Lemma 2.3) zu verbessern: der konstruierte Graph ist $(2\omega - 2)$ -regulär, also können wir für die Klasse der Kreisbographen keine den minimalen Grad beschränkende

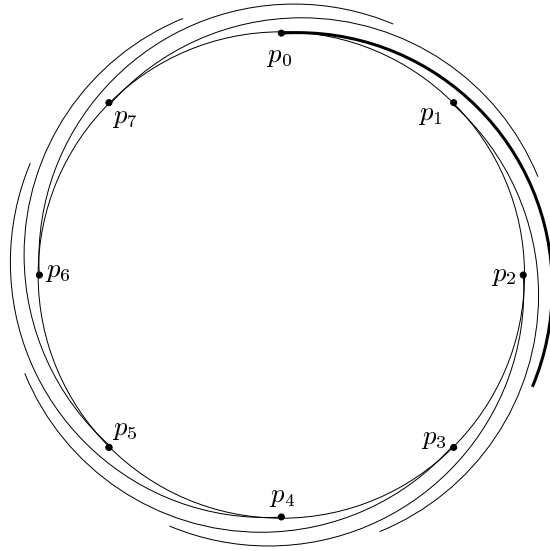


Abbildung 12: $(2\omega - 2)$ -regulärer Kreisbogengraph mit $\chi(G) = \lfloor 3\omega(G)/2 \rfloor$

Funktion finden, die kleiner als $2\omega - 2$ wäre, also auf eine chromatische Zahl kleiner als $2\omega - 1$ schließen lassen könnte.

Schon 1980 hat Karapetian in [11] gezeigt, daß die untere Schranke $\lfloor 3/2 \omega \rfloor$ auch eine obere Schranke für die Chromatische Zahl der Kreisbogengraphen darstellt. Allerdings ist seine Arbeit nie aus dem russischen übersetzt worden, so daß sein Ergebnis in der 'westlichen Wissenschaft' bis zum heutigen Tage weitestgehend unbemerkt blieb. So wird Karapetians Ergebnis z.B. in [9] und [10] als unbewiesene Vermutung vorgestellt, es wurden Arbeiten geschrieben, die schlechtere obere Schranken bewiesen und selbst der erst 1996 erschienene Aufsatz [17] bezieht sich lediglich auf die aus dem Jahre 1975 stammende Arbeit [19]. In dieser beweist Tucker die obere Schranke $\lfloor 3/2 \omega \rfloor$ für eine Teilklasse der Kreisbogengraphen, nämlich für die Klasse von Graphen, die eine Kreisbogenrepräsentation besitzen, in der die gesamte Kreislinie nicht durch weniger als vier Bögen überdeckt wird. (Auch für diese Subklasse der Kreisbogengraphen ist die Schranke $\lfloor 3/2 \omega \rfloor$ scharf: die im Beweis von Lemma 5.2 konstruierten Graphen besitzen die gewünschte Eigenschaft). Gyárfás hat in [7] Karapetians Ergebnis zitiert und festgestellt, daß sein Beweis eine Anleitung für einen approximativen Färbungsalgorithmus mit quadratischem Laufzeitverhalten liefert. Das dem im folgenden vorgestellten Beweis zugrundeliegende Färbungsverfahren wurde in seinem wesentlichen Punkt (der Aufspaltung des Verfahrens in eine ω und eine $\omega/2$ Färbung) durch Formelfragmente aus Karapetians Arbeit inspiriert, und wird uns als Anleitung für einen $O(n \log(n))$ Algorithmus dienen.

Satz 5.3.

$$\chi^*(\mathcal{KB}, \omega) = \lfloor 3/2 \omega \rfloor$$

Beweis Seien $G = (V, E) \in \mathcal{KB}$ mit $\omega(G) = \omega$ und eine \mathcal{KB} -Repräsentation \mathcal{R} mit zugrundeliegender Bogenfamilie $(f_v)_{v \in V}$ gegeben. Mit $d(\mathcal{R})$ bezeichnen wir die maximale Anzahl von Bögen, die einen gemeinsamen Punkt der Kreislinie enthalten. Da Bögen, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, eine Clique bilden gilt: $d(\mathcal{R}) \leq \omega$. Zunächst wählen wir einen beliebigen Punkt p der Kreislinie. Wenn wir im folgenden sagen Punkt x liegt rechts von Punkt y bzw. x ist größer als y , so meinen wir damit stets, daß, wenn wir die Kreislinie beginnend bei p im Uhrzeigersinn entlangwandern, wir zuerst auf y , anschließend auf x treffen werden.

Es sei d_p die Anzahl von Bögen, die p enthalten, und $C = \{c_1, \dots, c_{d_p}\}$ die Menge

der Knoten, deren Bögen p enthalten, wobei für $i < j$ gelte: $re(f_{c_i})$ liegt rechts von $re(f_{c_j})$.

Das Färben des Graphen geschieht nun in zwei Schritten: Zunächst färben wir den Graphen $G[V \setminus C]$ durch den First Fit Algorithmus mit Farben aus $\mathbb{N}^{\setminus \{0\}}$. Als Eingabeordnung wählen wir (v_1, \dots, v_m) , wobei die Indizes so gewählt sind, daß $[p, li(f_{v_1})]$ minimal ist und für $i < j$ gilt: $li(f_{v_i})$ liegt links von $li(f_{v_j})$ (wir starten also bei p , wandern im Uhrzeigersinn die Kreislinie entlang und färben in der Reihenfolge, in der wir auf die Bögen stoßen). A bezeichne die Menge der mit einer Farbe $\leq \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ gefärbten Knoten. Alle anderen Knoten betrachten wir wieder als ungefärbt - ihnen wird ihre endgültige Farbe erst im zweiten Schritt des Färbungsverfahrens zugewiesen. Für die Knoten, denen im ersten Schritt eine Farbe größer als $\lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ zugewiesen worden ist (also den momentan als ungefärbt betrachteten Knoten, die nicht in C liegen), gilt, daß der linke Endpunkt ihres Bogens in $\lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ Bögen von Knoten aus A liegt (sonst wären sie mit einer Farbe $\leq \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ gefärbt worden. Die Menge der Knoten aus A , deren Bögen den linken Endpunkt des Bogens eines Knotens v aus $V \setminus (A \cup C)$ enthalten, bezeichnen wir mit $A(v)$.

Im zweiten Schritt des Färbungsverfahrens färben wir den Graphen $G[V \setminus A]$ und benutzen dafür wieder den First Fit Algorithmus mit Farben aus $\mathbb{N}^{> \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor}$. Als Eingabeordnung der Knoten wählen wir $(c_1, \dots, c_{d_p}, w_1, \dots, w_l)$, wobei $[re(f_{w_1}), p]$ minimal ist und für $i < j$ gilt: $re(f_{w_i})$ liegt rechts von $re(f_{w_j})$ (wir starten also mit c_1, \dots, c_{d_p} , anschließend wandern wir die Kreislinie beginnend bei p gegen den Uhrzeigersinn entlang).

