

D I P L O M A R B E I T

# Kontaktdarstellungen von planaren Graphen

ausgeführt am

Institut für Mathematik  
Technische Universität Berlin

unter Anleitung von

Prof. Dr. Stefan Felsner

durch

Julia Rucker

Berlin, Januar 2011

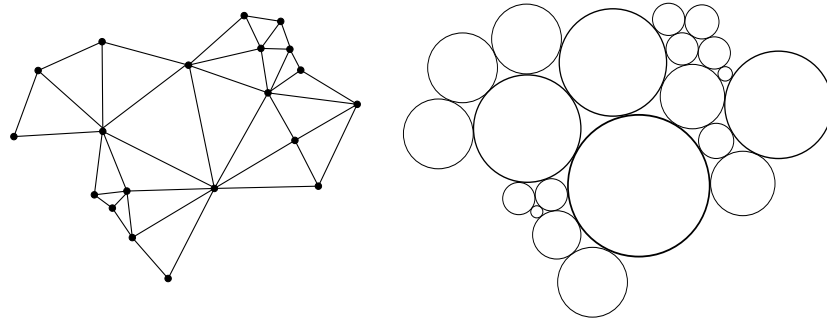
In dieser Diplomarbeit geht es um Dreiecks- und Rechteckskontaktdarstellungen planarer Graphen. Es wird untersucht, wann sie existieren und wie man sie konstruieren kann. Besonderen Augenmerk erhalten Kontaktdarstellungen mit gleichseitigen Dreiecken bzw. Quadraten.

# Vorwort

Eine Kontaktdarstellung eines planar eingebetteten Graphen ist ein System von Objekten mit den folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Knoten von  $G$  wird durch ein Objekt repräsentiert.
2. Wenn zwei Knoten im Graphen adjazent sind, so berühren sich die entsprechenden Objekte auf eine noch näher zu definierende, objektabhängige Weise. Wenn zwei Knoten im Graphen nicht adjazent sind sind die entsprechenden Objekte disjunkt.

Kontaktdarstellungen von Graphen sind bereits viel studiert worden. Eines der bekannten Resultate hiervon ist das „Kissing Coins Theorem“ von Coebe, das besagt, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn er sich als Kreiskontaktdarstellung realisieren lässt.



Ein Graph mit einer Kreiskontaktdarstellung.

In dieser Diplomarbeit wird es im ersten Teil um Dreieckskontaktdarstellungen und im zweiten Teil um Rechteckskontaktdarstellungen gehen. Wann existieren diese Kontaktdarstellungen? Wie kann man sie konstruieren? Ein besonderer Fokus ist dabei auf Kontaktdarstellungen mit gleichseitigen Dreiecken bzw. Quadraten gesetzt.

---

Viele der Gedanken und Beweise gehen auf Gespräche mit Prof. Dr. Stefan Felsner zurück oder auf Skizzen, die er mir freundlicherweise überlassen hat.

## **Danksagung**

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Stefan Felsner für die Unterstützung bedanken und außerdem dafür, dass er immer Zeit hatte wenn ich eine Frage hatte und mir trotzdem große Freiheit gelassen hat. Außerdem bedanke ich mich bei meiner Familie und meinem Freund für ihre Geduld und bei Ulrich Niemeyer und Tillmann Miltzow für das Korrekturlesen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>0. Grundlagen</b>	<b>1</b>
0.1. Allgemeines . . . . .	1
0.2. Planare Graphen . . . . .	2
0.3. Matchings . . . . .	3
0.4. Flusstheorie . . . . .	3
0.5. Geordnete Spannbäume . . . . .	5
<b>I. Dreieckskontaktdarstellungen</b>	<b>6</b>
<b>1. Schnyder Woods</b>	<b>8</b>
1.1. Definition . . . . .	8
1.2. Schnyder-Woods & 3-Orientierungen . . . . .	8
1.3. Flips . . . . .	11
1.4. Potentiale . . . . .	12
1.5. Existenz und Erzeugung von Schnyder-Woods . . . . .	13
1.6. Schnyder-Woods und geordnete Spannbäume . . . . .	14
<b>2. Allgemeine Dreieckskontaktdarstellungen</b>	<b>18</b>
2.1. Existenz und Konstruktion von Dreieckskontaktdarstellungen . . .	18
2.2. Layouts . . . . .	23
<b>3. Gleichseitige Dreieckskontaktdarstellungen</b>	<b>28</b>
3.1. Entartung . . . . .	28
3.2. Idee für einen Ansatz zur Konstruktion gleichseitiger Dreieckskontaktdarstellungen . . . . .	29
3.3. Das Gleichungssystem . . . . .	32
3.3.1. Lösbarkeit I . . . . .	33
3.3.2. Beweis von Lemma 3.2 und Lösbarkeit II . . . . .	37

3.4. Experimente . . . . .	44
3.4.1. Ein Programm . . . . .	44
3.4.2. Algorithmen für die Konstruktion gleichseitiger Dreiecks- kontaktdarstellungen . . . . .	45
<b>II. Rechteckskontaktdarstellungen</b>	<b>47</b>
<b>4. Transversale Strukturen</b>	<b>49</b>
<b>5. Rectangular Duals</b>	<b>52</b>
5.1. Existenz von Rectangular Duals . . . . .	52
5.2. Konstruktion von Rectangular Duals . . . . .	56
<b>6. Quadratkontaktdarstellungen</b>	<b>58</b>
6.1. Entartung . . . . .	58
6.2. Satz über Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	59
6.3. Extremale Längen . . . . .	60
6.4. Beweis: Eindeutigkeit . . . . .	60
6.5. Beweis: Existenz . . . . .	61
<b>7. Quadratkontaktdarstellungen: Ein anderer Ansatz</b>	<b>65</b>
7.1. Layouts . . . . .	65
7.2. Das Gleichungssystem . . . . .	66
7.2.1. Lösbarkeit . . . . .	66
7.3. Neues Problem . . . . .	71

# 0. Grundlagen

## 0.1. Allgemeines

Ein *ungerichteter Graph*  $G = (V, E)$  besteht aus einer Menge  $V = V(G)$  von Knoten und einer Menge  $E = E(G) = \binom{V}{2}$  von Kanten. Wenn  $\{u, v\} \in E$ , dann heißen  $u$  und  $v$  *adjazent*. Wenn  $v \in e$ , dann heißen  $v$  und  $e$  *inzident*. Die *Nachbarschaft*  $N(v)$  eines Knotens  $v$  ist die Menge der zum  $v$  adjazenten Knoten, d.h.  $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ . Der *Grad* eines Knoten  $v$  ist definiert durch  $d(v) = |N(v)|$ .

Wir werden in der folgenden Arbeit oft gerichtete Kanten verwenden. Wenn wir von der Kante  $(u, v)$  (im Gegensatz zu  $\{u, v\}$ ) sprechen, meinen wir damit eine Kante, die von  $u$  nach  $v$  orientiert ist. Trotzdem werden wir die anderen oben definierten Begriffe im ungerichteten Sinn verwenden, denn die Orientierung auf unseren Graphen wird sich oft verändern, während der zugrunde liegende ungerichtete Graph gleich bleibt.

Ein *Weg* in  $G$  ist eine Folge  $v_1, \dots, v_n$  von Knoten aus  $V$ , so dass  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E \forall i = 1, \dots, n-1$  und so dass die Kanten  $\{v_i, v_{i+1}\}$  paarweise verschieden sind. Ein *Pfad* ist ein Kantenzug mit  $v_i \neq v_j$  wenn  $i \neq j, i, j = 1, \dots, n$ . Ein *Kreis* in  $G$  ist ein Weg mit  $\{v_r, v_0\} \in E$ . Ein *einfacher Kreis* oder *Zykel* ist ein Pfad mit  $\{v_r, v_0\} \in E$ . Ein *gerichteter Weg* bzw. *gerichteter Pfad* bzw. *gerichteter Kreis* bzw. *gerichteter Zykel* in  $G$  ist ein Weg bzw. Pfad bzw. Kreis bzw. Zykel, bei dem alle Kanten in die gleiche Richtung orientiert sind.

Als *von einer Kantenmenge*  $\tilde{E} \subseteq E$  *induzierten Graphen*  $G[\tilde{E}]$  bezeichnet man den Graphen  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  mit  $\tilde{V} = \{v \mid v \text{ ist inzident zu einer Kante } \tilde{e} \in \tilde{E}\}$ . Als *von einer Knotenmenge*  $\tilde{V} \subseteq V$  *induzierten Graphen*  $G[\tilde{V}]$  bezeichnet man den Graphen  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  mit  $\tilde{E} = \{e \mid e = \{u, v\} \text{ mit } u, v \in \tilde{V}\}$ .

Ein *Schnitt* in einem Graphen ist eine Kantenmenge  $\delta(X)$ , die zwischen einer

Knotenmenge  $X \subseteq V$  und  $V \setminus X$  liegt, d.h.  $\delta(X) := \{\{u, v\} \in E \mid u \in X, v \in V \setminus X\}$ .

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei Knoten einen Weg gibt. Ein Graph heißt *k-zusammenhängend*, wenn er nach Entfernen von beliebigen  $k - 1$  Knoten noch immer zusammenhängend ist.

Ein *trennendes Dreieck* ist ein Kreis der Länge 3, der sowohl in seinem Inneren als auch in seinem Äußeren mindestens einen Knoten hat.

**Satz 0.1.** *Ein Graph ist 3-zusammenhängend genau dann, wenn er keine trennenden Dreiecke enthält.*

## 0.2. Planare Graphen

Eine *Einbettung* eines Graphen ist eine Zeichnung des Graphen in der Ebene. Ein Graph heißt *planar*, wenn er eine planare Einbettung hat, das heißt wenn man ihn kreuzungsfrei in der Ebene zeichnen kann. Er heißt *maximal planar*, wenn er nach Hinzufügen einer beliebigen Kante nicht mehr planar ist. Wir bezeichnen die nicht begrenzte Fläche eines planar eingebetteten Graphen als *Außenfläche* oder *äußere Fläche* und die begrenzten Flächen als *innere Flächen*. Eine *Triangulierung* ist ein planar eingebetteter Graph, dessen Flächen bis auf die äußere Fläche Dreiecke sind. Wir nennen eine Triangulierung, die genau  $k$  Knoten an der Außenfläche hat eine *k-Triangulierung*.

Der *Dualgraph*  $G^*$  eines planar eingebetteten Graphen  $G$  ist ein Graph, der für jede Fläche von  $G$  einen Knoten besitzt und je eine Kante dazwischen für jede Kante, an die die entsprechenden Flächen gemeinsam grenzen.

**Satz 0.2.** *Der Dualgraph eines 3-zusammenhängenden planar eingebetteten Graphen ist eindeutig.*

**Satz 0.3.** *Eine k-Triangulierung mit  $n$  Knoten hat genau  $3n - k - 3$  Kanten und  $2n - k - 2$  innere Flächen.*

**Satz 0.4.** *Jede 3-Triangulierung ist 3-zusammenhängend.*

Eine *Region* in einem planar eingebetteten Graphen ist eine kantenzusammenhängende Menge von Flächen, d.h. eine zusammenhängende Menge von Knoten im Dualgraphen.



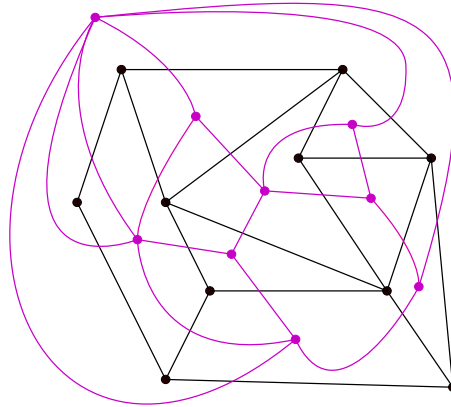


Abbildung 0.1.: Ein planar eingebetteter Graph und sein Dualgraph.

### 0.3. Matchings

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Ein *Matching* ist eine Menge  $M \subseteq E$ , so dass  $e_1 \cap e_2 = \emptyset$  für alle  $e_1, e_2 \in M$ . Ein *perfektes Matching* ist ein Matching  $M$ , bei dem

$$\bigcup_{e \in M} e = V.$$

Ein bzgl. eines Matchings  $M$  *alternierender Pfad* ist ein Pfad, bei dem abwechselnd  $M$ -Kanten und nicht- $M$ -Kanten auftreten.

### 0.4. Flusstheorie

Sei  $G$  ein Graph mit einer Orientierung der Kanten und mit ausgezeichneten Knoten  $s$  und  $t$ . Ein *s-t-Schnitt* in  $G$  ist ein Schnitt  $\delta(X)$  mit  $s \in X$  und  $t \notin X$ . Man kann eine Bewertung der Kanten von  $G$  als Vektor in  $\mathbb{R}^{|E(G)|}$  auffassen, wenn man die Kanten auf eine bestimmte Art ordnet. Für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^{|E(G)|}$  bezeichne  $v_e$  den zur Kante  $e$  gehörenden Eintrag von  $v$ . Eine Kantenbewertung  $w : E(G) \rightarrow (\mathbb{R})$  erfüllt die *Flusserhaltung im Knoten v*, wenn gilt:

$$\sum_{e=(v, \cdot)} w_e = \sum_{e=(\cdot, v)} w_e.$$

Ein *s-t-Fluss* ist eine Kantenbewertung, die in allen Knoten  $v \neq s, t$  die Flusserhaltung erfüllt.

Sei  $C$  ein ungerichteter Kreis in  $G$ . Der *Inzidenzvektor*  $\xi_C$  von  $C$  ist ein Vektor aus  $\{-1, 0, 1\}^{|E(G)|}$  für den gilt, dass

$$\xi_{C_e} = \begin{cases} -1 & e \text{ Rückwärtskante in } C \\ 0 & e \notin C \\ 1 & e \text{ Vorwärtskante in } C \end{cases}$$

Wir legen als Richtung hier den Uhrzeigersinn fest, d.h. eine Kante ist Vorwärtskante, wenn sie in  $C$  im Uhrzeigersinn gerichtet ist und Rückwärtskante wenn sie gegen den Uhrzeigersinn gerichtet ist. Sei  $S$  ein s-t-Schnitt in  $G$ . Der *Inzidenzvektor*  $\xi_S$  von  $S$  ist ein Vektor aus  $\{-1, 0, 1\}^{|E(G)|}$  für den gilt, dass

$$\xi_S = \begin{cases} -1 & e \text{ Rückwärtskante in } S \\ 0 & e \notin S \\ 1 & e \text{ Vorwärtskante in } S \end{cases}$$

Wir legen als Richtung hier die s-t-Richtung fest. Wenn also  $S = \delta(X)$ , so ist eine Kante Vorwärtskante, wenn sie von  $X$  nach  $V \setminus X$  gerichtet ist und Rückwärtskante wenn sie von  $V \setminus X$  nach  $X$  gerichtet ist. Der von den Inzidenzvektoren von Kreisen erzeugte Vektorraum heißt *Zykelraum*, der von den Inzidenzvektoren von Schnitten erzeugte Vektorraum heißt *Kozykelraum*. Sei  $T$  ein spannender Baum von  $G$ . Ein Kreis  $C$  in  $G$  heißt *Fundamentalkreis bzgl.  $T$* , wenn er genau eine Kante aus  $E(G) \setminus E(T)$  und sonst nur Kanten aus  $E(T)$  enthält. Ein Schnitt  $S$  heißt *Fundamentalschnitt bzgl.  $T$* , wenn er genau eine Kante aus  $E(T)$  und sonst nur Kanten aus  $E(G) \setminus E(T)$  enthält.

**Satz 0.5.** • Die Inzidenzvektoren von Fundamentalkreisen bilden eine Basis des Zykelraums. Dieser hat Dimension  $|E(G)| - |V(G)| + 1$ .

- Die Inzidenzvektoren von Fundamentalschnitten bilden eine Basis des Kozykelraums. Dieser hat Dimension  $|V(G)| - 1$ .

**Satz 0.6.** Zykel- und Kozykelraum sind orthogonal zueinander. Insbesondere gilt deshalb:  $\text{Zykelraum} \oplus \text{Kozykelraum} = \mathbb{R}^{|E(G)|}$ .