Wir werden nun zeigen, daß der zweite Schritt des Färbungsverfahrens mit ω Farben auskommt, woraus wir dann wegen $d(\mathcal{R}) \leq \omega$ auf die $\lfloor 3/2 \omega \rfloor$ Färbbarkeit von G schließen können. Zuvor führen wir noch ein Bezeichnungsschema ein:

B_q bezeichne die Menge der Knoten aus $V \setminus A$, deren Bögen den Punkt q enthalten, B^I die Knoten aus $V \setminus A$, die mit Farben aus I gefärbt worden sind, und B_q^I sei $B_q \cap B^I$

Sei m die Anzahl der im zweiten Färbungsschritt verwendeten Farben, und nehmen wir an, m sei größer als ω . v_0 sei der Knoten mit maximalem rechten Endpunkt unter allen mit $m + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ (also mit maximaler Farbe) gefärbten Knoten.

Die Lage der Endpunkte des Bogens f_{v_0} läßt sich nun ziemlich genau präzisieren. Da die Lage des linken Endpunkts aber für den weiteren Beweis keine Rolle spielt, widmen wir uns dem rechten. Es gilt, daß kein Bogen eines Knotens, der nicht in A oder C liegt, rechts vom Bogen von v_0 liegen kann, also:

$$(\dagger) : \quad \text{f. a. } v \in V \setminus (C \cup A) : li(f_v) \in [p, re(f_{v_0})]$$

Beweis (\dagger) : Nehmen wir wiederum an, dies sei nicht der Fall und wählen w_0 aus $V \setminus (A \cup C)$ so daß $[re(f_{v_0}), li(f_{w_0})]$ minimal ist.

Die Menge $B_{li(f_{w_0})}$ kann maximal $\lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ Knoten umfassen, da auch die Bögen der $\lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ Knoten aus $A(w_0)$ den Punkt $li(f_{w_0})$ enthalten. Es gibt also mindestens $m - \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor \geq \lceil d(\mathcal{R})/2 \rceil$ Farben aus dem zweiten Färbungsschritt, so daß kein Bogen der mit diesen Farben gefärbten Knoten den Punkt $li(f_{w_0})$ enthält. Bezeichne nun I die Menge dieser Farben. Zusätzlich enthalte I auch die Farbe von w_0 , also $I := \{i \in \{1 + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor, \dots, m + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor\} \mid B_{li(f_{w_0})}^{\{i\}} = \emptyset\} \cup \{col(w_0)\}$, $|I| \geq \lceil d(\mathcal{R})/2 \rceil + 1$.

Nicht für alle Farben $i \in I$ existiert ein mit i gefärbter Knoten, dessen Bogen $re(f_{v_0})$ enthält:

Sei v der Knoten aus $B_{re(f_{v_0})}^I \setminus C$, mit maximalem linken Endpunkt. Die Existenz eines solchen Knotens ist gesichert, da v_0 selbst in $B_{re(f_{v_0})}^I \setminus C$ enthalten ist ($col(v_0) = m + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor \in I$ aufgrund der Wahl von v_0 als Bogen aus $B^{\{m + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor\}}$ mit maximalem rechten Endpunkt, und $v_0 \notin C$, da die Knoten aus C mit Farben \leq

$d_p + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor < m + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ gefärbt worden sind). Aufgrund der Wahl von v müssen alle Bögen von Knoten aus $B_{re(f_{v_0})}^I \setminus C$ den linken Endpunkt von f_v enthalten. Auch die Bögen der Knoten aus $B_{re(f_{v_0})}^I \cap C$ enthalten diesen Punkt, da sie den ganzen Bereich $[p, re(f_{v_0})]$ überdecken (ansonsten müßten sie, um $re(f_{v_0})$ zu enthalten auch $li(f_{w_0})$ enthalten). Also ist $li(f_v)$ in mindestens $|B_{re(f_{v_0})}^I| + |A(v)|$ Bögen enthalten,

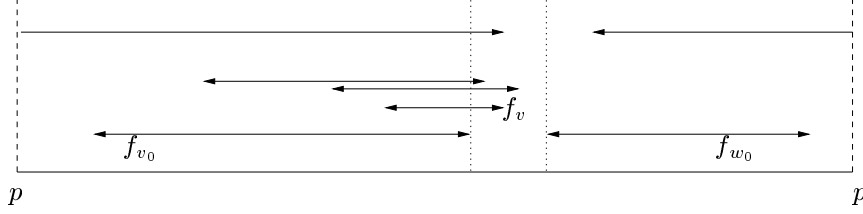


Abbildung 13: $li(f_v)$ ist in allen Bögen der Knoten aus $B_{re(f_{v_0})}^I$ enthalten

woraus $|B_{re(f_{v_0})}^I| \leq \lceil d(\mathcal{R})/2 \rceil$ folgt. Da $|I| \geq \lceil d(\mathcal{R})/2 \rceil + 1$ gilt also, daß nicht für alle Farben i aus I ein mit i gefärbter Knoten existiert, dessen Bogen den rechten Endpunkt von f_{v_0} enthält.

Sei $i \in I$ maximal so gewählt, $I^{>i} := \{j \in I \mid j > i\}$. Für die Knoten aus $B_{re(f_{v_0})}^I$ gilt (aufgrund der Wahl von I), daß die rechten Endpunkte ihrer Bögen in $[re(f_{v_0}), li(f_{w_0}))$ liegen. Dieser Bereich wird von keinem Bogen eines mit i gefärbten Knotens geschnitten (Bögen von mit i gefärbten Knoten enthalten weder $re(f_{v_0})$ noch $li(f_{w_0})$, und aufgrund der Wahl von w_0 können sie auch nicht zwischen diesen Punkten liegen). Die Bögen der Knoten aus $B_{re(f_{v_0})}^{I^{>i}}$ müssen also mit ihrem linken Ende in $[p, re(f_{c_i})]$ liegen (und somit in f_{c_j} für $j \leq i$), da sie sonst nicht mit einer Farbe $> i$ gefärbt worden wären. Das aber ist unmöglich:

Sei v der Knoten aus $B_{re(f_{v_0})}^{I^{>i}} \setminus C$, mit maximalem linken Endpunkt. Mit analoger Argumentation wie oben existiert dieser, und der linke Endpunkt seines Bogens liegt in allen Bögen der Knoten aus $B_{re(f_{v_0})}^{I^{>i}} \cup A(v) \cup \{c_1, \dots, c_i\}$. Da $|B_{re(f_{v_0})}^{I^{>i}} \cup \{c_1, \dots, c_i\}| \geq |I| \geq \lceil d(\mathcal{R})/2 \rceil + 1$, ist $li(v)$ in mindestens $d(\mathcal{R}) + 1$ Bögen enthalten, was der Definition von $d(\mathcal{R})$ widerspricht, womit (†) gezeigt ist.