## 0.5. Geordnete Spannbäume

Sei  $G$  ein planar eingebetteter Graph und sei  $T$  ein in  $r$  wurzelnder spannender Baum von  $G$ . Zwei Knoten heißen *nicht verwandt* bzgl.  $T$  wenn sie verschieden sind und keiner der beiden ein Vorfahr des anderen ist. Eine Kante heißt *nicht verwandt* bzgl.  $T$  wenn ihre Endpunkte nicht verwandt bzgl.  $T$  sind.

Sei  $v_1, \dots, v_n$  die Präordnung im Gegenuhrzeigersinn, das bedeutet wir starten in  $r$  und nummerieren dann rekursiv in jedem Teilbaum zunächst die Wurzel und dann die Kinder im Gegenuhrzeigersinn, also von links nach rechts. Sei  $num : V \rightarrow \mathbb{N}$  definiert durch  $num(v_i) = i$ .

Ein Knoten  $v_i$  heißt *geordnet* bzgl.  $T$  wenn seine Nachbarn in  $G$  die folgenden (möglicherweise leeren) vier Blöcke im Gegenuhrzeigersinn um  $v_i$  bilden:

- $B_1(v_i)$ : der Vater von  $v_i$
- $B_2(v_i)$ : die nicht verwandten Nachbarn  $v_j$  von  $v_i$  mit  $j < i$
- $B_3(v_i)$ : die Kinder von  $v_i$
- $B_4(v_i)$ : die nicht verwandten Nachbarn  $v_j$  von  $v_i$  mit  $j > i$

$T$  heißt *geordneter Spannbaum* von  $G$  wenn  $v_1 = r$  auf der Grenze der Außenfläche von  $G$  liegt und wenn jeder Knoten  $v_i, 1 \leq i \leq n$  geordnet bzgl.  $T$  ist.

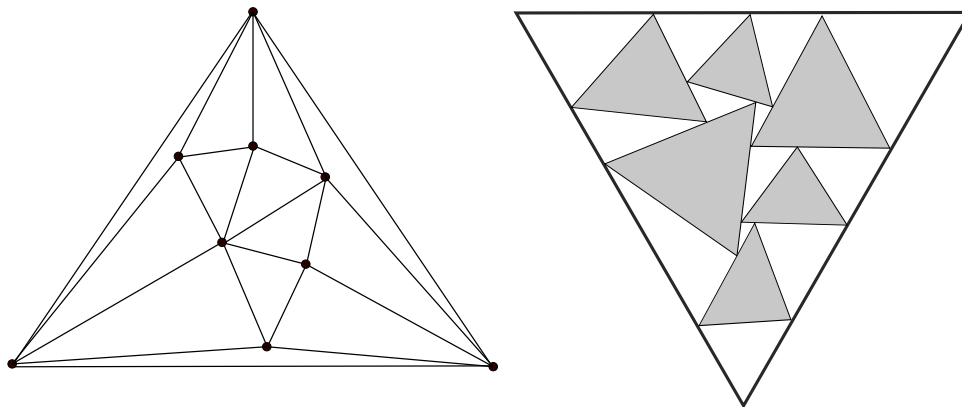
Diese Definition ist aus [13] übernommen.

**Teil I.**

# **Dreieckskontaktdarstellungen**

Eine Dreieckskontakt Darstellung einer 3-Triangulierung  $G$  ist ein System von Dreiecken mit den folgenden Eigenschaften:

- Jeder Knoten  $v$  von  $G$  wird durch ein Dreieck  $D_v$  repräsentiert.
- Wenn zwei Knoten in  $G$  adjazent sind, so berühren sich die entsprechenden Dreiecke der Dreieckskontakt Darstellung in genau einem Punkt, ansonsten sind sie disjunkt.



**Abbildung:** Ein Graph und eine seiner Dreieckskontakt Darstellungen. Von den Dreiecken der äußeren Knoten wurde nur jeweils eine Seite gezeichnet.

Wir nennen eine Dreieckskontakt Darstellung zu einem Graphen *gleichseitig*, wenn alle Dreiecke, die Knoten repräsentieren gleichseitig und bis auf Verschiebung und Skalierung identisch sind.

# 1. Schnyder Woods

Wir werden im folgenden Kapitel nur 3-Triangulierungen betrachten, da sie für unsere Zwecke ausreichen.

## 1.1. Definition

Sei  $G$  eine 3-zusammenhängende 3-Triangulierung, deren 3 Knoten an der Außenfläche mit  $w_1, w_2, w_3$  bezeichnet werden. Ein in  $w_1, w_2, w_3$  wurzelnder *Schnyder Wood*  $S$  auf  $G$  ist eine Orientierung und Färbung (mit den Farben rot (1), grün (2), blau (3)) der inneren Kanten von  $G$ , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Alle zu  $w_1$  inzidenten Kanten sind rot, alle zu  $w_2$  inzidenten Kanten sind grün und alle zu  $w_3$  inzidenten Kanten sind blau.
- Jeder innere Knoten hat genau eine rote, genau eine grüne und genau eine blaue ausgehende Kante, die im Uhrzeigersinn angeordnet sind. Die eingehenden Kanten im Intervall zwischen zwei ausgehenden Kanten sind jeweils mit der dritten Farbe gefärbt.

Wir nennen den von den roten Kanten induzierten Teilgraphen  $T_1$ , den von den grünen Kanten induzierten Teilgraphen  $T_2$  und den von den blauen Kanten induzierten Teilgraphen  $T_3$  und bezeichnen  $S$  auch als  $(T_1, T_2, T_3)$ .

## 1.2. Schnyder-Woods & 3-Orientierungen

Sei  $G$  eine 3-zusammenhängende 3-Triangulierung. Die Kanten von  $G$  seien so orientiert, dass jeder Knoten, der nicht auf dem Rand der Außenfläche liegt genau 3

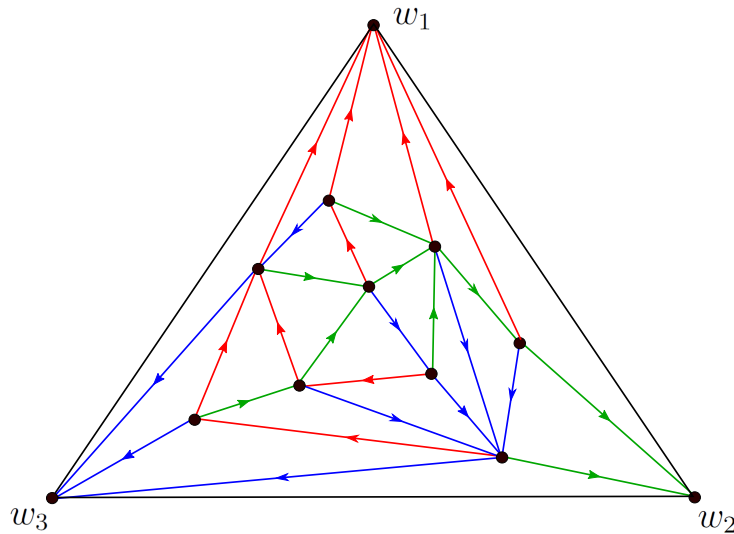


Abbildung 1.1.: Ein Graph mit einem Schnyder-Wood.

ausgehende Kanten hat. Wir nennen eine solche Orientierung eine *3-Orientierung*. Trivialerweise ist ein Schnyder-Wood eine 3-Orientierung wenn man die Kantenfarben vernachlässigt.

Ein *balancierter Pfad* in einem Graphen mit 3-Orientierung ist ein gerichteter Weg, dessen innere Knoten jeweils eine ausgehende Kante zu jeder Seite des Weges haben. (Im Falle eines Schnyder-Woods handelt es sich hierbei also um einen gerichteten einfarbigen Weg.)

**Lemma 1.1.** *Sei  $G = (V, E)$  eine 3-zusammenhängende 3-Triangulierung mit einer 3-Orientierung. Dann sind an jedem gerichteten Kreis mindestens 3 verschiedene balancierte Pfade beteiligt. Insbesondere enthält kein balancierter Pfad einen gerichteten Kreis.*

*Beweis.* Sei  $C$  ein gerichteter Kreis in  $G$ . Sei  $H$  der Teilgraph von  $G$ , der alle Knoten und Kanten von  $G$  enthält, die auf  $C$  oder außerhalb von  $C$  liegen. Sei  $d^+(H)$  die Anzahl Kanten, die nicht in  $H$  sind, aber als Startknoten einen Knoten aus  $V(H)$  haben. Dann gelten folgende Tatsachen:

- $|E(H)| = 3 * |V(H)| - |V(C)| - 3$ , wegen Satz 0.3 und da alle Flächen von  $H$  abgesehen von der, die durch  $C$  definiert wird, Dreiecke sind.
- $\sum_{x \in V(H)} d_G^+(x) = 3|V(H)| - 6$  (die  $-6$  kommt daher, dass auch  $w_1, w_2, w_3$

in  $H$  enthalten sind)

- $d^+(H) = \sum_{v \in V(H)} d_G^+(x) - |E(H)|$ , da  $\sum_{v \in V(H)} d_G^+(x)$ , die Kanten von  $G$  zählt, die ihren Startknoten in  $H$  haben und diese lassen sich aufteilen in die Kanten in  $E(H)$  und die Kanten, die nicht in  $E(H)$  sind, aber ihren Startknoten in  $E(H)$  haben (also  $d^+(H)$ ).

Zusammengesetzt ergibt das:

$$d^+(H) = \sum_{v \in V(H)} d_G^+(x) - |E(H)| = 3|V(H)| - 6 - |E(H)| = |V(C)| - 3$$

Das bedeutet, dass mindestens drei Knoten auf  $C$  keine ausgehende Kante haben, die in  $C$  hineinzeigt. Seien  $v_i^{in}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $k \geq 3$ , Knoten, die keine ausgehende Kante haben, die in  $C$  hineinzeigt. Seien  $v_j^{out}$ ,  $j = 1, \dots, l$  Knoten, die zwei ausgehende Kanten haben, die in  $C$  hineinzeigen.

Es lässt sich leicht per Induktion über  $k$  zeigen, dass  $k + l$  immer ungerade ist. Für jeden Knoten  $v \in \{v_i^{in}, i = 1, \dots, k\} \cup \{v_j^{out}, j = 1, \dots, l\}$  gilt, dass die Kante auf  $C$  vor  $v$  und die Kante auf  $C$  nach  $v$  zu unterschiedlichen balancierten Pfaden gehören. Da  $k + l$  ungerade ist, kann der Fall, dass zwei balancierte Pfade immer abwechselnd entlang  $C$  auftreten nicht eintreten. Also sind an  $C$  mindestens 3 balancierte Pfade beteiligt.

□

**Bemerkung:** Insbesondere sind bei einem Graphen mit Schnyder-Wood an jedem gerichteten Kreis Kanten aller drei Farben beteiligt sind.

**Satz 1.2.** *3-Orientierungen auf einer 3-zusammenhängenden 3-Triangulierung  $G$  stehen in Bijektion mit Schnyder-Woods auf  $G$ .*

*Beweis.* Hat man eine 3-Orientierung gegeben, so kann man, solange es eine ungefärbte Kante gibt, mit dieser starten und den balancierten Pfad beschreiten, den sie definiert. Da wir auf diese Weise jeden Knoten außer den  $w_i, i = 1, 2, 3$  verlassen können müssen wir entweder auf einem gerichteten Kreis landen oder in einer der  $w_i, i = 1, 2, 3$ . Wegen Lemma 1.1 kann ein balancierter Pfad jedoch keinen gerichteten Kreis enthalten. Abhängig davon in welchem Knoten der drei  $w_i$  wir landen, färben wir alle Kanten des Pfades in Farbe 1, 2 oder 3. Dieses Vorgehen ergibt einen eindeutigen Schnyder-Wood. Die andere Richtung ist trivial.

□



**Satz 1.3.** *Der Graph  $T_i$  ist ein gerichteter Baum mit Wurzel  $w_i$ .*

*Beweis.* Der von den Kanten der Farbe  $i$  induzierte Teilgraph  $T_i$  ist wegen Lemma 1.1 azyklisch und hat  $n-3$  Kanten und  $n-2$  Knoten. Jeder Knoten  $v \in V(T_i)$ ,  $v \neq w_i$  hat genau eine ausgehende Kante.  $\square$

Wir bezeichnen ab sofort den balancierten Pfad der Farbe  $i$  von einem Knoten  $v$  zur Wurzel  $w_i$  mit  $P_i(v)$ . Wenn Knoten  $x$  auf  $P_i(v)$  liegt, so nennen wir das Teilstück von  $P_i(v)$ , das zwischen  $v$  und  $x$  liegt  $P_i(v, x)$ .

Außerdem nennen wir den Vater von  $v$  im roten Baum  $T_1$   $par_r(v)$  oder  $par_1(v)$ , den grünen Vater  $par_g(v)$  oder  $par_2(v)$  und den blauen Vater  $par_b(v)$  oder  $par_3(v)$ .

**Lemma 1.4.** *Die Pfade  $P_1(v)$ ,  $P_2(v)$  und  $P_3(v)$  haben keinen Knoten außer  $v$  gemeinsam.*

*Beweis.* Sei  $v$  ein Knoten und  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ . Angenommen  $P_i(v)$  und  $P_j(v)$  haben einen weiteren Knoten  $x \neq v$  gemeinsam. Dann bilden  $P_i(v, x)$  und  $P_j(v, x)$  einen ungerichteten Kreis  $C$ .  $x$  muss eine ausgehende Kante der Farbe  $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$  haben, die in den Kreis  $C$  hineinzeigt. Der Pfad  $P_k(x)$  muss  $C$  irgendwann wieder verlassen, um letztendlich in  $w_k$  anzukommen, also trifft er irgendwann auf einen Knoten  $y$ , der auf  $C$  liegt und somit entweder auf  $P_i(v, x)$  oder auf  $P_j(v, x)$ .  $y \in P_i(v) \Rightarrow P_k(x, y)$  bildet zusammen mit  $P_i(y, x)$  einen gerichteten Kreis an dem nur zwei Farben beteiligt sind.  $y \in P_j(v) \Rightarrow P_k(x, y)$  bildet zusammen mit  $P_j(v, x)$  einen gerichteten Kreis an dem nur zwei Farben beteiligt sind. Widerspruch zu Lemma 1.1 !.  $\square$

In diesem Abschnitt wurden Definitionen und Erkenntnisse aus [3] und [5] verwendet.

## 1.3. Flips

Wir werden später oft zwischen den verschiedenen Schnyder-Woods einer zugrundeliegenden 3-Triangulierung wechseln müssen. Dafür führen wir *Flips* ein. Sei  $G$  eine 3-zusammenhängende 3-Triangulierung mit 3-Orientierung  $S$ . Eine Fläche von  $G$  heißt *flippbar bzgl.  $S$*  wenn ihre drei begrenzenden Kanten einen

gerichteten Kreis bilden. Ein Flip funktioniert nun folgendermaßen: Nimm eine bzgl.  $S$  flippbare Fläche  $f$  und drehe alle ihre 3 Kanten um. Das ergibt trivialeweise eine neue 3-Orientierung. Wenn man weiß, dass Schnyder Woods und 3-Orientierungen äquivalente Konzepte sind ist sofort klar, dass das für Schnyder Woods natürlich genauso gilt, nur dass man die entsprechenden Kanten noch umfärben muss. Wir nennen den Schnyder Wood, der aus  $S$  durch Flippen von  $f$  hervorgeht  $S_f$ . Statt einer Fläche kann man natürlich auch gleich einen größeren gerichteten Kreis flippen, das nennen wir *Kreis-Flip*. Wir nennen zwei Schnyder Woods  $S_1, S_2$  benachbart, wenn man  $S_2$  durch Flippen einer Fläche aus  $S_1$  erhalten kann. Manchmal müssen wir noch zusätzlich zwischen Flips unterscheiden, die einen ursprünglich im Uhrzeigersinn orientierten Kreis in einen im Gegenuhrzeigersinn orientierten Kreis verwandeln (wir nennen sie  $>Flips$ ) und umgekehrt ( $<Flips$ ).

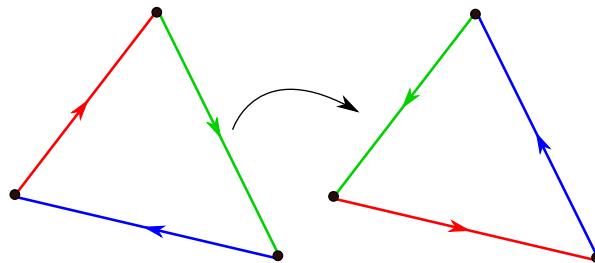


Abbildung 1.2.: Ein  $>Flip$  einer Fläche.

Eine  $>Flip$ -Folge auf  $S$  ist eine Folge  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ , so dass  $f_1$   $>flippbar$  in  $S$  ist,  $f_2$  in  $S_{f_1}$ ,  $f_3$  in  $S_{f_3}$ , usw. Wir sagen eine  $>Flip$ -Folge  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$  auf  $S$  führt zu  $\tilde{S}$ , wenn  $S_{f_1, f_2, \dots, f_k} = \tilde{S}$ .

## 1.4. Potentiale

Wir bezeichnen einen Schnyder-Wood auf  $G$ , der keine im Gegenuhrzeigersinn gerichteten Kreise enthält als *minimal* und einen Schnyder-Wood, der keine im

Uhrzeigersinn gerichteten Kreise enthält als *maximal*. Man kann zeigen, dass sowohl minimaler als auch maximaler Schnyder-Wood existieren und dass sie beide eindeutig sind (s. z.B. [2]). Wir bezeichnen den minimalen Schnyder-Wood mit  $S_{min}$  und den maximalen mit  $S_{max}$ .

Die Bezeichnungen minimal und maximal kommen daher, dass die Schnyder Woods eines Graphen einen distributiven Verband bezüglich der Relation  $\prec$  bilden, wobei für zwei Schnyder Woods  $S_1, S_2$  gilt, dass  $S_1 \prec S_2$ , wenn  $S_2$  durch eine  $>$ Flip-Folge von  $S_1$  erreichbar ist. Der minimale Schnyder Wood ist bei diesem Verband das minimale Element und der maximale Schnyder Wood das maximale [2].

Insbesondere ist dadurch natürlich jeder Schnyder Wood auf  $G$  durch  $>$ Flips von  $S_{min}$  aus erreichbar. Haben wir einen Schnyder Wood  $S$  auf  $G$  gegeben, so definieren wir das *Potential* von  $S$  als Länge einer kürzesten  $>$ Flip-Folge auf  $S_{min}$ , die zu  $S$  führt.

## 1.5. Existenz und Erzeugung von Schnyder-Woods

**Satz 1.5.** *Auf jedem maximalen planaren Graphen kann ein Schnyder Wood erzeugt werden.*

Um den Satz zu beweisen, kann man z.B. den 3-Zusammenhang von maximalen planaren Graphen ausnutzen und nach und nach und nach Kanten kontrahieren, so dass der resultierende Graph immer 3-zusammenhängend bleibt (siehe [5]). Aus diesem Beweis kann man auch einen Algorithmus zur Konstruktion von Schnyder Woods ableiten.

Man kann aber auch den folgenden Algorithmus aus [2], der sehr schön zu implementieren ist, zur Konstruktion eines Schnyder Woods auf einem maximal planaren Graphen  $G$  verwenden.

**Algorithmus 1.6** (Erzeugung von Schnyder-Woods). *Wir verwalten die ganze Zeit über einen Zykel  $Z$ . Die Kanten außerhalb von  $Z$  sind bereits gefärbt und orientiert, die Kanten innerhalb noch nicht.*

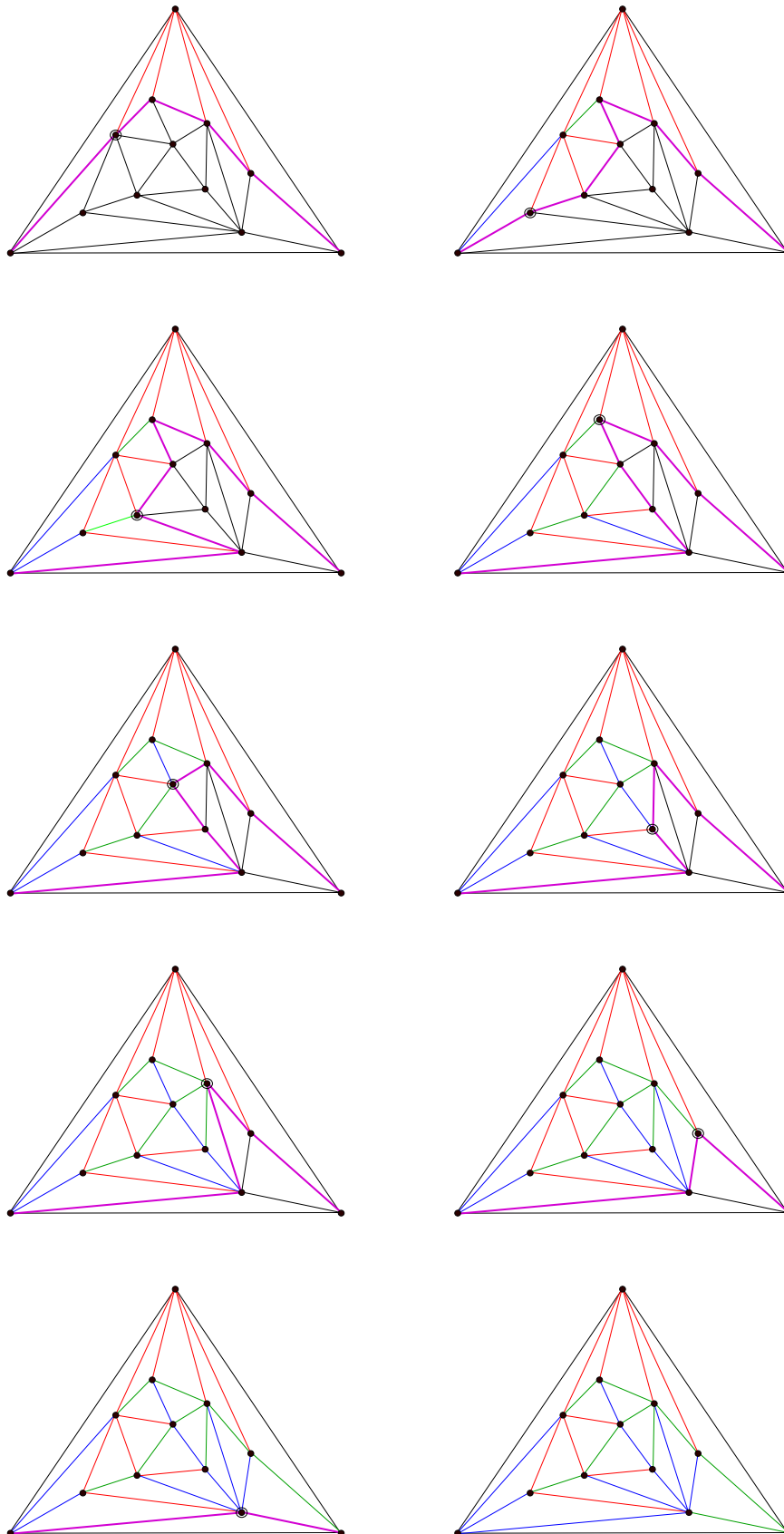
- *Initialisiere  $Z$  mit allen Nachbarn von  $w_1$  (das impliziert  $w_2$  und  $w_3$ ), färbe die Kanten zu den Knoten aus  $N(w_1) \setminus \{w_2, w_3\}$  rot und orientiere sie in Richtung  $w_1$ .*
- *Wähle einen Knoten  $v$  auf  $Z \setminus \{w_2, w_3\}$ , der zu keiner Sehne von  $Z$  inzident ist.*
- *Färbe die Kante zum linken Kreisnachbarn von  $v$  blau und die Kante zum rechten Kreisnachbarn grün und orientiere sie beide weg von  $v$ .*
- *Lösche  $v$  aus  $Z$  und nehme stattdessen die Nachbarn von  $v$  innerhalb von  $Z$  in der richtigen Reihenfolge in den Zykel auf. Färbe die entsprechenden Kanten rot und orientiere sie in Richtung  $v$ .*

**Bemerkung:** In [2] zeigt Brehm in Anlehnung an [11], dass mit diesem Algorithmus alle Schnyder Woods auf  $T$  erzeugt werden können. Welchen man erzeugt, hängt davon ab, in welcher Reihenfolge man die Knoten aus dem Zykel  $Z$  löscht. Wenn man beim Löschen immer den Knoten löscht, der auf  $Z$  im Uhrzeigersinn bezüglich Kantenzahl den kleinsten Abstand zu  $w_3$  hat, so erhält man den minimalen Schnyder-Wood, löscht man immer den Knoten, der auf  $Z$  im Gegen- uhrzeigersinn bezüglich Kantenzahl den kleinsten Abstand zu  $w_2$  hat, so erhält man den maximalen Schnyder-Wood.

## 1.6. Schnyder-Woods und geordnete Spannbäume

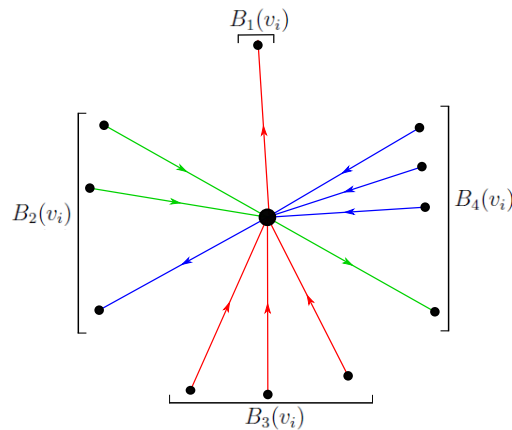
**Satz 1.7.** *Sei  $G$  eine 3-Triangulierung mit einem Schnyder-Wood  $(T_1, T_2, T_3)$ . Dann ist  $T_i \cup \{(w_i, w_{i+1}), (w_i, w_{i-1})\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , ein geordneter Spannbaum von  $G$ .*

*Beweis.* Um nicht zu viele Indizes verwenden zu müssen, zeigen wir die Behauptung nur für  $T := T_1 \cup \{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$ , der Beweis für die anderen Bäume ist natürlich analog.



**Abbildung 1.3.:** Schritte in Algorithmus 1.6. Der aktuelle Zykel ist jeweils lila gezeichnet, der Knoten, der als nächstes daraus gelöscht wird, ist markiert.

Sei  $v_1, \dots, v_n$  die Präordnung im Gegenuhrzeigersinn von  $T$ . Wir müssen zeigen, dass alle  $v_i$  bzgl.  $T$  geordnet sind. Wegen den Eigenschaften des Schnyder-Woods wissen wir bereits, dass die Nachbarn von  $v_i$  in Blöcken vorliegen.  $par_r(v_k)$  bildet den Block  $B_1(v_i)$ , der Endknoten der ausgehenden blauen Kante bildet gemeinsam mit den Startknoten der eingehenden grünen Kanten den Block  $B_2(v_i)$ , die Startknoten der eingehenden roten Kanten bilden  $B_3(v_i)$  und der Endknoten der ausgehenden grünen Kante bildet gemeinsam mit den Startknoten der eingehenden blauen Kanten den Block  $B_4(v_i)$ .



**Abbildung 1.4.:** Die Blöcke um  $v_i$  bzgl.  $T := T_1 \cup \{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$ .

Es bleibt also nur zu zeigen, dass

1. Wenn  $v_j \in B_2(v_i)$  oder  $v_j \in B_4(v_i)$ , so sind  $v_i$  und  $v_j$  nicht verwandt.
2.  $v_j \in B_2(v_i) \Rightarrow j < i$  und  $v_j \in B_4(v_i) \Rightarrow j > i$

zu 1.: Sei  $v \in \{v_i, v_j\}, w \in \{v_i, v_j\}, v \neq w$ . Angenommen  $v$  und  $w$  sind verwandt, dann ist einer der beiden ein Vorfahre des anderen, o.B.d.A. sei  $v$  ein Vorfahr von  $w$ . Dann gibt es einen gerichteten roten Pfad  $P$  von  $w$  nach  $v$ . Da  $v_j \in B_2(v_i) \cup B_4(v_i)$  gibt es zwischen  $v$  und  $w$  eine Kante, wir nennen sie  $e$ .

1.Fall:  $e$  ist von  $v$  nach  $w$  gerichtet. Dann bildet  $P$  zusammen mit  $e$  einen gerichteten Kreis, an dem nur zwei Farben beteiligt sind. Widerspruch zu Lemma 1.1!

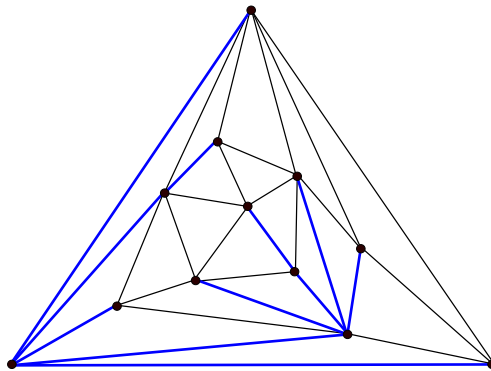
2.Fall:  $e$  ist von  $w$  nach  $v$  gerichtet. Dann haben die Pfade  $P_1(w)$  und  $P_2(w)$  bzw.  $P_3(w)$  (je nachdem welche Farbe  $e$  hat) zusätzlich zu  $w$  einen gemeinsamen Knoten, nämlich  $v$ . Widerspruch zu Lemma 1.4 !

zu 2.: Wir zeigen nur  $v_j \in B_2(v_i) \Rightarrow j < i$ , der zweite Teil verläuft analog. Sei  $v_j \in B_2(v_i)$ . Angenommen  $j > i$ . Sei  $v$  der eindeutige gemeinsame Vorfahr von  $v_i$  und  $v_j$ , bei dem  $v_i$  im linken Teilbaum liegt und  $v_j$  im rechten und  $e$  die Kante zwischen  $v_i$  und  $v_j$ .  $P_1(v_i, v)$  und  $P_1(v_j, v)$  bilden gemeinsam mit  $e$  einen ungerichteten Kreis  $C$ . Da  $v_j \in B_2(v_i)$  gibt es nur zwei Fälle:

1.Fall:  $e$  ist blau und von  $v_i$  nach  $v_j$  orientiert. Dann hat  $v_j$  eine grüne ausgehende Kante, die in  $C$  hineinzeigt, die erste Kante des Pfades  $P_2(v_j)$ .  $P_2(v_j)$  muss  $C$  irgendwann wieder verlassen, also gibt es einen Knoten  $y$  auf  $V(C) \cap V(P_2(v_j))$ .  $y$  kann wegen der Eigenschaften eines Schnyder-Woods nicht auf  $P_1(\text{par}_1(v_i))$  liegen und wegen Lemma 1.4 nicht auf  $P_1(\text{par}_1(v_j))$ .  $y = v_j$  geht natürlich auch nicht. Also muss  $y = v_i$  sein. Dann bilden aber  $P_2(v_j)$  und  $e$  einen gerichteten Kreis an dem nur zwei Farben beteiligt sind. Widerspruch zu Lemma 1.1!

2.Fall:  $e$  ist grün und von  $v_j$  nach  $v_i$  orientiert. Analog wie in Fall 1 für  $P_3(v_i)$  statt  $P_2(v_j)$ .

□



**Abbildung 1.5.:** Jeder der drei Bäume eines Schnyder-Woods bildet vereinigt mit den zwei richtigen Außenkanten einen geordneten Spannbaum.

## 2. Allgemeine Dreieckskontaktdarstellungen

### 2.1. Existenz und Konstruktion von Dreieckskontaktdarstellungen

Dass jeder maximale planare Graph eine Dreieckskontaktdarstellung besitzt, wurde von de Fraysseix, de Mendez und Rosentiel in [4] gezeigt. Im Folgenden wird eine Variante ihres Beweises aufgezeigt, bei der statt kanonischer Ordnungen ein anderes, aber äquivalentes Konzept verwendet wird: Die im Kapitel 0.5 eingeführten geordneten Spannbäume. Dabei nutzen wir den bereits bewiesenen Satz 1.7 aus, der besagt, dass jeder der drei Bäume des Schnyder-Woods vereinigt mit den beiden anderen ausgezeichneten Knoten und den zu ihnen führenden Kanten ein geordneter Spannbaum ist.