Nun betrachten wir die wie folgt konstruierte Mengenfamilie $(C_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$:

$$C_m := \{v_0\}, \text{ und für } i \in \{1, \dots, m-1\} \text{ sei}$$

$$C_i := \begin{cases} C_{i+1} \cup \{c_i\} & \text{falls } i \leq d_p \text{ und } C_{i+1} \cup \{c_i\} \text{ eine Clique ist,} \\ C_{i+1} \cup B_{re(f_{v_0})}^{\{i+\lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor\}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen durch Induktion über i , daß für $i = 1, \dots, m$ C_i eine $(m-i+1)$ -Clique ist: Für $i = m$ ist nichts zu zeigen, sei also $i < m$.

Wir betrachten die Menge C_i und unterscheiden die Möglichkeiten ihrer Konstruktion:

1. $C_i = C_{i+1} \cup \{c_i\}$: Aufgrund der Konstruktion müssen wir nur noch ausschließen, daß, wenn $C_{i+1} \cup \{c_i\}$ keine Clique ist, $B_{re(f_{v_0})}^{\{i+\lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor\}}$ aus c_i besteht. Das ist aber klar, denn wenn c_i $re(f_{v_0})$ enthält, kann es keinen Knoten in C_{i+1} geben, mit dem c_i nicht benachbart wäre.
2. $C_i = C_{i+1} \cup B_{re(f_{v_0})}^{\{i+\lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor\}}$:
 - (a) $i > d_p$: Da C_{i+1} keinen Knoten aus C enthalten kann, enthalten alle Bögen der Knoten aus C_{i+1} den Punkt $re(f_{v_0})$. Wir müssen also nur

zeigen, daß $B_{re(f_{v_0})}^{\{i+\lfloor d(\mathcal{R})/2\rfloor\}}$ nicht leer ist. Das gilt, da v_0 nicht mit $i + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ gefärbt wurde und daher ein mit $i + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ gefärbter Knoten existieren muß, dessen Bogen $re(f_{v_0})$ enthält.

- (b) $i \leq d_p$: Da zwar C_{i+1} eine Clique ist (IH), nicht aber $C_{i+1} \cup \{c_i\}$, muß ein $v \in C_{i+1} \setminus C$ existieren mit $f_v \cap f_{c_i} = \emptyset$. Sei v so gewählt. f_v hat mit allen Bögen der Knoten aus $C_{i+1} \cap C$ einen nichtleeren Schnitt. Wir können sogar feststellen, daß $re(f_v)$ in allen diesen Bögen liegen muß: gäbe es ein $c \in C_{i+1} \cap C$ mit $re(f_v) \notin f_c$ und $li(f_v) \in f_c$, würde (aufgrund der gewählten Indizierung der Knoten aus C) $li(f_v) \in f_{c_i}$ folgen. Da v nicht mit $i + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ gefärbt wurde, muß $re(f_v)$ in dem Bogen eines mit $i + \lfloor d(\mathcal{R})/2 \rfloor$ gefärbten Knoten liegen, und dieser muß wegen (†) auch $re(f_{v_0})$ enthalten. Sei v_i so gewählt, also $\emptyset \neq B_{re(f_{v_0})}^{\{i+\lfloor d(\mathcal{R})/2\rfloor\}} = \{v_i\}$. $re(f_v)$ liegt also in f_{v_i} und in den Bögen aller Knoten aus $C_{i+1} \cap C$. Daraus folgt, daß auch f_{v_i} einen nichtleeren Schnitt mit den Bögen aller Knoten aus $C_{i+1} \cap C$ hat. Da die Bögen der restlichen Knoten aus C_{i+1} genauso wie f_{v_i} den Punkt $re(f_{v_0})$ enthalten folgt mit der Induktionshypothese, daß C_i eine $(m - i + 1)$ -Clique ist.

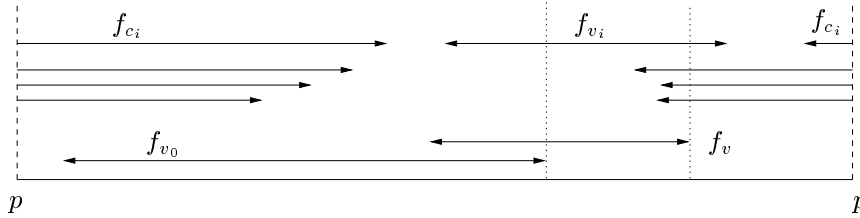


Abbildung 14: $re(f_v)$ muß in f_{v_i} und allen Bögen der Knoten aus $C_{i+1} \cap C$ liegen

Für C_1 bedeutet dies aber, daß C_1 eine m -Clique ist, was mit unserer Annahme $m > \omega$ im Widerspruch zu $\omega = \omega(G)$ steht. \square

Betrachten wir nun eine algorithmische Umsetzung des im Beweis von Satz 5.3 beschriebenen Färbungsverfahrens. Die beiden Färbungsschritte der Procedure 'KBfärbung' sind angelehnt an die übliche Umsetzung des First Fit Färbungsalgorithmus für Intervallrepräsentationen. Da im ersten Schritt nur die Bögen, die den Punkt p nicht enthalten gefärbt werden sollen, muß der Algorithmus diese von Bögen unterscheiden können, die p enthalten. Das wird realisiert, indem geprüft wird, bei welchem Endpunkt der Algorithmus zuerst auf den Bogen stößt: Ist es der rechte Endpunkt des Bogens, muß der Bogen p enthalten, ist es der linke, kann er p nicht enthalten. Parallel zur Färbung wird in der ersten repeat-Schleife

- eine nach rechten Endpunkten sortierte Liste der p enthaltenden Bögen erstellt (*C-Liste*)
- bei den p nicht enthaltenden Bögen notiert, in wievielen p enthaltenden Bögen ihr linker Endpunkt *nicht* liegt (*C-überlagerung(bogen)*). Dazu wird in *Ccount* mitgezählt, wieviele rechte Endpunkte p enthaltender Bögen passiert werden. (Mit dieser Information kann im zweiten Färbungsschritt in konstanter Zeit ermittelt werden, mit welchen '*C*'-Bögen der zu färbende Bogen durch die Lage seines linken Endpunkts benachbart ist)
- die maximale Anzahl von Bögen ermittelt, die einen gemeinsamen Punkt enthalten (*maxdick*). Dazu wird die Variable *dicke* bei Erreichen eines linken

Endpunkts um eins erhöht, bei Erreichen eines rechten Endpunkts um eins erniedrigt. Es ist klar, daß *dicke*, wenn es mit der Anzahl p enthaltender Bögen initialisiert wird, immer die Anzahl der Bögen angibt, die den Bereich zwischen dem aktuellen und dem rechts nachfolgenden Punkt enthalten. Da aber die Anzahl p enthaltender Bögen noch nicht bekannt ist, wird *dicke* mit 0 initialisiert. Um nun den gesuchten Wert zu ermitteln, muß nur noch nach Beendigung der ersten repeat-Schleife die Anzahl der p enthaltenden Bögen (*Ccount* enthält nun diesen Wert) zum maximal angenommenen Wert von *dicke* addiert werden.