**Satz 2.1.** *Jeder maximale planare Graph  $G$  besitzt eine Dreieckskontaktdarstellung.*

*Beweis.* Wir fixieren eine beliebige planare Einbettung und betrachten  $G$  nun als eingebetteten Graphen. Sei  $S = (T_1, T_2, T_3)$  ein Schnyder-Wood auf  $G$  und sei  $v_1, \dots, v_n$  die Präordnung im Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $T := T_3 \cup \{(w_3, w_1), (w_3, w_2)\}$ , also bzgl. des blauen Baumes.

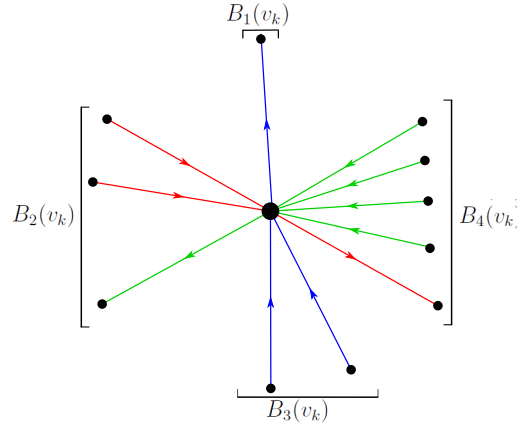
Diese Nummerierung ist die Reihenfolge, in der wir später die Dreiecke zeichnen werden. Weil  $T$  ein geordneter Spannbaum ist gelten die folgenden Tatsachen wenn wir das Dreieck zu Knoten  $v_k$  zeichnen:

1. Die Dreiecke zu  $par_g(v_k)$  bzw.  $par_b(v_k)$  und die Dreiecke zu den roten Kindern von  $v_k$  sind bereits gezeichnet (denn sie sind in  $B_1(v_k)$  beziehungsweise



$B_2(v_k)$ .

- Die bereits gezeichneten Nachbarn von  $v_k$  bilden ein Intervall in der Menge aller Nachbarn von  $v_k$  (denn  $B_1(v_k)$  und  $B_2(v_k)$  sind beides Blöcke und außerdem benachbart). Dabei ist  $par_b(v_k)$  ganz links im Intervall und  $par_g(v_k)$  ganz rechts.



**Abbildung 2.1.:** Die Blöcke um  $v_k$  bzgl.  $T_3 \cup \{(w_1, w_3), (w_2, w_3)\}$ .

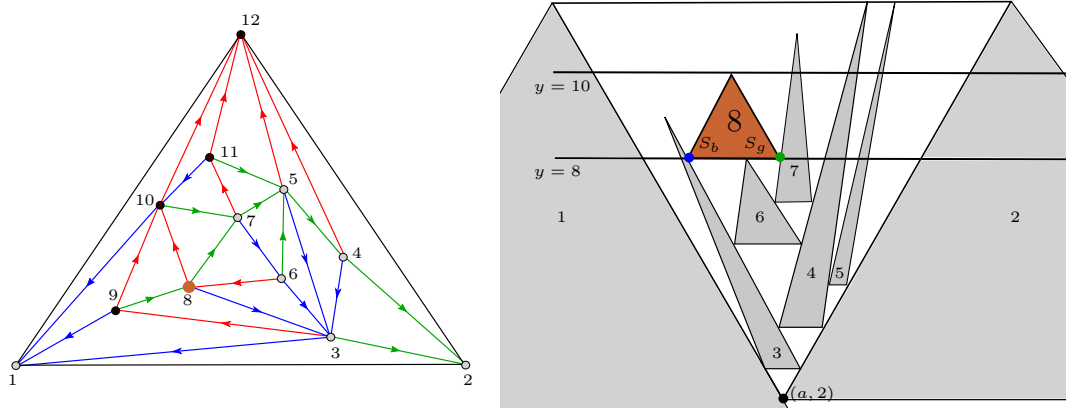
Das Dreieck zum Knoten  $v_k$  hat seine Basis parallel zur x-Achse auf der Höhe  $k$  und seine Spitze auf der Höhe  $num(par_r(v_k))$ . Wir beginnen mit der Dreieckskontaktdarstellung, die nur aus den Dreiecken zu  $v_1$  und  $v_2$  besteht, wobei die linke untere Ecke vom Dreieck zu  $v_2$  an die rechte Seite des Dreiecks zu  $v_1$  stößt und dieser Berührungspunkt die Koordinaten  $(a, 2)$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  beliebig, hat.

Angenommen  $v_1, \dots, v_{k-1}$  seien bereits gezeichnet. Wegen 1. wissen wir, dass  $par_g(v_k)$  und  $par_b(v_k)$  bereits gezeichnet wurden. Sei  $x_b$  ( $x_g$ ) die  $x$ -Koordinate des Schnittpunktes  $S_b$  ( $S_g$ ) von  $y = k$  mit der rechten Seite des Dreiecks zu  $par_b(v_k)$  (mit der linken Seite des Dreiecks zu  $par_g(v_k)$ ). Wir platzieren das Dreieck zu  $v_k$  mit den Koordinaten  $(x_b, k), (x_g, k), (\alpha_k x_b + (1 - \alpha_k)x_g, par_r(v_k))$  für ein  $\alpha_k \in [0, 1]$ .

Wegen 2. und weil die Spitze des Dreiecks zu  $v_j$  sich auf Höhe  $num(par_r(v_j))$  befindet, können wir sicher sein, dass die Dreiecke zu allen Knoten  $v$  mit  $par_r(v) = v_k$  mit ihren oberen Spitzen gegen das Dreieck zu  $v_k$  stoßen.

Es bleibt zu zeigen, dass das Dreieck zu  $v_k$  keines der bisher gezeichneten Dreiecke schneidet.

Der Schnitt  $S$  der Halbebene  $y \geq k-1$  mit der Außenfläche der aktuellen Dreieckskontaktdarstellung ist immer  $y$ -konvex, d.h. der Schnitt von  $S$  mit einer beliebigen

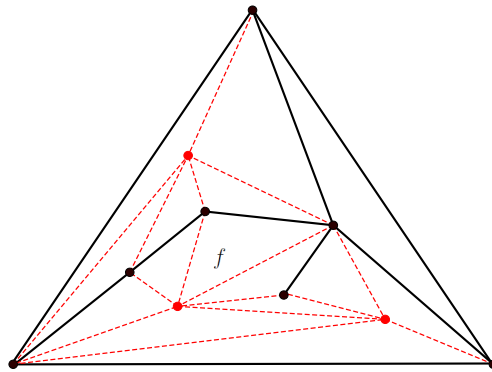


**Abbildung 2.2.:** In dem Graphen links sind die Knoten bzgl. der Präordnung im Gegenurzeigersinn von  $T$  nummeriert. In dieser Reihenfolge werden die Dreiecke nun gezeichnet. Das rechte Bild zeigt die DreieckskontaktDarstellung des Graphen während der Konstruktion. Die Dreiecke zu den Knoten mit den Nummern  $1, \dots, 7$  sind bereits gezeichnet (grau). Das Dreieck zum Knoten mit der Nummer 8 (orange) wird nun mit den Koordinaten  $S_b = (x_b, 8)$ ,  $S_g = (x_g, 8)$  und  $(\frac{x_b+x_g}{2}, 10)$  platziert, da der rote Vater des orangenen Knoten die Nummer 10 hat und wir  $\alpha_8 = \frac{1}{2}$  gewählt haben.

vertikalen Linie ist immer zusammenhängend. Daraus folgt, dass der Bereich, der durch  $y > k \wedge x_b \leq x \leq x_g$  beschrieben wird immer leer ist. Dieser Bereich umschließt das Dreieck zu  $v_k$  komplett.  $\square$

**Korollar 2.2.** *Jeder planare Graph hat eine Dreieckskontaktdarstellung.*

*Beweis.* Wir betten  $G = (V, E)$  planar ein. Wir können  $G$  nun durch Hinzufügen von Knoten und dazu inzidenten Kanten so zu einem maximal planaren Graphen  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  ergänzen, dass  $\tilde{G}[V] = G$ . Dazu setzen wir auf jede Fläche von  $G$ , die kein Dreieck ist einen oder mehrere Knoten und fügen ohne Mehrfachkanten entstehen zu lassen zu diesen neuen Knoten inzidente Kanten hinzu bis alle Flächen Dreiecke sind, siehe Abbildung 2.3.



**Abbildung 2.3.:** Wir ergänzen  $G$  mit den roten Knoten und Kanten zu einem maximal planaren Graphen  $\tilde{G}$ . Auf die Fläche  $f$  müssen wir zwei neue Knoten setzen, da sonst Mehrfachkanten entstehen würden.

Wegen 2.1 hat  $\tilde{G}$  eine Dreieckskontaktdarstellung. Wir erhalten eine Dreieckskontaktdarstellung von  $G$ , indem wir die Dreiecke zu den Knoten aus  $\tilde{V} \setminus V$  löschen.  $\square$

**Bemerkung:**

Nun ist auch klar, warum wir uns in Kapitel 1 auf maximale planare Graphen beschränken konnten.

Aus dem Beweis zu Satz 2.1 folgt unmittelbar ein Algorithmus, um eine Dreieckskontaktdarstellung für eine 3-Triangulierung  $G$  mit  $n$  Knoten zu berechnen:

**Algorithmus 2.3.** (*Konstruktion einer Dreieckskontaktdarstellung*)

Sei  $G$  eine 3-zusammenhängende 3-Triangulierung.

1. Zeichne das Rahmendreieck mit den Koordinaten  $(0, n), (b, n), (a, 2)$ , wobei  $a$  und  $b$  beliebige ganze Zahlen sind.
2. Berechne einen Schnyder-Wood  $(T_1, T_2, T_3)$  auf  $G$ .
3. Sei  $T := (V(T_3) \cup \{w_1, w_2\}, E(T_3) \cup \{(w_1, w_3), (w_2, w_3)\})$  der von den blauen Kanten sowie den zu  $w_3$  adjazenten Außenkanten induzierte Graph.
4. Sei  $P = (p_1, \dots, p_n)$  die Präordnung im Gegenuhrzeigersinn von  $T$ , wobei  $p_i$  die Nummer von Knoten  $v_i$  ist.
5. for  $i = 3 : n$  do
  - Sei  $v_k$  der Knoten mit  $p_k = i$ .
  - Wähle ein  $\alpha_k \in [0, 1]$ .
  - Sei  $x_b$  der Schnittpunkt von  $y = k$  mit der rechten Seite des Dreiecks zum blauen Vater von  $v_k$ .
  - Sei  $x_g$  der Schnittpunkt von  $y = k$  mit der linken Seite des Dreiecks zum grünen Vater von  $v_k$ .
  - Zeichne das Dreieck, das zum Knoten  $v_k$  gehört mit den Koordinaten  $(x_b, p_k), (x_g, p_k), ((\alpha_k x_b + (1 - \alpha_k)x_g, p_{\text{par}_r(v_k)}))$ .

**Bemerkung:** Wählt man z.B.  $\alpha_k = 0 \forall k$ , so erhält man eine Dreieckskontaktdarstellung mit rechtwinkligen Dreiecken, bei  $\alpha_k = 0,5 \forall k$  ergibt sich eine Dreieckskontaktdarstellung mit nur gleichschenkligen Dreiecken.

Durch die Wahl der  $\alpha_k$  kann man die Form der Dreiecke also beeinflussen. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass man es auf diese Weise nicht schafft, eine Dreieckskontaktdarstellung mit nur gleichseitigen Dreiecken zu konstruieren. Dafür braucht man einen anderen Ansatz. In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels werden wir Begriffe für Dreieckskontaktdarstellungen einführen, die wir später

für den Ansatz zur Konstruktion von gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen brauchen.

## 2.2. Layouts

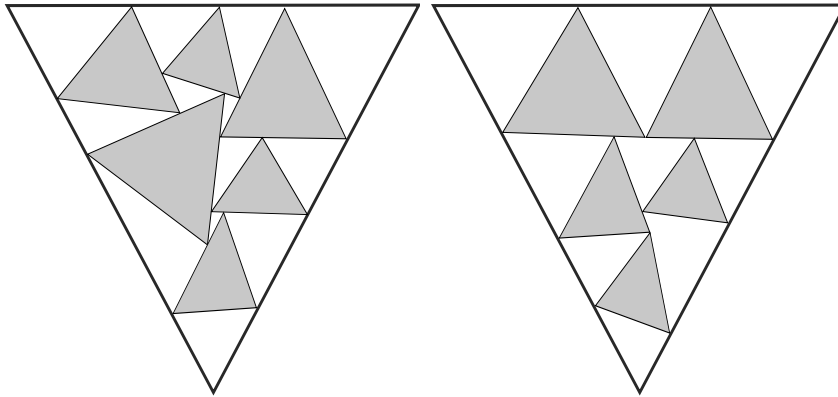
Wir wollen im Folgenden Dreieckskontaktdarstellungen in Klassen zusammenfassen. Dadurch, dass man den geordneten Spannbaum (beziehungsweise den Schnyder Wood, der ihn definiert) und die  $\alpha_k$  im Algorithmus 2.3 frei wählen kann, lassen sich natürlich unendlich viele verschiedene Dreieckskontaktdarstellungen konstruieren. Allerdings unterscheiden sich manche Dreieckskontaktdarstellungen in einer Hinsicht überhaupt nicht: Die Beziehungen der Dreiecke untereinander, also welches mit welcher Ecke an die Seite oder Ecke welches anderen stößt, sind gleich. Wenn wir sagen, dass zwei Dreieckskontaktdarstellungen des gleichen Graphen in Relation stehen, wenn ihre Dreiecke jeweils die gleichen Beziehungen untereinander haben, so bildet diese Relation eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Dreiecke. Eine Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation nennen wir ein *Layout*. Wir werden gleich sehen, dass die Dreieckskontaktdarstellungen einer Klasse aus einem festen geordneten Spannbaum hervorgehen, wobei die Wahl des  $\alpha$  egal ist.

Eine Dreieckskontaktdarstellung heißt *rein*, wenn keine zwei Dreiecke mit ihren Ecken aneinander stoßen.

Wir färben die Kanten des Rahmendreiecks im Uhrzeigersinn mit den Farben rot, grün, blau. Wenn wir nun jeweils die Seiten der inneren Dreiecke mit Farbe  $i$  färben, deren gegenüberliegende Spitze auf einer Seite der Farbe  $i$  liegt, so erhalten wir eine Färbung der inneren Kanten der Dreieckskontaktdarstellung. Wir nennen eine maximale zusammenhängende Linie der gleichen Farbe ein *Segment*.

**Bemerkung:** Bei einer reinen Dreieckskontaktdarstellung sind Segmente genau die Seiten von grauen Dreiecken.

Mit einem Layout kann man einen *Skelettgraphen* assoziieren (s. Abbildung 2.6). Dieser ist ein 3-regulärer, bipartiter, planarer Graph  $H$  mit zwei Knotenklassen  $V_T$  und  $V_P$  mit  $|V_T| = |V_P|$  und einigen zusätzlichen Eigenschaften, die im folgenden Absatz beschrieben werden.



**Abbildung 2.4.:** Eine reine und eine nicht reine Dreieckskontakt Darstellung.

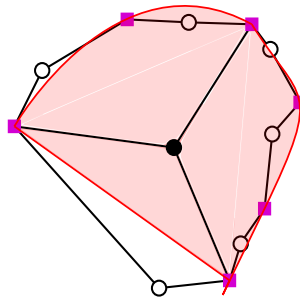
Wir nennen Elemente der Klasse  $V_T$  *t-Knoten* und Elemente der Klasse  $V_P$  *p-Knoten*. Wir wählen einen p-Knoten  $p^*$  und eine seiner Kanten und betrachten von nun an eine planare Einbettung des Graphen  $H$  bei der  $p^*$  der Punkt in der Unendlichkeit ist. Die t-Knoten eines Skelettgraphen sind weiß und grau gefärbt, so dass alle t-Knoten die an einer der drei unbeschränkten Flächen liegen weiß sind und so dass jeder p-Knoten  $p \neq p^*$  sowohl graue als auch weiße Nachbarn hat.

Außerdem gibt es an einer begrenzten Fläche des Skelettgraphen immer nur einen Farbwechsel von grau nach weiß und einen Farbwechsel von weiß nach grau.

Vom Layout zum Skelettgraphen: Setze in jedes graue Dreieck einen grauen t-Knoten, in jedes weiße Dreieck einen weißen t-Knoten und auf jeden Punkt, in dem sich drei Dreiecke mit ihren Spitzen treffen einen p-Knoten. Setze zwischen einen t-Knoten und einen p-Knoten eine Kante genau dann, wenn das Dreieck des t-Knoten eine Spitze im Punkt des p-Knoten hat. So erhält man einen Skelettgraphen mit den geforderten Eigenschaften.

Vom Skelettgraphen zum Layout: Verbinde jeweils die p-Knoten, die gemeinsame Nachbarn eines grauen t-Knoten sind, zu einem Dreieck. Die Linien zwischen zwei p-Knoten werden jeweils so gezeichnet, dass alle anderen p-Knoten, die auf dem Rand derselben Fläche sind, darauf liegen. Betrachtet man nur noch diese

eben gezeichneten Linien, so hat man ein Layout ohne Rahmendreieck und mit nicht unbedingt geradlinigen Dreiecken. Das Rahmendreieck kann man jedoch hinzufügen und für ein Layout sind nicht notwendigerweise geradlinige Dreiecke erforderlich, da es nur von den Beziehungen der Dreiecke untereinander abhängt. (Man kann es natürlich auch leicht in ein Layout mit nur geradlinigen Dreiecken umwandeln, z.B. indem man den induzierten Schnyder Wood (s. Lemma 2.4) betrachtet und Algorithmus 2.3 anwendet.)



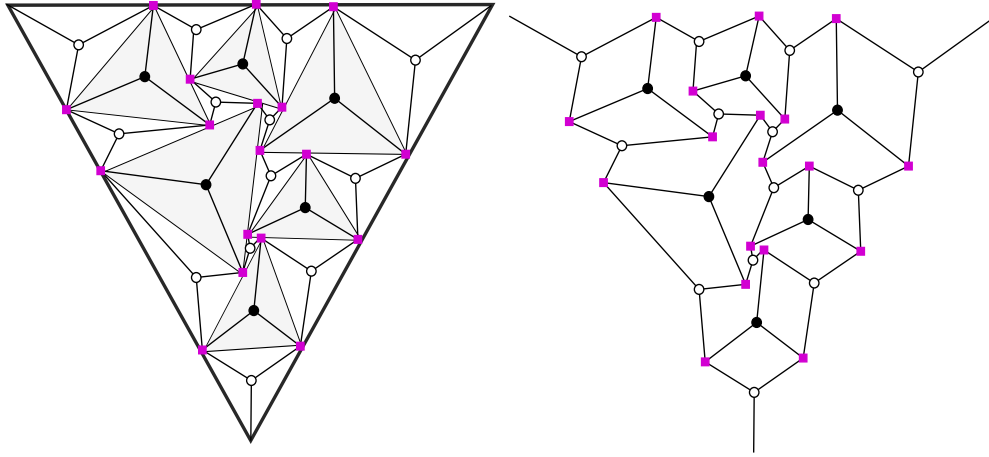
**Abbildung 2.5.:** Wir verbinden die gemeinsamen Nachbarn eines grauen t-Knotens wie oben beschrieben zu einem möglicherweise nicht geradlinigen Dreieck (hier rot eingezeichnet).

Nun ist die Korrespondenz zwischen Skelettgraphen und Layouts gut zu sehen. Die Einschränkungen, dass es nur zwei Farbwechsel geben darf und dass jeder p-Knoten Nachbarn beider Farben haben muss kommen daher, dass die begrenzten Flächen des Skelettgraphen den Segmenten des Layouts entsprechen, wo sich ja immer auf einer Seite nur graue und auf der anderen Seite nur weiße Dreiecke befinden.

Mit dem Skelettgraphen kann man die Äquivalenzrelation von oben nun auch noch anders formulieren: Zwei Dreieckskontaktdarstellungen stehen genau dann in Relation zueinander, wenn sie den gleichen Skelettgraphen haben.

**Lemma 2.4.** *Sei  $D_G$  eine reine Dreieckskontaktdarstellung eines Graphen  $G$ . Dann induziert  $D_G$  einen Schnyder-Wood auf  $G$ .*

*Beweis.* Färbe zunächst die Ecken jedes Dreiecks im Uhrzeigersinn mit den Farben rot, grün und blau. Dabei färben wir immer die „obere“ Ecke rot, das heißt



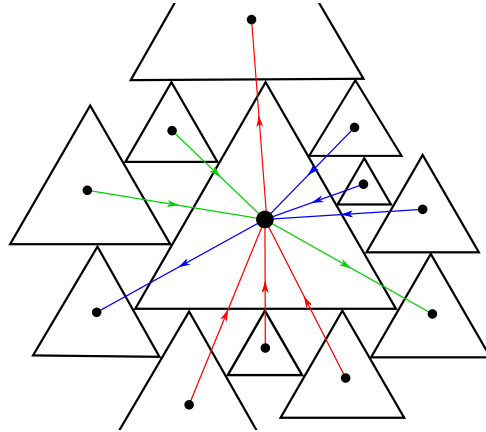
**Abbildung 2.6.:** Eine reine Dreieckskontaktdarstellung mit ihrem Skelettgraphen. t-Knoten sind als Kreise dargestellt, p-Knoten als violette Vierecke.

die, die entweder gegen den oberen Rand oder gegen die einer roten Ecke gegenüberliegenden Seite eines Dreiecks stößt. Wenn das Dreieck zu Knoten  $u$  mit einer Ecke der Farbe  $i$  an das Dreieck zu Knoten  $v$  stößt, so orientiere die entsprechende Kante von  $u$  nach  $v$  und färbe sie mit Farbe  $i$ . Offensichtlich ergibt dies einen Schnyder-Wood.  $\square$

Illustriert wird diese Konstruktion lokal an einem Knoten in Abbildung 2.7.

Umgekehrt erhält man wie wir im letzten Kapitel gesehen haben zu einem gegebenen Schnyder-Wood auf  $G$  eine reine Dreieckskontaktdarstellung aus der passenden Klasse, indem man zum Beispiel wie im Algorithmus 2.3 verfährt. Aufgrund dieser Bijektion zwischen den Schnyder-Woods auf einem Graphen und Klassen von Dreieckskontaktdarstellungen des Graphen werden wir in Zukunft öfter vom *zugehörigen Schnyder-Wood* beziehungsweise der *zugehörigen Dreieckskontaktdarstellung* sprechen.





**Abbildung 2.7.:** Konstruktion des Schnyder Woods zu einer reinen Dreieckskontakt-darstellung lokal an einem Knoten.

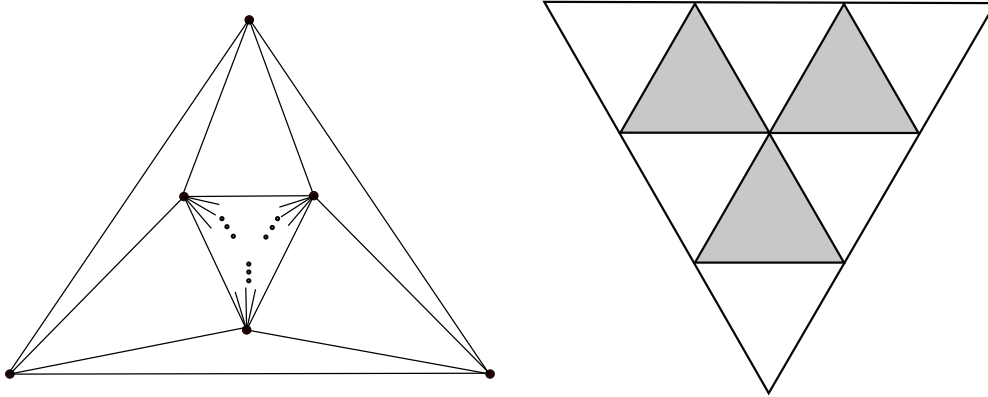
# 3. Gleichseitige Dreieckskontaktdarstellungen

Wie schon erwähnt kann man mit der Vorgehensweise im Beweis von Satz 2.1 bereits einen gewissen Einfluss auf die Form der Dreiecke der Dreieckskontaktdarstellung einwirken, abhängig davon wie man den Parameter  $\alpha$  wählt. Man kann jedoch auf diese Art keine Dreieckskontaktdarstellung mit nur gleichseitigen Dreiecken konstruieren. Dafür braucht man einen vollkommen neuen Ansatz. Davon abgesehen gibt es aber auch noch ein anderes Problem mit gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen, das der Entartung.

## 3.1. Entartung

Man findet leicht Beispiele, die zeigen, dass nicht jeder planare Graph eine nicht entartete Dreieckskontaktdarstellung mit nur gleichseitigen Dreiecken hat. Nimmt man z.B. den Graph des Oktaeders, so hat dieser nur eine eindeutige Realisierung mit gleichseitigen Dreiecken, nämlich wenn man für alle drei inneren Knoten Dreiecke der gleichen Größe nimmt, die sich somit mit ihren Ecken alle drei in einem Punkt treffen. Setzt man nun einen Knoten (oder einen beliebigen anderen maximal planaren Graphen) auf die mittlere Fläche des Graphen, so wird das Dreieck zu diesem Knoten die Größe null haben und in diesem Punkt verschwinden (s. Abbildung 3.1). Aus diesem Grund betrachten wir von nun an nur noch 4-zusammenhängende Graphen, die trivialerweise keine trennenden Dreiecke haben. Die gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung eines 4-zusammenhängenden planaren Graphen (falls sie existiert) kann nicht entartet sein. Das liegt daran, dass sich, wenn alle Dreiecke gleichseitig sind, nur maximal drei Knotendreiecke in einem Punkt treffen können. Also kann nicht mehr als ein 3-Kreis auf einen Punkt zusammenschmolzen werden. Diese Einschränkung ist für das Problem

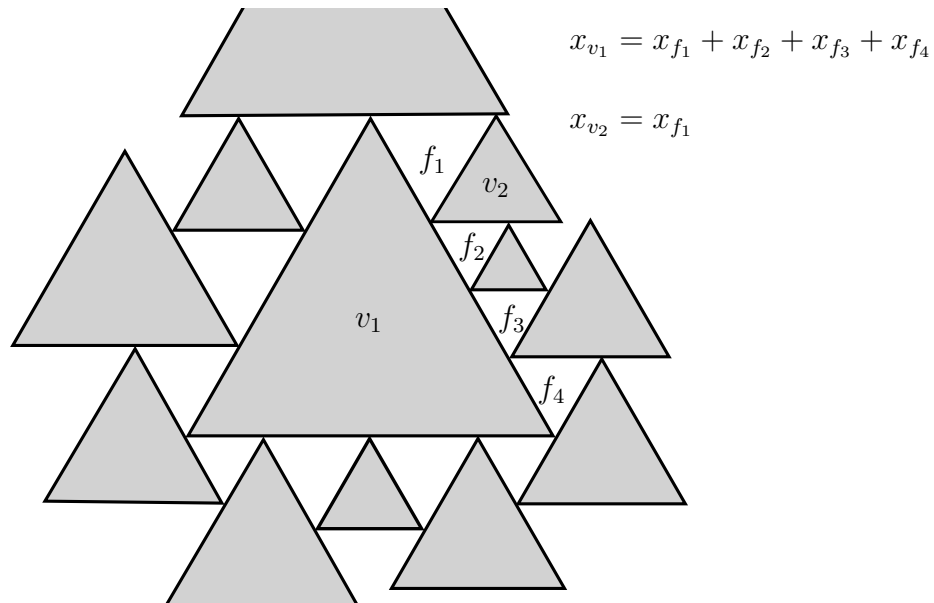
an sich belanglos, da man ein trennende Dreieck mit Inhalt als eigenständiges Problem betrachten kann.



**Abbildung 3.1.:** Die Dreieckskontaktdarstellung des Oktaedergraphen besteht im Innern aus drei gleich großen Dreiecken. Wenn man einen beliebigen Graphen auf die mittlere Fläche „klebt“, verschwindet dieser in der Dreieckskontaktdarstellung in einem Punkt.

## 3.2. Idee für einen Ansatz zur Konstruktion gleichseitiger Dreieckskontaktdarstellungen

Sei  $G = (V, E)$  eine 4-zusammenhängende 3-Triangulierung mit einem Schnyder Wood  $S$  und sei  $|V| = n$ . Wir formulieren nun bestimmte Bedingungen, die eine Dreieckskontaktdarstellung erfüllen muss um gleichseitig zu sein. Dazu assoziieren wir eine Variable mit jedem weißen Dreieck und eine Variable mit jedem grauen Dreieck der zukünftigen Dreieckskontaktdarstellung. Diese Variablen repräsentieren die Seitenlängen der Dreiecke. Die Idee ist es, zu jedem grauen Dreieck 3 Gleichungen aufzustellen, für jede Seite des Dreiecks eine. Dabei muss die Seitenlänge des grauen Dreiecks jeweils gleich der Summe der Seitenlängen der an eine Seite des grauen Dreiecks angrenzenden weißen Dreiecke sein. Wir fügen außerdem eine Gleichung für die Größe des Rahmendreiecks hinzu, das Seitenlänge 1 haben soll (damit erhalten wir ein Gleichungssystem von  $3n - 8$  Gleichungen in  $3n - 8$  Variablen). Bevor wir uns das Gleichungssystem genauer und formaler anschauen, soll hier kurz die Idee des weiteren Vorgehens geschildert werden.



**Abbildung 3.2.:** Zwei Gleichungen des Gleichungssystems zu der im Bild gezeigten Dreieckskontaktdarstellung.

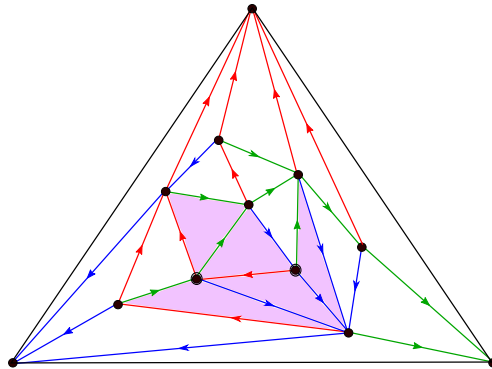
Wenn dieses Gleichungssystem eine Lösung hätte und diese positiv wäre, so könnte man -da man ja die Seitenlängen aller beteiligten Dreiecke kennt- daraus leicht eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung konstruieren. Dazu kann man zum Beispiel wieder das Konzept des geordneten Spannbaums verwenden.

Wie wir später sehen werden, ist dieses Gleichungssystem zwar immer eindeutig lösbar, aber die zugehörige Lösung ist im Allgemeinen nicht positiv.

Das Gleichungssystem hängt natürlich vom gewählten Layout ab bzw. von dem Schnyder Wood, den wir auf dem Graphen  $G$  momentan haben. Das gibt Anlass zu dem Gedanken, dass wir vielleicht nur das „richtige“ Layout bzw. den richtigen Schnyder Wood auf  $G$  finden müssen, um eine positive Lösung zu erhalten.

Aus Abkürzungsgründen nennen wir einen Knoten bzw. eine Fläche von  $G$ , deren entsprechende Variable in der Lösung des Gleichungssystems zu  $S$  negativ ist einen bzgl.  $S$  *negativen Knoten* bzw. eine bzgl.  $S$  *negative Fläche*. Wir nennen einen Schnyder Wood ohne negative Knoten und Flächen einen *optimalen Schnyder Wood*. Eine Kante, die zwischen einer negativen und einer positiven Fläche verläuft nennen wir eine *unregelmäßige Kante*.