Nachdem im zweiten Schritt die p enthaltenden Bögen gefärbt worden sind (Zeile 38), unterscheidet er sich vom Färbungsalgorithmus für Intervallgraphen nur darin, daß darauf geachtet werden muß, daß auch der linke Endpunkt eines Bogens in einem schon gefärbten (p enthaltenden) Bogen liegen kann. Da wir in der ersten repeat-Schleife notiert haben, in wievielen p enthaltenden Bögen der linke Endpunkt nicht liegt, können wir nun, da wir die Anzahl der p enthaltenden Bögen kennen (*Ccount*), berechnen, in wievielen der linke Endpunkt liegt (*Cblock*). Da die p enthaltenden Bögen nach absteigenden rechten Endpunkten gefärbt wurden, können wir aus dieser Information die durch die Lage des linken Endpunkts 'blockierten' Farben ermitteln: es sind die Farben $\leq \lfloor \text{maxdick}/2 \rfloor + \text{Cblock}$. Die Laufzeitanalyse liefert eine Laufzeit in $O(n \log(n))$: die Erstellung einer sortierten Endpunktliste (Zeile 2) benötigt $O(n \log(n))$ Zeit. Die beiden repeat-Schleifen werden $2n$ mal durchlaufen, wobei alle darin enthaltenen Anweisungen bis auf das Finden der kleinstmöglichen Farbe ($O(\log(\text{Anzahl benutzter Farben})) \subseteq O(\log(n))$) in konstanter Zeit realisierbar sind. Zeilen 4, 36 und 38 benötigen $O(n)$, der Rest konstante Zeit.

```

1  procedure KBfärbung( $R$ );
2   $L \leftarrow$  sortierte Ringliste von Endpunkten der Bögen aus  $R$ ;
3   $p :=$  Punkt aus  $L$ ;
4  while  $p$  ist linker Endpunkt do  $p := \text{nextright}(p)$  endwhile;
5  rem 1.Färbungsschritt
6   $colours := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ;
7   $C\text{-Liste} :=$  leere Liste;
8   $Ccount := 0$ ;
9   $dicke := 0$ ;
10  $maxdick := 0$ ;
11  $punkt := p$ ;
12 repeat
13    $bogen := \text{bogen}(punkt)$ ;
14   if  $punkt$  ist linker Endpunkt von  $bogen$  then
15      $dicke := dicke + 1$ ;
16      $maxdick := \max(maxdick, dicke)$ ;
17     if  $bogen$  noch nicht besucht then ( $p \notin bogen$ )
18       markiere  $bogen$  als besucht;
19        $farbe(bogen) := \min(colours)$ ;
20        $colours := colours \setminus \{farbe(bogen)\}$ ;
21        $C\text{-überlagerung}(bogen) := Ccount$ 
22     endif
23   else
24      $dicke := dicke - 1$ ;
25     if  $bogen$  noch nicht besucht then ( $p \in bogen$ )
26       markiere  $bogen$  als besucht;
27        $Ccount := Ccount + 1$ ;
28       füge  $bogen$  vorne in  $C\text{-Liste}$  ein
29     else
30        $colours := colours \cup \{farbe(bogen)\}$ ;

```



```

31         endif
32     endif;
33      $punkt := \text{nextright}(punkt)$ 
34 until  $punkt = p$ ;
35  $maxdick := maxdick + Ccount$ ;
36 lösche Färbungen  $> \lfloor maxdick/2 \rfloor$ ;
37 rem 2.Färbungsschritt
38 färbe  $C$ -Liste in gegebener Reihenfolge mit Farben  $\lfloor maxdick/2 \rfloor + 1, \dots$ 
39  $\dots, \lfloor maxdick/2 \rfloor + Ccount$ ;
40  $colours := \mathbb{N}^{> \lfloor maxdick/2 \rfloor + Ccount}$ ;
41  $punkt := p$ ;
42 repeat
43      $bogen := \text{bogen}(punkt)$ ;
44     if  $punkt$  ist rechter Endpunkt then
45         if  $bogen$  ist ungefärbt then
46              $Cblock := Ccount - C$ -überlagerung( $bogen$ );
47              $farbe(bogen) := \min(colours^{> \lfloor maxdick/2 \rfloor + Cblock})$ ;
48              $colours := colours \setminus \{farbe(bogen)\}$ 
49         endif
50     else
51         if  $farbe(bogen) > \lfloor maxdick/2 \rfloor$  then
52              $colours := colours \cup \{farbe(bogen)\}$ 
53         endif
54     endif;
55      $punkt := \text{nextleft}(punkt)$ 
56 until  $punkt = p$ ;

```

Satz 5.4. *Die Procedure KBfärbung färbt eine Kreisbogenrepräsentation \mathcal{R} in $O(n \log(n))$ Zeit mit maximal $\lfloor 1/2 d(\mathcal{R}) \rfloor + \omega(\mathcal{R}) \leq \lfloor 3/2 \omega(\mathcal{R}) \rfloor$ Farben. ($d(\mathcal{R})$ bezeichnet die maximale Anzahl von Bögen aus \mathcal{R} mit nichtleerem Schnitt.)*

Abschließend sei noch ein typisches Anwendungsgebiet von Kreisbogenfärbungen erwähnt: Scheduling-Probleme von sich zyklisch wiederholenden Prozessen. Man betrachte zB die Speicherplatzzuweisung für Computerprogramme. Mithilfe der Procedure KBfärbung ist es nun möglich, Compiler zu bauen, die in akzeptabler Laufzeit den Variablen aus zyklisch ablaufenden Programmkomponenten Speicherplatz so zuweisen, daß der insgesamt für die zyklische Programmkomponente reservierte Speicherplatz höchstens 1,5 mal so groß ist, wie der minimal benötigte.

6 Anhang

6.1 weitere Schranken

Einheits-Kreisscheiben-Graphen

\mathcal{EKS} bezeichne die Klasse der Graphen, die durch Kreisscheiben in der Ebene mit einheitlichem Durchmesser so repräsentierbar sind, daß zwei Knoten genau dann adjazent sind, wenn sich ihre Kreisscheiben schneiden. Es gilt:

$$\lfloor \frac{3}{2} \omega \rfloor \leq \chi^*(\mathcal{EKS}, \omega) \leq 3\omega - 2 \quad [18]$$

Schnitt-Kreisscheiben-Graphen

\mathcal{SKS} bezeichne die Klasse der Graphen, die durch Kreisscheiben in der Ebene mit beliebigem Durchmesser so repräsentierbar sind, daß zwei Knoten genau dann adjazent sind, wenn sich ihre Kreisscheiben schneiden. Es gilt:

$$\lfloor \frac{3}{2} \omega \rfloor \leq \chi^*(\mathcal{SKS}, \omega) \leq 6\omega - 6 \quad [5]$$

Containment-Kreisscheiben-Graphen

\mathcal{CKS} bezeichne die Klasse der Graphen, die durch Kreisscheiben in der Ebene mit beliebigem Durchmesser so repräsentierbar sind, daß zwei Knoten genau dann adjazent sind, wenn die Kreisscheibe mindestens eines Knotens den Mittelpunkt des anderen Knotens enthält. (Für Einheitskreisscheiben besteht kein Unterschied zwischen den Graphenklassen, die durch die Schnittformel bzw. durch diese 'Containment'-formel beschrieben werden. Für variable Durchmesser gilt: $\mathcal{CKS} \not\subseteq \mathcal{SKS}$). Es gilt:

$$\lfloor \frac{3}{2}\omega \rfloor \leq \chi^*(\mathcal{CKS}, \omega) \leq 6\omega - 6 \quad [16]$$