An dieser Stelle können wir einen ersten groben Algorithmus angeben, um für einen gegebenen planaren, 3-zusammenhängenden Graphen  $G$  eine Dreieckskon-



**Abbildung 3.3.:** Ein Graph mit einem Schnyder Wood. Die Flächen und Knoten, die im zugehörigen Gleichungssystem negativ sind, sind gekennzeichnet.

taktdarstellung mit nur gleichseitigen Dreiecken zu konstruieren:

**Algorithmus 3.1.**    1. Sei  $S$  ein Schnyder-Wood auf  $G$ .

2. Berechne die Lösung  $x_S$  des zu  $S$  gehörenden Gleichungssystems.

3. Wenn  $x_S \geq 0$

- Konstruiere aus  $x_S$  eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung.

4. Sonst

- Führe auf  $S$  eine Flip-Aktion aus, um zu einem Schnyder-Wood  $S'$  überzugehen.
- Setze  $S := S'$  und gehe zu 2.

Es besteht die Hoffnung, dass dieser Algorithmus terminiert, wenn wir eine geeignete Flip-Aktion finden. Sinnvollerweise muss diese immer anwendbar sein und sollte außerdem die Informationen darüber, welche Variablen welches Vorzeichen haben verwenden, das vor allem wegen dem folgenden

**Lemma 3.2.** Sei  $G$  eine 4-zusammenhängende 3-Triangulierung mit einem Schnyder-Wood  $S$ . Wenn  $S'$  aus  $S$  durch Flippen einer Fläche  $f$  hervorgeht und  $x$  bzw.  $x'$  die Lösungen des Gleichungssystems zu  $S$  bzw.  $S'$  sind, so gilt:

$$\text{sign}(x_f) \neq \text{sign}(x'_f) \text{ oder } \text{sign}(x_f) = \text{sign}(x'_f) = 0.$$

Wir beweisen dieses Lemma erst am Ende des Kapitels, wenn wir das Gleichungssystem formaler betrachtet haben.

### 3.3. Das Gleichungssystem

Das zu  $S$  gehörende Gleichungssystem ist von der Form  $Ax = b$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{3n-8 \times 3n-8}$  und  $b = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{3n-8 \times 1}$ .

Der Vektor  $x \in \mathbb{R}^{3n-8 \times 1}$  hat die Einträge  $x_{v_1}, \dots, x_{v_{n-3}}, x_{f_1}, \dots, x_{f_{2n-5}}$  wobei die  $x_{v_i}$ ,  $i = 1, \dots, n-3$  die Variablen zu den inneren Knoten von  $G$  sind und die  $x_{f_i}$ ,  $i = 1, \dots, 2n-5$  die Variablen zu den inneren Flächen von  $G$ . Sei  $F(v)$  die Menge aller inneren, zum Knoten  $v \in V$  adjazenten Flächen und  $F_i(v)$  die Menge aller inneren Flächen, die zu in  $v$  eingehenden Kanten der Farbe  $i$  adjazent sind. Die erste Gleichung erhalten wir durch

$$\sum_{f \in F(w_1)} x_f = 1,$$

d.h. indem wir fordern, dass die Seitenlänge des Rahmendreiecks der Dreieckskontaktendarstellung gleich 1 ist. Die anderen Gleichungen erhalten wir wie bereits oben beschrieben: Für jeden Knoten  $v \in V$  muss gelten:

$$-x_v + \sum_{f \in F_i(v)} x_f = 0.$$

Nun stellt sich natürlich die Frage nach der Lösbarkeit des Gleichungssystems. Wir betrachten zunächst die Matrix  $\hat{A}$ , die aus  $A$  durch Streichen der ersten Zeile entsteht und das Gleichungssystem  $\hat{A}x = 0$ . In Zukunft nennen wir das das *kleine System* und das ursprüngliche Gleichungssystem das *große System*.

Das kleine System ist ein homogenes Gleichungssystem von  $3n-9$  Gleichungen in  $3n-8$  Variablen, es hat also eine nichttriviale Lösung. Zu zeigen dass das große System lösbar ist ist wesentlich schwieriger, da die Homogenität durch Hinzufügen der skalierenden Gleichung verloren geht. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Lösbarkeit des großen Systems.

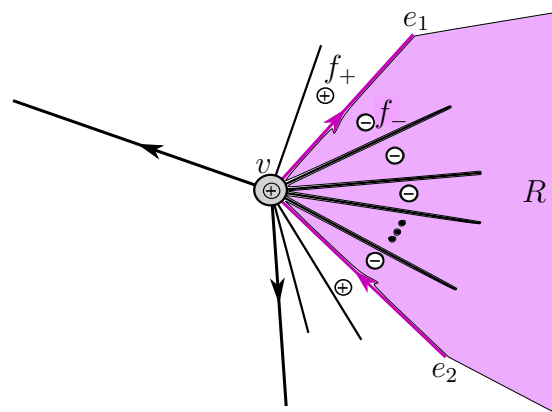
### 3.3.1. Lösbarkeit I

Wir beginnen mit einem beliebigen Schnyder Wood auf  $G$  und betrachten den Skelettgraphen einer zugehörigen Dreieckskontaktdarstellung. Wir werden diesen Skelettgraphen nun so modifizieren, dass er eine andere Klasse von Dreieckskontaktdarstellungen repräsentiert, deren zugehöriges Gleichungssystem eine positive Lösung hat. Über diesen Umweg können wir zeigen, dass die Absolutbeträge der Variablen des größeren Systems immer durch 1 beschränkt sind.

**Lemma 3.3.** *Die Grenze einer negativen Region enthält kein komplettes Segment.*

*Beweis.* Sonst würde sich für dieses Segment eine Gleichung ergeben, bei der auf der einen Seite etwas Positives und auf der anderen Seite etwas Negatives steht.  $\square$

**Korollar 3.4.** *Im Schnyder-Wood des zugehörigen Graphen  $G$  sind Regionen von negativen Flächen durch gerichtete Kreise beschränkt.*



**Abbildung 3.4.:** Argument des Beweises zu Korollar 3.4.

*Beweis.* Sei  $R$  eine negative Region. Wir beginnen mit einer Kante  $e_1$ , die auf der Grenze von  $R$  liegt, das heißt sie ist unregelmäßig und hat auf ihrer einen Seite eine positive Fläche  $f_+$  und auf ihrer anderen Seite eine negative Fläche  $f_-$ . Wir betrachten nun den Startknoten  $v$  dieser Kante  $e_1$ .  $v$  sei o.B.d.A. positiv. Wir wandern nun von  $e_1$  ausgehend um  $v$  herum, und zwar in die Richtung in

der von  $e_1$  aus gesehen  $f_-$  liegt. Irgendwann müssen wir auf eine positive Fläche stoßen, und zwar noch innerhalb des aktuellen Segments, da sonst die Summe der Flächen des Segments und somit der Knoten  $v$  nicht positiv sein könnte. Die Kante  $e_2$ , die zwischen dieser positiven und der vorangegangenen negativen Fläche liegt, hat  $v$  als Endknoten. Wir haben also eine fortsetzende Kante für  $e_1$  gefunden, die wiederum auf der Grenze der negativen Region liegt. Mit dem gleichen Argument können wir so lange fortsetzende Kanten  $e_3, \dots, e_k$  finden, bis wir aufgrund der Endlichkeit von  $G$  wieder in  $v$  ankommen. Die negative Region  $R$  wird also von dem gerichteten Kreis  $e_1, \dots, e_k$  begrenzt.

□

**Korollar 3.5.** *Wenn im Skelettgraphen die Variablen der beiden weißen Nachbarn  $f_1, f_2$  eines  $p$ -Knoten negativ (positiv) sind, so ist auch die Variable des grauen Nachbarn  $v$  negativ (positiv).*

*Beweis.* Angenommen es gibt einen  $p$ -Knoten mit  $f_1, f_2$  negativ (positiv) und  $v$  positiv (negativ). Im zugehörigen Graphen sähe das folgendermaßen aus:

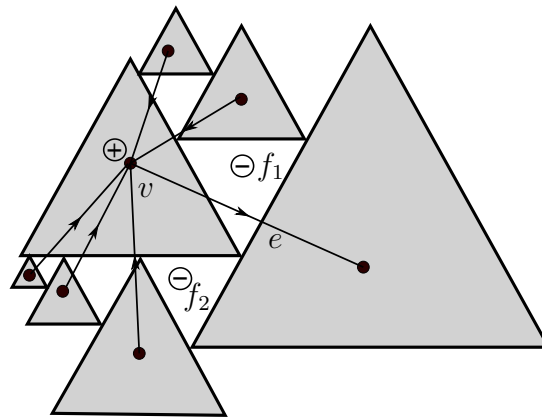


Abbildung 3.5.

Da  $v$  positiv ist, muss sich in jedem seiner Segmente mindestens eine positive Fläche befinden. Sei  $e$  die Kante, die zwischen  $f_1$  und  $f_2$  verläuft.  $e$  ist ausgehend bzgl.  $v$ , sonst hätten  $f_1, f_2$  und  $v$  keinen gemeinsamen  $p$ -Knoten als Nachbarn. Wir nehmen von  $e$  aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn die erste unregelmäßige Kante  $e_{+-}$ . Diese Kante ist eingehend bzgl.  $v$ , da sie sich innerhalb des gleichen Segments befindet. Analog folgt, dass die erste unregelmäßige Kante von  $e$  aus gesehen im Uhrzeigersinn eingehend ist. Damit ist die negative Region, die  $f_1$  und



$f_2$  enthält nicht von einem gerichteten Kreis beschränkt. Widerspruch! Analog folgt:  $f_1, f_2$  positiv  $\Rightarrow v$  positiv.  $\square$

Wir vertauschen nun im Skelettgraphen die Farben von t-Knoten, die innerhalb negativer Regionen liegen, das heißt alle weißen t-Knoten werden grau und alle grauen weiß. Wir überprüfen zunächst, ob dieser neue Graph überhaupt die Eigenschaften eines Skelettgraphen besitzt, d.h. ob gilt:

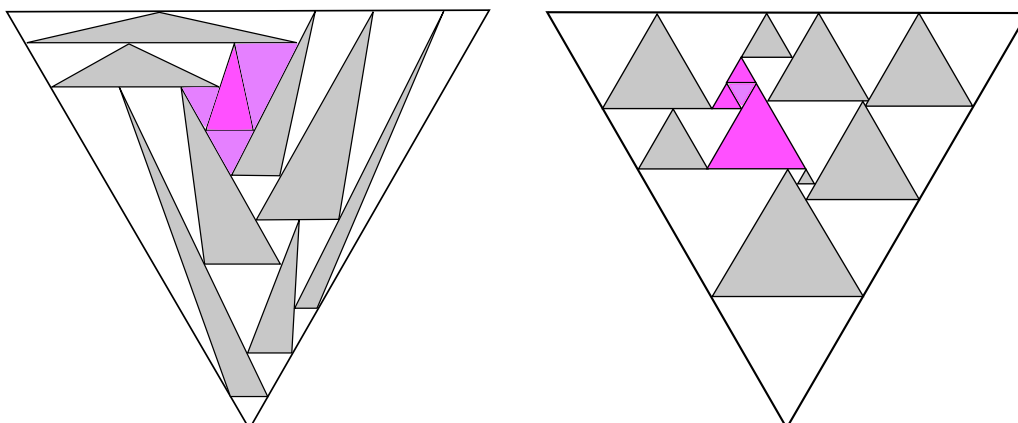
1. *Alle seine p-Knoten haben Nachbarn verschiedener Farben.*

Für die p-Knoten deren Nachbarn komplett inner- oder außerhalb liegen ist das trivialerweise erfüllt; die interessanteren p-Knoten sind die, die auf der Grenze zwischen einer negativen und einer positiven Region liegen. Der einzige Fall, der problematisch werden könnte ist, wenn die beiden weißen Nachbarn eines p-Knoten positiv und der graue Nachbar negativ ist oder umgekehrt, denn dann könnten sie im neuen Skelettgraphen alle gleichfarbig werden. Dass dieser Fall nicht auftreten kann wurde jedoch in Korollar 3.5 bewiesen.

2. *Entlang jeder seiner begrenzten Flächen gibt es genau zwei Farbwechsel.*

Da wir von einer reinen Dreieckskontaktdarstellung ausgehen, hat am Anfang jede begrenzte Fläche nur einen grauen t-Knoten. Da der Wert des grauen t-Knotens gleich der Summe der Werte der anderen t-Knoten der Fläche ist, kann es nicht passieren, dass wir nur den grauen t-Knoten umfärben und genausowenig, dass wir alle weißen t-Knoten umfärben und den grauen t-Knoten nicht. Sei  $v_w$  ein weißer t-Knoten, der in einer negativen Region enthalten ist. Sei  $v_g$  der graue t-Knoten auf einer Fläche, an der  $v_w$  liegt.  $v_w$  und  $v_g$  definieren zwei Abschnitte auf dem Kreis, der ihre gemeinsame Fläche begrenzt. Man kann sich leicht klar machen, dass einer der beiden Abschnitte ebenfalls komplett in der negativen Region enthalten sein muss. Deshalb gibt es nach dem Umfärben immer noch genau 2 Farbwechsel an jeder Fläche.

Wenn wir die Farbe eines Knoten ändern, so bedeutet das, dass er im zugehörigen Gleichungssystem die Seite wechselt, also das Vorzeichen. Da wir genau alle negativen Knoten und Flächen die Seite wechseln lassen, ist die Lösung des Gleichungssystems zum neuen Skelettgraphen positiv. Also erhalten wir, wenn wir



**Abbildung 3.6.:** Im linken Bild ist ein Layout, dessen negative Knoten und Flächen gekennzeichnet sind. Im rechten Bild ist das veränderte Layout, nachdem die negativen Knoten und Flächen im Skelettgraphen die Farbe gewechselt haben.

alle vorangegangenen Tatsachen zusammenfassen, den folgenden Satz:

**Satz 3.6.** *Haben wir einen Repräsentanten  $R$  einer Klasse von reinen Dreieckskontakt Darstellungen gegeben, dessen zugehöriges Gleichungssystem eine Lösung hat, dann gibt es eine gleichseitige Dreieckskontakt Darstellung  $D$  so dass gilt:*

- *Es gibt eine Bijektion zwischen Dreiecken von  $R$  und Dreiecken von  $D$ , die die Farbe von Dreiecken von  $R$  die positiv sind erhält und die Farbe von Dreiecken von  $R$  die negativ sind verändert.*
- *Die Seitenlänge eines Dreiecks von  $D$  ist der Absolutbetrag der zugehörigen Variable in der Lösung des zu  $R$  gehörenden Gleichungssystems.*
- *Es gibt eine Bijektion zwischen Segmenten von  $R$  und Segmenten von  $D$ , die die Inzidenzen zwischen Segmenten und Dreiecken erhält.*

**Bemerkung:** Vorsicht! Der neue Skelettgraph repräsentiert natürlich i.A. nicht mehr den ursprünglichen Graphen und die zum neuen Skelettgraphen gehörende Klasse von Dreieckskontakt Darstellungen ist auch i.A. nicht mehr rein.

**Korollar 3.7.** *Der Absolutbetrag jeder Variablen in einer Lösung des großen Systems ist durch 1 beschränkt.*

*Beweis.* Wir können mit einer Lösung  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n-3})^T$  (wegen Satz 3.6)

eine Dreieckskontaktdarstellung assoziieren (aber keine, die den Graphen  $G$ , von dem wir ausgegangen sind repräsentiert!). Da die Fläche des Rahmendreiecks gleich der Summe der Flächen der inneren Dreiecke ist gilt:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sum_t \frac{\sqrt{3}}{2} x_t^2,$$

also

$$|x_t| \leq 1$$

□

**Korollar 3.8.** *Das große System, das zu einer Klasse von reinen Dreieckskontaktdarstellungen gehört hat eine eindeutige Lösung.*

*Beweis.* • *Existenz.* Mit einer nichttrivialen Lösung  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n-3})^T$  des kleinen Systems können wir (wegen dem vorangegangenen Satz) eine Dreieckskontaktdarstellung assoziieren. Die Fläche des Rahmendreiecks ist also proportional zu  $\sum_t x_t^2 > 0$ , also ist auch die Seitenlänge des Rahmendreiecks  $> 0$ . Durch Skalieren können wir eine Lösung für das große System finden.

- *Eindeutigkeit.* Angenommen es gebe zwei verschiedene Lösungsvektoren  $X$  und  $Y$ . Wegen  $A((1 - \lambda)X + \lambda Y) = e_1$  ist der Vektor  $(1 - \lambda)X + \lambda Y =: Z^{(\lambda)}$  ebenfalls eine Lösung. Wähle ein  $t$  mit  $y_t - x_t = \alpha \neq 0$ . Dann gilt:  $z_t = x_t + \lambda\alpha$ , also  $|z_t^{(\lambda)}| > 1$  für hinreichend großes  $\lambda$ . Das ist ein Widerspruch zu Korollar 3.7.

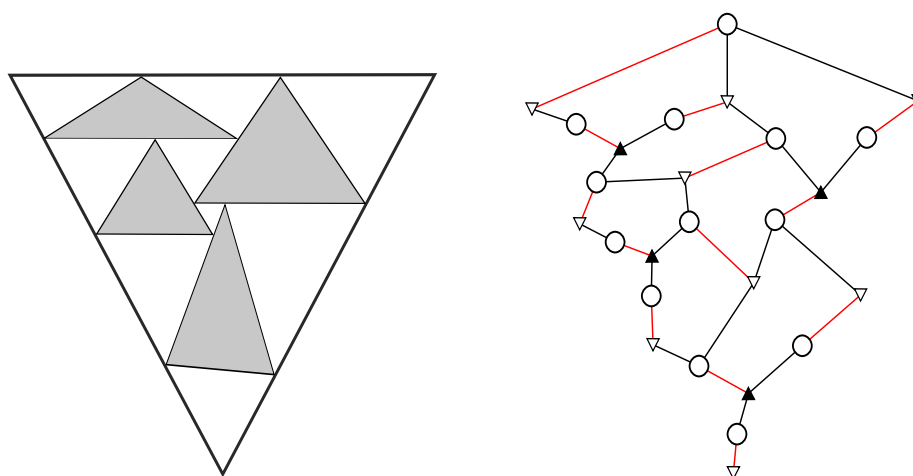
□

### 3.3.2. Beweis von Lemma 3.2 und Lösbarkeit II

Für den Beweis von Lemma 3.2 müssen wir zunächst etwas Vorarbeit leisten. Dafür bekommen wir einen zweiten, alternativen Beweis für die Lösbarkeit des Gleichungssystems praktisch geschenkt. Sei  $G$  ein Graph mit  $n$  Knoten und einem Schnyder Wood  $S$  und sei  $A_S \in \mathbb{R}^{3n-8, 3n-8}$  die Matrix des zu  $S$  gehörenden Gleichungssystems. Wir betrachten nun die Matrix  $\hat{A}_S$ , die aus  $A_S$  hervorgeht, indem wir jede Spalte, die zu einem Knoten von  $G$  gehört mit  $-1$  multiplizieren.

Die Matrix  $\hat{A}_S$  hat als Einträge also nur Einsen und Nullen und es gilt  $\det(\hat{A}_S) = (-1)^{n-3} * \det(A_S)$ . Man kann die Matrix  $\hat{A}_S$  als Adjazenzmatrix eines bipartiten Graphen betrachten. Die eine Knotenklasse bilden dabei die Knoten und Flächen des Graphen  $G$ , die andere die Gleichungen. Wir nennen den bipartiten Graphen, der  $\hat{A}_S$  als Adjazenzmatrix hat  $\hat{G}_S$ .

Nun betrachten wir die Leibniz-Entwicklung der Determinanten von  $\hat{A}_S$ . Ihre nicht verschwindenden Summanden stehen in Bijektion zu den perfekten Matchings auf  $\hat{G}_S$ . Jeder nicht verschwindende Summand entspricht einer Permutation  $\pi$ . Wir nennen das entsprechende perfekte Matching  $M_\pi$  und definieren  $sign(M_\pi) = sign(\pi)$ . Der Graph  $\hat{G}_S$  hat die Besonderheit, dass alle seine inneren Flächen von Zykeln der Länge 6 beschränkt sind. Das liegt daran, dass ein graues und ein weißes Dreieck bzw. zwei weiße Dreiecke wenn sie benachbart sind immer in genau einer Gleichung gemeinsam vorkommen.



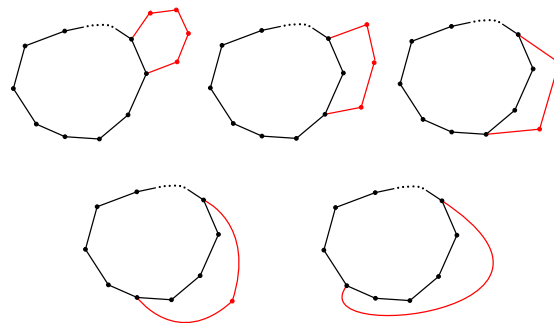
$$\left( \begin{array}{cccc|cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0
 \end{array} \right)$$

**Abbildung 3.7.:** Eine Dreieckskontaktdarstellung, die dazugehörige Matrix  $\hat{A}_S$  und der bipartite Graph  $\hat{G}_S$ , der  $\hat{A}_S$  als Adjazenzmatrix hat. Die Knoten von  $\hat{G}_S$ , die Gleichungen entsprechen, sind als Kreise gezeichnet, die die den Variablen entsprechen als Dreiecke. Ein perfektes Matching in  $\hat{G}_S$  und die entsprechende Permutation in der Matrix sind rot eingezeichnet.

**Lemma 3.9.** *Sei  $\hat{G}_S$  ein bipartiter planarer Graph dessen innere Flächen alle von Zykeln der Länge 6 begrenzt sind. Sei  $M$  ein perfektes Matching auf  $\hat{G}_S$ . Dann haben alle bezüglich  $M$  alternierenden Zykeln von  $\hat{G}_S$  die Länge  $4k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass Zykeln in  $\hat{G}_S$ , die die Länge  $4k + 2$  haben immer eine gerade Anzahl Knoten in ihrem Inneren haben bzw. Zykel der Länge  $4k + 4$  eine ungerade (andere Zykeln gibt es nicht, da  $\hat{G}_S$  bipartit ist).

Das machen wir per Induktion über die Anzahl innerer Flächen der Zykeln von  $\hat{G}_S$ . Für Zykeln in  $\hat{G}_S$  mit nur einer inneren Fläche ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Angenommen ein Zykel  $C$  in  $\hat{G}_S$  hat  $x > 1$  innere Flächen. Wir betrachten eine davon, die benachbart zur Außenfläche ist und löschen alle Knoten, die nur an diese Fläche und die Außenfläche grenzen sowie die dazu inzidenten Kanten. Das sieht dann aus wie eine der 5 Möglichkeiten, die in Abbildung 3.8 dargestellt werden. Für den resultierenden Zykel  $\tilde{C}$  gilt die Induktionsvoraussetzung.



**Abbildung 3.8.:** 5 Möglichkeiten, Knoten und Kanten auf dem Außenkreis zu löschen, um zu einem Zykel mit einer inneren Fläche weniger zu gelangen.

Bei den Möglichkeiten links oben, rechts oben und rechts unten kommen jeweils eine gerade Anzahl innerer Knoten hinzu und die Länge des Außenkreises verlängert oder verkürzt sich um 0 oder 4 wenn man von  $\tilde{C}$  zu  $C$  übergeht. Bei den übrigen kommt eine ungerade Anzahl innerer Knoten hinzu und die Länge des Außenkreises verlängert oder verkürzt sich um 2. Daher folgt, dass Zykel der Länge  $4k + 4$ ,  $k \in \mathbb{N}$  eine ungerade Anzahl innerer Knoten haben und Zykel der Länge  $4k + 2$ ,

$k \in \mathbb{N}$  eine gerade.

Nun nehmen wir an es gebe einen bzgl.  $M$  alternierenden Zykel  $C$  der Länge  $4k + 4$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Da wie eben gezeigt die Anzahl der inneren Knoten von  $C$  ungerade ist, gibt es kein perfektes Matching auf dem von den inneren Knoten von  $C$  induzierten Graphen. Da  $C$  alternierend ist kann man auch keine der Kanten, die einen Endknoten auf  $C$  haben in das Matching aufnehmen. Es ergibt sich also ein Widerspruch dazu, dass  $M$  ein perfektes Matching ist.  $\square$

**Lemma 3.10.** *Seien  $M, \tilde{M}$  perfekte Matchings auf  $\hat{G}_S$ . Dann gilt:  $\text{sign}(M) = \text{sign}(\tilde{M})$ .*

*Beweis.* Um von einem perfekten Matching  $M = M_\pi$  in  $\hat{G}_S$  zu einem perfekten Matching  $\tilde{M} = M_{\tilde{\pi}}$  zu gelangen, müssen wir einen oder mehrere alternierende Zykeln finden und entlang dieser jede Matchingkante zu einer nicht-Matchingkante machen und umgekehrt. Wir betrachten die symmetrische Differenz von  $M$  und  $\tilde{M}$ , d.h.  $(M \cup \tilde{M}) \setminus (M \cap \tilde{M})$ . Jeder Knoten in dem von der symmetrischen Differenz induzierten Graphen hat entweder Grad 2 oder Grad 0, es handelt sich hierbei also um eine Menge von Zykeln  $C_1, \dots, C_m$ . Diese sind sowohl  $M$ - als auch  $\tilde{M}$ -alternierend. Wegen Lemma 3.9 hat jeder der  $C_i$  die Länge  $4k_i + 2$ , für ein  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Damit entspricht jedes  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  einer zyklischen Permutation  $\sigma_i$  der Länge  $2k_i + 1$ . Es gilt also:  $\tilde{\pi} = \pi * \sigma_1 * \dots * \sigma_m$ . Jedes  $\sigma_i$  lässt sich in  $2k_i$  Transpositionen zerlegen. Da somit die Anzahl der Transpositionen gerade ist, die man auf  $\pi$  anwenden muss, um  $\tilde{\pi}$  zu erhalten, und jede angewendete Transposition das Vorzeichen umkehrt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung:** Von Lemma 3.10 ist es nur noch ein kleiner Schritt um unabhängig von dem Beweis in Abschnitt 3.3.1 zu zeigen, dass das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt. Man muss nur zeigen, dass der Graph  $\hat{G}_S$  überhaupt ein perfektes Matching besitzt. Wenn das der Fall ist, kann die Determinante der Matrix  $\hat{A}_S$  nicht 0 sein, da die Vorzeichen der den Matchings entsprechenden Permutationen wegen Lemma 3.10 immer gleich sind und sich die Summanden somit nicht gegenseitig auslöschen können. Der Betrag der Determinante ist genau die Anzahl perfekter Matchings in  $\hat{G}_S$ . Wir verzichten an dieser Stelle jedoch auf diesen Beweis und benutzen stattdessen unser Vorwissen aus Abschnitt 3.3.1.

Nun wollen wir ja eigentlich herausfinden, was beim Flippen einer Fläche mit ihrem Vorzeichen passiert. Sei also  $S' = S_f$ , das heißt  $S'$  ist der Schnyder Wood, der aus  $S$  durch Flippen der Fläche  $f$  hervorgeht. Sei  $b = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{3n-8}$  und  $A_S x = b$  sowie  $A_{S'} x' = b$ . Wegen 3.8 wissen wir, dass  $x$  und  $x'$  existieren und eindeutig sind.

**Lemma 3.11.**  $\det(\hat{A}_S)x_f = \det(\hat{A}_{S'})x'_f$ .

*Beweis.* Es gilt:  $x = A_S^{-1}b$   
 $\implies x_f = a_{1,f}^{(-1)} = \frac{1}{\det(\hat{A}_S)} * (-1)^{1+f} * [\hat{A}_S]_{1,f}$ , wobei  $a_{1,f}^{(-1)}$  den  $(1, f)$ -ten Eintrag von  $A_S^{-1}$  bezeichnet und  $[B]_{i,j}$  generell die Matrix, die aus einer Matrix  $B$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht.

Analog gilt:  $x'_f = \frac{1}{\det(\hat{A}_{S'})} * (-1)^{1+f} * [\hat{A}_{S'}]_{1,f}$ .

Da  $\hat{A}_S$  und  $\hat{A}_{S'}$  sich nur in der  $f$ -ten Spalte unterscheiden, gilt  $[\hat{A}_S]_{1,f} = [\hat{A}_{S'}]_{1,f}$ . Durch Einsetzen folgt die Behauptung.  $\square$

*Beweis von Lemma 3.2.* Wegen 3.11 müssen wir nur noch zeigen, dass

$$\text{sign}(\det(\hat{A}_S)) \neq \text{sign}(\det(\hat{A}_{S'})).$$

Wegen 3.10 genügt es ein beliebiges perfektes Matching  $M$  auf  $\hat{G}_S$  und ein beliebiges perfektes Matching  $\tilde{M}$  auf  $\hat{G}_{S'}$  zu betrachten und nachzuweisen, dass die Vorzeichen von  $M$  und  $\tilde{M}$  verschieden sind. Dass solche Matchings existieren folgen wir natürlich ebenfalls aus unserem Vorwissen aus Abschnitt 3.3.1:

Wir wissen von dort, dass das Gleichungssystem  $A_S x = b$  zu einem Schnyder Wood  $S$  eine eindeutige Lösung hat.

$\implies \det(A_S) \neq 0$

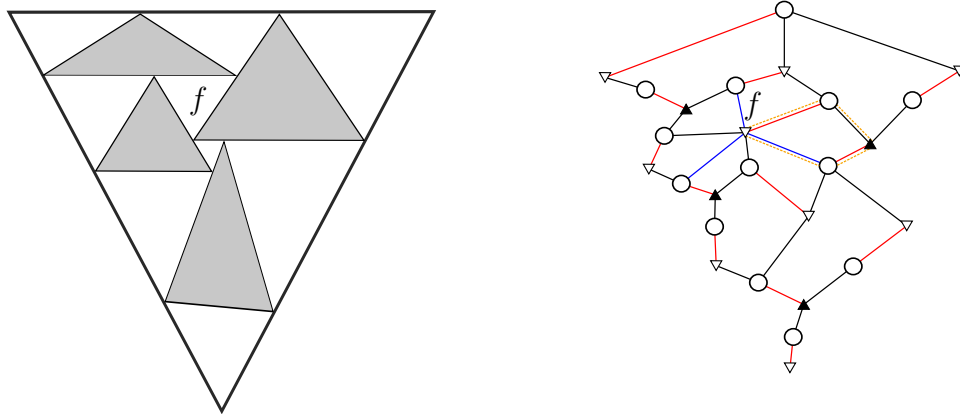
$\implies$  Es gibt einen Summanden in der Leibnizentwicklung von  $\det(A_S)$ , der nicht verschwindet.

$\implies$  Auf dem Graphen mit Adjazenzmatrix  $\hat{A}_S$  gibt es ein perfektes Matching.

Wir betrachten nun die Vereinigung  $\hat{G}_S \cup \hat{G}_{S'}$ . Wir können perfekte Matchings problemlos von den kleineren Graphen  $\hat{G}_S$  bzw.  $\hat{G}_{S'}$  auf  $\hat{G}_S \cup \hat{G}_{S'}$  übertragen, da der Vereinigungsgraph alle Kanten besitzt, die die kleineren Graphen haben. Auch die Vorzeichen der Matchings verändern sich dadurch nicht, da die Matchings natürlich immer noch der gleichen Permutation entsprechen. Wir wählen  $M$  beliebig als perfektes Matching auf  $\hat{G}_S \cup \hat{G}_{S'}$ , das nur Kanten aus  $\hat{G}_S$  besitzt.



Die Fläche  $f$  hat sowohl in  $\hat{G}_S$  als auch in  $\hat{G}_{S'}$  Grad 3, allerdings sind die 3 inzidenten Kanten in  $\hat{G}_S$  paarweise von den inzidenten Kanten in  $\hat{G}_{S'}$  verschieden. Wir suchen nun von  $f$  ausgehend einen  $M$ -alternierenden Zykel  $C$  in  $\hat{G}_S \cup \hat{G}_{S'}$ , der mit der  $M$ -Kante, die  $f$  überdeckt startet und mit einer der drei in  $\hat{G}_{S'}$  zu  $f$  inzidenten Kanten endet. Da diese Kante eine der Flächen von  $\hat{G}_S$  in der Mitte durchschneidet hat  $C$  die Länge  $4k + 4$ , für ein  $k \in \mathbb{N}$ .