Doppel-Kreisscheiben-Graphen

\mathcal{DKS} bezeichne die Klasse der Graphen, deren Knoten so durch je zwei Kreisscheiben mit identischem Mittelpunkt repräsentierbar sind, daß zwei Knoten genau dann adjazent sind, wenn mindestens die größere Kreisscheibe eines Knotens die kleinere Kreisscheibe des anderen Knotens schneidet. ($\mathcal{R} = (\mathbb{R}^2, (m_v, d_v, D_v)_{v \in V}, \phi)$ mit $m_v \in \mathbb{R}^2$, $d_v \leq D_v \in \mathbb{R}$ und $\phi(v, w) = |m_v, m_w| \leq \frac{1}{2} \max\{d_v + D_w, d_w + D_v\}$ ($|m_v, m_w|$ ist der euklidische Abstand der beiden Punkte)). Es gilt:

$$\lfloor \frac{3}{2}\omega \rfloor \leq \chi^*(\mathcal{DKS}, \omega) \leq 33(\omega - 1) - 2 \quad [16]$$

Convexe-Polytop-Graphen

$\mathcal{CP}_{(n,m,k)}$ ($m \geq k$) bezeichne die Graphen, die durch Schnittrepräsentationen von convexen Polytopen im n -dimensionalen Euklidischen Raum mit Kanten parallel zu maximal k von m vorgegebenen Richtungen repräsentiert werden können. (zB $dBOX \subseteq \mathcal{CP}_{(d,d,d)}$). Es gilt:

$$n, k \geq 3: \quad \mathcal{CP}_{(n,m,k)} \text{ ist nicht } \chi\text{-beschränkt} \quad [3]$$

$$\chi^*(\mathcal{CP}_{(2,m,k)}, \omega) \leq 4 \binom{m}{k} k \omega^{\binom{2k}{3} + 1} \quad [3]$$

Kreis-Graphen

\mathcal{K} bezeichne die Klasse der Graphen, die durch Schnittrepräsentationen von Sehnen eines Kreises repräsentiert werden können (alternativ: durch Intervallrepräsentationen mit $\phi(u, v) = I_u \cap I_v \notin \{\emptyset, I_u, I_v\}$). Es gilt:

$$\theta^*(\mathcal{K}, \alpha) \in \Theta(\alpha \log(\alpha)) \quad [14]$$

$$\chi^*(\mathcal{K}, \omega) \in O(2^\omega) \quad [15]$$

$$\chi^*(\mathcal{K}, 2) = 5 \quad \geq: [1], \leq: [14]$$

Polygon-Kreis-Graphen

\mathcal{PK} bezeichne die Klasse der Graphen, die durch Schnittrepräsentationen von convexen Polygonen repräsentiert werden können, wobei die Kanten der Polygone aus Sehnen eines Kreises bestehen. Es gilt:

$$\theta^*(\mathcal{PK}, \alpha) \in \Theta(\alpha \log(\alpha)) \quad [15]$$

$$\chi^*(\mathcal{PK}, \omega) \in O(2^\omega) \quad [15]$$

Definition 6.1. Für eine Menge M von Graphen bezeichne $\mathcal{G}(M)$ die Klasse der Graphen, die keinen der Graphen aus M als induzierten Subgraphen enthalten.

$\mathbf{R}(p, q)$ bezeichne die Ramseyzahl von p und q , S_n den 'Sterngraphen' auf n Knoten ($S_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_1 v_i \mid 1 < i \leq n\})$). P_n den 'Pfadgraphen' auf n Knoten, mK_n die disjunkte Vereinigung von m vollständigen Graphen auf n Knoten, und $G \oplus H$ den Graphen $(V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{vw \mid v \in V(G), w \in V(H)\})$. Es gilt:

$$\frac{\mathbf{R}(n-1, \omega+1) - 1}{n-2} \leq \chi^*(\mathcal{G}(\{S_n\}), \omega) \leq \mathbf{R}(n-1, \omega) \quad [7]$$

$$\frac{\mathbf{R}(\lfloor n/2 \rfloor, \omega+1) - 1}{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \leq \chi^*(\mathcal{G}(\{P_n\}), \omega) \leq (n-1)^{\omega-1} \quad [7]$$

$$\chi^*(\mathcal{G}(\{mK_2\}), \omega) \in O(\omega^{2(m-1)}) \quad [20]$$

$$\frac{\mathbf{R}(4, \omega+1) - 1}{3} \leq \chi^*(\mathcal{G}(\{4K_1\}), \omega) \leq \frac{\mathbf{R}(4, \omega+1) + 2\mathbf{R}(3, \omega+1)}{3} - 1 \quad [7]$$

$$\frac{\mathbf{R}(3, \omega+1) - 1}{2} \leq \chi^*(\mathcal{G}(\{P_3 + K_1\}), \omega) \leq \frac{\mathbf{R}(3, \omega+1) + \omega - 2}{2} \quad [7]$$

$$\frac{\mathbf{R}(3, \omega+1) - 1}{2} \leq \chi^*(\mathcal{G}(\{P_2 + 2K_1\}), \omega) \leq \binom{\omega+1}{2} + \omega - 1 \quad [7]$$

$$\chi^*(\mathcal{G}(\{S_4, \overline{S_4}\}), \omega) = \lfloor 3/2 \omega \rfloor \quad [7]$$

$$\text{für } F \in \{P_3 + K_1, K_2 + 2K_1\} \text{ gilt: } \chi^*(\mathcal{G}(\{F, \overline{F}\}), \omega) = \begin{cases} 3 & \text{für } \omega = 2 \\ \omega & \text{sonst} \end{cases} \quad [7]$$

$$\chi^*(\mathcal{G}(\{K_{1,3}, K_5 - e\}), \omega) \leq \omega + 1 \quad [12]$$

$$\chi^*(\mathcal{G}(\{K_{1,3}, (K_2 + K_1) \oplus K_2\}), \omega) \leq \omega + 1 \quad [4]$$

$$\text{für jeden Baum } T \text{ mit Radius 2 ist } \mathcal{G}(\{T\}) \chi\text{-beschränkt} \quad [13]$$

6.2 Beweis von Satz 4.5

Satz 4.5 lautet:

$$\tau^*(\Psi^t \mathcal{INT}, \alpha) \in O(\alpha^{t!})$$

Beweis ([8]): wir zeigen: $\tau^*(\Psi^t \mathcal{INT}, \alpha) \leq (\alpha + 1)\tau^*(\Psi^{t-1} \mathcal{INT}, (\alpha + 1)^{t-1} - 1) + \alpha$

Induktion über t

Für $t = 1$ ist $\Psi^1 \mathcal{INT}$ die Klasse der Intervallgraphen, also $\tau^*(\Psi^1 \mathcal{INT}, \alpha) = \alpha$.

$t > 1$: Um die Induktionshypothese zur Anwendung zu bringen, müssen wir $\Psi^t \mathcal{INT}$ Repräsentationen mit $\Psi^{t-1} \mathcal{INT}$ Repräsentationen in Verbindung bringen. Sei \mathcal{R} eine $\Psi^t \mathcal{INT}$ Repräsentation mit zugrundeliegender Intervalltupelfamilie $((I_1^v, \dots, I_t^v))_{v \in V}$ (V bel. Indexmenge), und $\alpha(\mathcal{R}) = \alpha$. Es bezeichne \mathcal{R}^{-i} die $\Psi^{t-1} \mathcal{INT}$ Repräsentation, die durch die $(t-1)$ Intervalltupelfamilie $((I_1^v, \dots, I_{i-1}^v, I_{i+1}^v, \dots, I_t^v))_{v \in V}$, also durch Weglassen der i -ten Intervallkomponenten aus \mathcal{R} induziert wird. Man beachte, daß \mathcal{R}^{-i} im allgemeinen keine induzierte Subrepräsentation von \mathcal{R} ist (sie unterscheidet sich von \mathcal{R} dadurch, daß ihr einige 'Kanten' fehlen). Zwar stellt eine überdeckende Punktmenge einer Repräsentation \mathcal{R}^{-i} auch eine überdeckende Punktmenge für \mathcal{R} dar, da aber das Verhältnis von $\alpha(\mathcal{R})$ zu $\alpha(\mathcal{R}^{-i})$ keinen Schranken unterworfen ist (man betrachte zB die Vereinigung von K_m und $\overline{K_m}$ mit Unabhängigkeitszahl 1, aus der nach Streichen der ersten Komponente wieder $\overline{K_m}$ wird), ist eine kanonische Anwendung der Induktionshypothese ausgeschlossen. Wir werden zeigen, daß es eine Möglichkeit gibt, \mathcal{R} in eine von α abhängige Anzahl von Subrepräsentationen \mathcal{H}_i zu zerlegen, die die Eigenschaft haben, daß die Unabhängigkeitszahlen der Repräsentationen \mathcal{H}_i^{-1} durch einen Term in α beschränkt sind. Letzteres ($\alpha(\mathcal{H}_i^{-1}) \leq f(\alpha)$) wird in der unten vorgenommenen Aufteilung von

\mathcal{R} per Konstruktion gelten, so daß der Schlüssel des Beweises darin liegt, zu zeigen, daß die Anzahl der Subrepräsentationen, in die wir \mathcal{R} zerlegen werden, durch α ausdrückbar ist. Dazu benötigen wir folgendes

Lemma 6.2. *Für $\alpha, t \in \mathbb{N}$ seien $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_\alpha \mathfrak{W}^t \mathcal{INT}$ Repräsentationen mit $\alpha(\mathcal{R}_i) \geq \alpha^t$. Es gilt: Man kann aus jedem \mathcal{R}_i ein t Intervalltupel \mathbf{I}^i so wählen, daß der durch die Intervalltupel $\mathbf{I}^1, \dots, \mathbf{I}^\alpha$ repräsentierte $\mathfrak{W}^t \mathcal{INT}$ Graph isomorph ist zu $\overline{K_\alpha}$ (d.h., diese Intervalltupel sind in jeder Komponente paarweise disjunkt)*

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit basiere (für $j = 1, \dots, \alpha$) \mathcal{R}_j auf einer *unabhängigen* t -Intervalltupelfamilie $(\mathbf{I}_k^j)_{k=1, \dots, \alpha^t}$, wobei die Intervalltupel so indiziert seien, daß für $k_0 < k_1$ die erste Intervallkomponente des Tupels $\mathbf{I}_{k_0}^j$ (bezeichnet mit $(\mathbf{I}_{k_0}^j)_1$) links von der ersten Intervallkomponente des Tupels $\mathbf{I}_{k_1}^j$ liegt. Induktion über t :

$t = 1$: Es liegen Intervallgraphen vor, also müssen wir nicht zwischen den Komponenten der Intervalltupel unterscheiden und schreiben einfach I_k^j statt $(\mathbf{I}_k^j)_1$. Die gewünschte Menge unabhängiger, also paarweise disjunkter Intervalle konstruieren wir, indem wir eine geeignete Indizierung j_1, \dots, j_α der Repräsentationen angeben und aus \mathcal{R}_{j_k} das Intervall $I_k^{j_k}$ wählen.

Es sei j_1 der Index der Repräsentation, deren Intervall $I_1^{j_1}$ den minimalen rechten Endpunkt unter den Intervallen I_j^j $j = 1, \dots, \alpha$ hat.

Für $k = 2, \dots, \alpha$ betrachten wir die Intervallmengen $\{I_k^j \mid j \in \{1, \dots, \alpha\} \setminus \{j_1, \dots, j_{k-1}\}\}$ und weisen j_k den Wert zu, so daß $\max(I_k^{j_k})$ minimal ist. Die Intervalle der so konstruierten Intervallmenge $\{I_k^{j_k} \mid k = 1, \dots, \alpha\}$ sind paarweise disjunkt: würden sich Intervalle $I_k^{j_k}$ und $I_l^{j_l}$ (OE $k < l$) schneiden, müßte, da $I_k^{j_k}$ nach Übereinkunft links von $I_l^{j_l}$ liegt gelten: $\max(I_k^{j_k}) < \max(I_l^{j_l})$, was der Wahl von j_k widerspräche.

$t > 1$: Die Induktionshypothese trifft eine Aussage über $\mathfrak{W}^{t-1} \mathcal{INT}$ Repräsentationen. Wir sind durch sie in der Lage festzustellen, daß wir aus den Repräsentationen $\mathcal{R}_1^{-1}, \dots, \mathcal{R}_\alpha^{-1}$ je ein $(t-1)$ Intervalltupel entnehmen können, so daß diese Tupel einen unabhängigen $\mathfrak{W}^{t-1} \mathcal{INT}$ Graphen induzieren. Diese Unabhängigkeit des Graphen geht natürlich im allgemeinen verloren, wenn wir die ausgewählten $(t-1)$ Tupel wieder mit ihren ersten Komponenten versehen, es sei denn, wir schränken uns bei der Wahl der unabhängigen $(t-1)$ Tupel so ein, daß wir garantieren können, daß die zugehörigen Intervalle der ersten Komponente paarweise disjunkt sind. Das ist möglich: Für $j = 1, \dots, \alpha$ bilden wir von jeweils α^{t-1} aufeinanderfolgenden Intervallen der ersten Komponente ihre convexe Hülle: $Y_k^j := [\min((I_{(k-1)\alpha^{t-1}+1}^j)_1), \max((I_{k\alpha^{t-1}}^j)_1)]$ ($k = 1, \dots, \alpha$) (es sei daran erinnert, daß wir davon ausgehen, daß $(I_i^j)_1$ links von $(I_{i+1}^j)_1$ liegt). Die Intervallmengen $Y^j := \{Y_k^j \mid k = 1, \dots, \alpha\}$ induzieren unabhängige Intervallgraphen der Mächtigkeit α , so daß wir mit der Induktionshypothese für $t = 1$ aus jeder dieser Mengen ein Intervall $Y_{i_j}^j$ so wählen können, daß die gewählten Intervalle paarweise disjunkt sind. Wenden wir nun die Induktionshypothese nicht auf \mathcal{R}_j^{-1} ($j = 1, \dots, \alpha$), sondern auf die Teilrepräsentationen, die nur auf den $(t-1)$ Intervalltupeln basieren, bei denen die erste Komponente des entsprechenden t Intervalltupels in $Y_{i_j}^j$ liegt an (die Voraussetzungen sind erfüllt da jeweils α^{t-1} Intervalltupel mit ihrer ersten Komponente in $Y_{i_j}^j$ liegen), sind auch die ersten Komponenten der (durch die IH erhaltenen $(t-1)$ Tupel entsprechenden) t Tupel paarweise disjunkt. \square

Fortsetzung Beweis Satz 4.5

Nun zur Zerlegung von \mathcal{R} in Subrepräsentationen \mathcal{H}_i . Wie angekündigt, fließt die Forderung $\alpha(\mathcal{H}_i^{-1}) \leq f(\alpha)$ als Kriterium in die Konstruktion mit ein, wobei wir $f(\alpha) := (\alpha + 1)^{t-1} - 1$ wählen. Ein weiteres Kriterium für die Partitionierung ist die

Lage der ersten Intervallkomponenten, und zwar werden wir parallel zur Konstruktion der Subrepräsentationen \mathcal{H}_i eine \mathbb{R}_1 partitionierende Punktmenge konstruieren, so daß die ersten Intervalle von Tupeln aus verschiedenen Subrepräsentationen \mathcal{H}_i in verschiedenen Abschnitten von \mathbb{R}_1 liegen. (p, q) bezeichne ein offenes Intervall.

$p_0 := -\infty$.

$\mathcal{H}_1 := \mathcal{R}[\{v \mid I_1^v \subset (p_0, p_1)\}]$, wobei $p_1 \in \mathbb{R}_1 \cup \{+\infty\}$ maximal so gewählt ist, daß $\alpha(\mathcal{H}_1^{-1}) \leq (\alpha + 1)^{t-1} - 1$.

$\mathcal{H}_{i+1} := \mathcal{R}[\{v \mid I_1^v \subset (p_i, p_{i+1})\}]$, wobei wiederum $p_{i+1} \in \mathbb{R}_1 \cup \{+\infty\}$ maximal so gewählt ist, daß $\alpha(\mathcal{H}_{i+1}^{-1}) \leq (\alpha + 1)^{t-1} - 1$.

Sei m maximal so daß $p_m < +\infty$. Wir zeigen nun mit Lemma 6.2, daß $m \leq \alpha$ gilt: Betrachten wir die Subrepräsentationen $\hat{\mathcal{H}}_i$, die neben den Intervalltupeln von \mathcal{H}_i auch das Tupel enthalten, dessen rechter Endpunkt der ersten Intervallkomponente gleich p_i ist (also $\hat{\mathcal{H}}_i := \mathcal{R}[\{v : I_1^v \subset (p_{i-1}, p_i)\}]$ ($i = 1, \dots, m$)). ($(p, q]$ bezeichnet das halboffene Intervall.) Nach Wahl von p_i gilt: $\alpha(\hat{\mathcal{H}}_i^{-1}) = (\alpha + 1)^{t-1}$. Wäre $m \geq \alpha + 1$ könnten wir nach Lemma 6.2 aus jedem $\hat{\mathcal{H}}_i^{-1}$ ($1 \leq i \leq \alpha + 1$) ein $(t-1)$ -Intervalltupel wählen, so daß diese $(t-1)$ -Intervalltupel unabhängig sind. Da die ersten Intervallkomponenten der zu den ausgewählten $(t-1)$ -Tupeln gehörenden t -Tupel durch die p_i voneinander getrennt sind, wären auch die t -Tupeln unabhängig, was $\alpha(\mathcal{R}) \geq \alpha + 1$ zur Folge hätte.

Jede der \mathcal{H}_i^{-1} ($i = 1, \dots, m+1$) läßt sich mit maximal $\tau^*(\mathfrak{U}^{t-1}\mathcal{INT}, (\alpha + 1)^{t-1} - 1)$ Punkten überdecken. Eine \mathcal{H}_i^{-1} überdeckende Punktmenge überdeckt auch \mathcal{H}_i . Für die Intervalltupel aus \mathcal{R} , die in keiner Subrepräsentation \mathcal{H}_i vertreten sind, gilt, daß ihre erste Intervallkomponente mindestens ein p_i enthält, so daß diese durch α Punkte überdeckt werden können. Insgesamt haben wir:

$\tau^*(\mathfrak{U}^t\mathcal{INT}, \alpha) \leq (\alpha + 1)\tau^*(\mathfrak{U}^{t-1}\mathcal{INT}, (\alpha + 1)^{t-1} - 1) + \alpha$, was zu beweisen war. \square

6.3 Post Scriptum

Bezüglich der χ -Schranke für Rechteckgraphen ist es noch gelungen, die Konstante der $O(\omega^2)$ Schranke aus Satz 3.10 von 4 auf 3 zu reduzieren, wobei die neue Schranke für $\omega \geq 5$ bessere Werte liefert als die alte:

Satz 6.3.

$$\chi^*(2\mathcal{BOX}, \omega) \leq 3\omega^2 - 2\omega - 1$$

Beweis: Sei $G = (V, E)$ ein Rechteckgraph, $\omega = \omega(G)$ und \mathcal{R} eine Repräsentation von G . Zunächst partitionieren wir V in Mengen V_1, \dots, V_ω , die je in \mathcal{R} eine kreuzungsfreie Subrepräsentation induzieren: Wir starten mit einer Familie $(V_i)_{i \geq 1}$ leerer Mengen, betrachten die Knoten in der durch die linken Endpunkte der horizontalen Intervallkomponente festgelegten Reihenfolge und fügen Knoten v dem minimal indizierten V_i zu, so daß $\mathcal{R}[V_i \cup v]$ kreuzungsfrei ist. Dieses Vorgehen liefert eine Partitionierung in maximal ω Mengen, denn es gilt:

(\dagger): In der Box eines Knotens v aus V_i gibt es einen horizontalen Streifen ($I_1^v \times I'$ mit $I' \subset I_2^v$), der in den Boxen von Knoten v_1, \dots, v_{i-1} mit $v_j \in V_j$ enthalten ist. (Induktion über i : für $i = 1$ ist nichts zu zeigen, sei also $i > 1$, $v \in V_i$. Da $v \notin V_{i-1}$ muß ein w in V_{i-1} existieren, dessen Box die Box von v kreuzt. Da w schon in V_{i-1} enthalten sein mußte, bevor wir v V_i zugewiesen haben, muß box_w den horizontalen, und box_v den vertikalen Balken der Kreuzung darstellen. Mit der Induktionshypothese folgt die Behauptung.)

Wäre also $V_{\omega+1}$ nicht leer, würde in \mathcal{R} eine $\omega + 1$ Clique vorliegen.

Nun werden wir (\dagger) ausnutzen, um die Cliquenzahl der Repräsentationen $\mathcal{R}[V_i]$ einzuschränken. Betrachten wir einen Punkt p und die Menge V^p der Knoten aus V_i , deren Boxen p enthalten. Da jede der Boxen aus V_p einen horizontalen Streifen

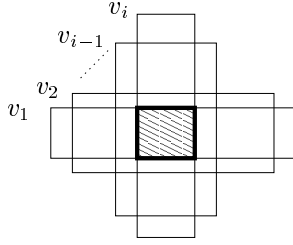


Abbildung 15: Für $v \in V_i$ ist box_v die schmalste Box einer i -Kreuzung

enthält, der in \mathcal{R} in $i - 1$ Boxen liegt, die nicht aus V_i sind, muß für die vertikalen Intervallkomponenten jeder Box aus V^p gelten, daß sie ein Teilintervall enthält, dessen Punkte in maximal $\omega - i$ der vertikalen Intervallkomponenten der anderen Boxen aus V^p liegen. Dadurch wird die Größe von V^p auf maximal $2(\omega - i + 1)$ beschränkt (Angenommen nicht. Sei $m := (\omega - i + 1)$, I_1, \dots, I_{2m+1} seien die vertikalen Intervallkomponenten der Boxen aus V_p , mit $k < l \Rightarrow \min(I_k) < \min(I_l)$. Für $j > m$ liegt der linke Intervallabschnitt $[\min(I_j), p]$ vollständig in den Intervallen I_1, \dots, I_m . Also muß der durch (\dagger) geforderte Abschnitt für $j > m$ im Bereich $[p, \max(I_j)]$ liegen. Aber für das Intervall, dessen rechter Endpunkt minimal ist unter den Intervallen $(I_j)_{j>m}$ ist auch die gesamte rechte 'Hälfte' des Intervalls in m anderen Intervallen enthalten.)

Wir können also feststellen:

$$\omega(G[V_i]) \leq \min \begin{cases} 2(\omega - i + 1) \\ \omega \end{cases}$$

Mit Lemma 3.9 gilt, daß ein kreuzungsfrei repräsentierbarer Rechteckgraph H $4(\omega(H) - 1)$ färbbar ist, also haben wir:

$$\chi(G) \leq \sum_{i=1}^{\omega} \chi(G[V_i]) \leq \sum_{i=1}^{\lfloor \omega/2 \rfloor + 1} 4(\omega - 1) + \sum_{i=\lfloor \omega/2 \rfloor + 2}^{\omega} 4(2(\omega - i + 1) - 1) \leq 3\omega^2 - 2\omega$$

Wegen (\dagger) gilt außerdem, daß $\mathcal{R}[V_\omega]$ horizontal einfach, also $2\omega(G[V_\omega]) - 1$ färbbar ist, was (für $\omega(G) > 1$) noch eine Verbesserung der Schranke um eins liefert.

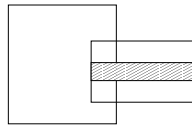


Abbildung 16: ein solcher Boxenschnitt ist in $\mathcal{R}[V_\omega]$ nicht möglich, da der (\dagger) -Streifen der rechten Box eine $\omega + 1$ Clique in \mathcal{R} zur Folge hätte

□

Es ist noch anzumerken, daß dieser Beweis konstruktiv ist. Der einzige offene Punkt ist die durch $4(\omega(G[V_i]) - 1)$ beschränkte Färbung der durch die V_i induzierten Subgraphen, da wir Lemma 3.9 bemühen, welches auf dem nichtkonstruktiv bewiesenen Lemma 3.7 beruht. Allerdings haben wir im Beweis des letzteren gezeigt, daß in einem kreuzungsfrei repräsentierbaren Rechteckgraphen ein Knoten mit Grad kleiner als $4(\omega - 1)$ existieren muß, was sich in Form einer Eingabereihenfolge für den Greedy Algorithmus konstruktiv umsetzen läßt.

Literatur

- [1] A.A. Ageev *A triangle-free circle graph with chromatic number 5*, Discrete Math. 152 (1996) 295-298.
- [2] E. Asplund, B. Grünbaum, *On a coloring problem*, Math. Scand. 8 (1960), 181-188.
- [3] J. P. Burling, *On coloring problems of families of polytopes*, Ph. D. Thesis, University of Colorado, 1965.
- [4] M. Dhurandhar, *On the chromatic number of a graph with two forbidden subgraphs*, J. Comb. Theory, Series B 46 (1989), 1-6.
- [5] A. Graef, M. Stumpf, G. Weissenfels, *On coloring unit disk graphs*, Algorithmica 20, No.3 (1998), 277-293.
- [6] A. Gyárfás, *On the chromatic number of multiple interval graphs and overlap graphs*, Discrete Math. 55 (1985), 161-166.
- [7] A. Gyárfás, *Problems from the world surrounding perfect graphs*, Zastosowania Matematyki XIX, 3-4 (1987), 413-441.
- [8] A. Gyárfás, J. Lehel, *A Helly type problem in trees*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 4. *Combinatorial Theory and its Applications* (1969), 571-584.
- [9] A. Gyárfás, J. Lehel, *Coloring and covering problems for relatives of intervals*, Discrete Math. 55 (1985), 167-180.
- [10] T.R. Jensen, B.Toft, *Graph coloring problems*, Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization, ISBN 0-471-02865-7
- [11] I.A. Karapetian, *On coloring circular arc graphs*, Dokl. Akad. Nauk Armjan. SSR 5 (1980), 306-311 (auf russisch).
- [12] H.A. Kierstead, *On the chromatic index of multigraphs without large triangles*, J. Combin. Theory Ser. B 36 (1984), 156-160.
- [13] H.A. Kierstead, S.G. Penrice, *Radius two trees specify χ -bounded classes*, J. Graph Theory, Vol. 18, No. 2 (1994), 119-129.
- [14] A. Kostochka, *On upper bounds on the chromatic number of graphs*, Transactions of the Institute of Mathematics (Siberian Branch of the Academy of USSR), vol. 10 (1988), 204-226 (auf russisch)
- [15] A. Kostochka, J. Kratochvíl *Covering and coloring polygon-circle graphs*, 1997
- [16] E. Malesinska, *Graph-theoretical models for frequency assignment problems*, Dissertation, TU-Berlin, 1997
- [17] M.V. Marathe, H.B. Hunt, S.S. Ravi, *Efficient approximation algorithms for domatic partition and on-line coloring of circular arc graphs*, Discrete Appl. Math. 64, No.2 (1996), 135-149.
- [18] R. Peeters, *On coloring j -unit sphere graphs*, FEW 512, Department of Economics, Tilburg University, NL, 1991
- [19] A. Tucker, *Coloring a family of circular arcs*, SIAM J. Appl. Math. 3 (1975), 493-502.
- [20] S. Wagon, *A bound on the chromatic number of graphs without certain induced subgraphs*, J. Combin. Theory Ser. B 29 (1980), 345-346.