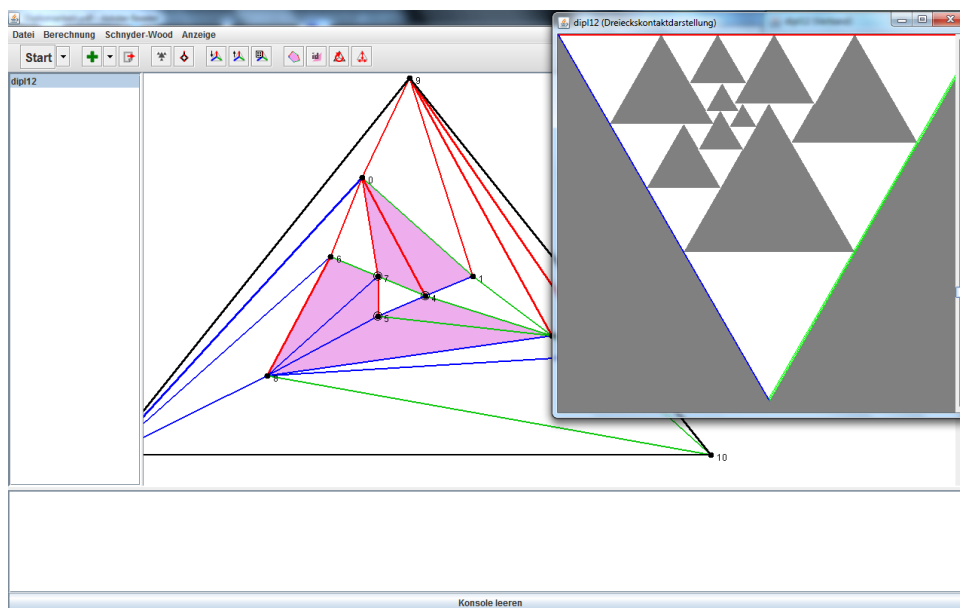
**Abbildung 3.9.:** Hier ist die Auswirkung auf den Graphen  $\hat{G}_S$  dargestellt, wenn man die Fläche  $f$  flippt und dadurch zum Graphen  $\hat{G}_{S'}$  übergeht. Die drei bisher zu  $f$  inzidenten Kanten verschwinden, dafür kommen die blau gezeichneten Kanten hinzu. Außerdem ist gestrichelt ein alternierender 4-Zykel  $C$  eingezeichnet, der von dem mit rot eingezeichneten perfekten Matching auf  $\hat{G}_S$  zu einem perfekten Matching auf  $\hat{G}_{S'}$  führt, wenn man entlang  $C$  alle Matchingkanten zu nicht-Matchingkanten macht und umgekehrt.

Das entspricht einer zyklischen Permutation der Länge  $2k + 2$ , die sich in  $2k + 1$  Transpositionen zerlegen lässt. Da diese Zahl ungerade ist, sind die Vorzeichen von  $M$  und dem perfekten Matching  $\tilde{M}$ , das entsteht, wenn man den alternierenden Zykel  $C$  in  $M$  umdreht und das nur Kanten aus  $\hat{G}_{S'}$  enthält, verschieden.  $\square$

## 3.4. Experimente

### 3.4.1. Ein Programm

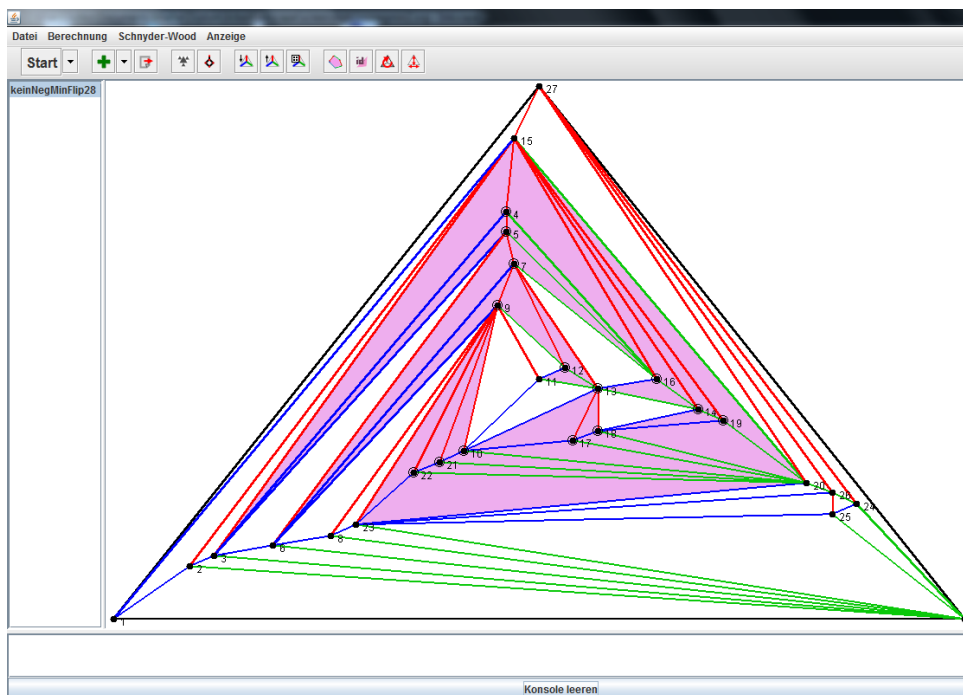
Alle Experimente wurden mit einem Programm durchgeführt, das ich dazu geschrieben habe. Zunächst hatte ich die Hoffnung eine 4-zusammenhängende 3-Triangulierung zu finden, die keine Dreieckskontaktdarstellung hat. Nachdem das Programm jedoch Tausende von Graphen überprüft hatte, teilweise mit mehreren hundert Knoten, und bei allen schließlich eine Lösung gefunden wurde, begann ich mich mehr darauf zu konzentrieren, wie man möglichst schnell einen optimalen Schnyder-Wood findet.



**Abbildung 3.10.:** Der Graph aus Abbildung 3.3 mit vom Programm berechneter gleichseitiger Dreieckskontaktdarstellung.

Die Einbettungen der Graphen wurden mit dem Algorithmus aus [1] berechnet.

Die Graphen, die untersucht wurden sind hauptsächlich zufällig gleichverteilt generierte 3-Triangulierungen, die durch Entfernen des Inhalts trennender Dreiecke 4-zusammenhängend gemacht wurden. Zur Generierung diente hierbei der Algo-



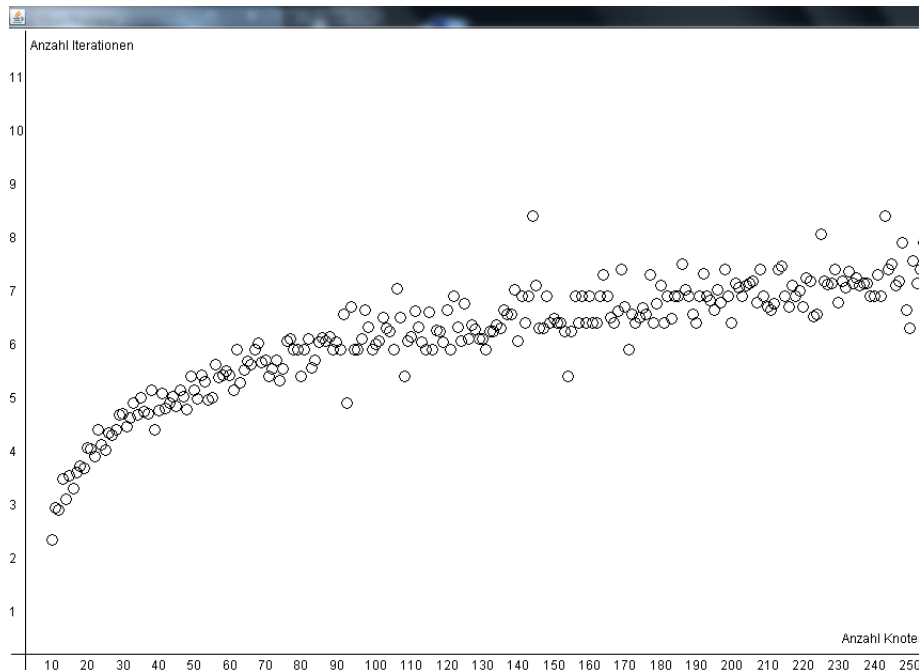
**Abbildung 3.11.:** Ein Graph mit minimalem Schnyder Wood. Keine der negativen Flächen ist flippbar.

rithmus von Poulalhon und Schäffler aus [10]. Einige kleinere Graphen wurden natürlich auch von Hand erstellt.

### 3.4.2. Algorithmen für die Konstruktion gleichseitiger Dreieckskontaktdarstellungen

Die programmierten Algorithmen basieren alle auf dem Gerüst 3.1. Nur die angewendete Flip-Aktion wurde variiert.

- *Flächen flippen.* Es ist eine sehr naheliegende Idee negative Flächen zu flippen, da sie nach Lemma 3.2 ja dadurch ihr Vorzeichen wechseln. Leider gibt es nicht immer eine negative flippbare Fläche, vgl. Abbildung 3.11.
- *Kreise flippen, die negative Regionen begrenzen.* Hier stellt sich natürlich zunächst einmal die Frage, welchen Kreis man flippt. Wenn man ungeschickt wählt, kann es nämlich passieren, dass man immer die gleiche Folge



**Abbildung 3.12.:** Durchschnittliche Anzahl Iterationen, die man für Graphen mit unterschiedlicher Anzahl Knoten braucht, um durch Umdrehen aller unregelmäßigen Kanten einen optimalen Schnyder Wood zu erhalten. Für die Graphik wurden 2029 Graphen verwendet.

von Kreisen flippt und nie einen optimalen Schnyder Wood erreicht. Ein zufälliger Kreis führt erfahrungsgemäß zum Ziel.

- *Alle unregelmäßigen Kanten umdrehen.* Man kann sich leicht überlegen, dass das „erlaubt“ ist, d.h. dass die resultierende Orientierung der Kanten wieder eine 3-Orientierung ist, da der von den unregelmäßigen Kanten induzierte Teilgraph von  $G$  eulersch ist. Dieser Algorithmus ist der einfachste und der mit Abstand schnellste, da man auch bei großen Graphen mit wenigen Iterationen auskommt, vgl. Abbildung 3.12. Eine Iteration ist in  $O(n)$  durchführbar.

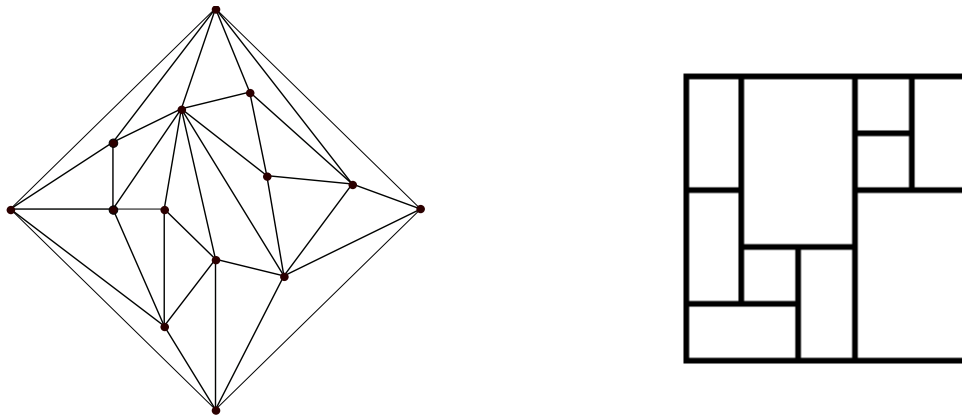
## **Teil II.**

# **Rechteckskontaktdarstellungen**

Eine Rechteckskontakt Darstellung einer 4-Triangulierung  $G$  ist ein System von Rechtecken mit den folgenden Eigenschaften:

- Jeder Knoten von  $G$  wird durch ein Rechteck repräsentiert.
- Wenn zwei Knoten in  $G$  adjazent sind, so berühren sich die entsprechenden Rechtecke der Rechteckskontakt Darstellung in unendlich vielen Punkten, ansonsten sind sie disjunkt.

Da wir wieder nur triangulierte Graphen betrachten, erhalten wir sogar eine besondere Art von Rechteckskontakt Darstellungen, nämlich *Rectangular Duals*. Bei Rectangular Duals gibt es keine „Lücken“ zwischen den Rechtecken, die die Knoten repräsentieren. Wie bei den Dreiecken kann man aber natürlich eine Rechteckskontakt Darstellung für einen nicht triangulierten planaren Graphen  $G$  bekommen, indem man ein Rectangular Dual für einen Graphen  $\tilde{G}$  mit  $\tilde{G}[V(G)] = G$  berechnet und die Rechtecke zu Knoten aus  $V(\tilde{G}) \setminus V(G)$  weglässt.



**Abbildung:** Ein Graph und eines seiner Rectangular Duals. Von den Rechtecken der 4 äußeren Knoten ist jeweils nur eine Seite gezeichnet.

Wir nennen ein Rectangular Dual dessen Rechtecke alle Quadrate sind eine *Quadratkontakt Darstellung*.

## 4. Transversale Strukturen

**Definition.** Sei  $G$  eine 4-Triangulierung, deren äußere Knoten mit  $N$ ,  $O$ ,  $S$ ,  $W$  benannt seien. Eine transversale Struktur  $T$  auf  $G$  ist eine Orientierung und Färbung (mit den Farben rot (1) und blau (2)) der inneren Kanten von  $G$ , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

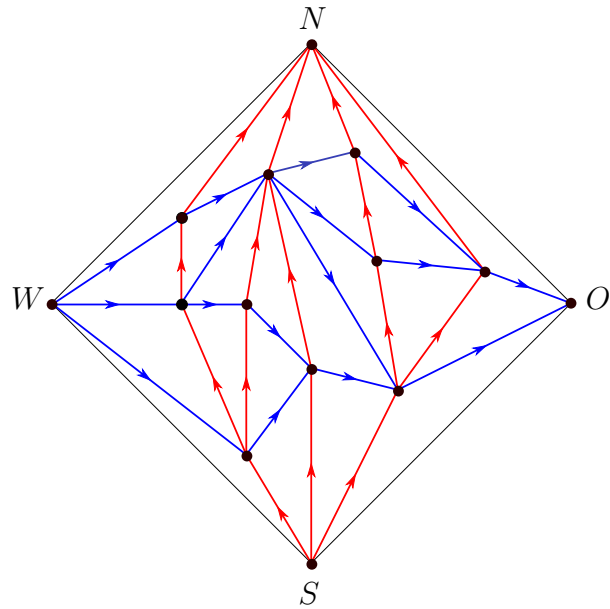
- Alle zu  $N$  inzidenten Kanten sind rot und eingehend.
- Alle zu  $S$  inzidenten Kanten sind rot und ausgehend.
- Alle zu  $W$  inzidenten Kanten sind blau und eingehend.
- Alle zu  $O$  inzidenten Kanten sind blau und ausgehend.
- Bei jedem inneren Knoten treten Kanten aller Kategorien in nichtleeren Intervallen auf. Diese sind im Uhrzeigersinn folgendermaßen geordnet: rote ausgehende, blaue ausgehende, rote eingehende, blaue eingehende.

Wie die Schnyder-Woods lassen sich auch die Transversalen Strukturen nicht nur lokal beschreiben. Der von den roten Kanten induzierte Teilgraph bildet eine bipolare Orientierung auf  $G \setminus \{W, E\}$ , wir nennen ihn das  $S$ - $N$ -Netzwerk. Der von den blauen Kanten induzierte auf  $G \setminus \{S, N\}$  bildet ebenfalls eine bipolare Orientierung, wir nennen ihn  $W$ - $O$ -Netzwerk (Fusy in [7]).

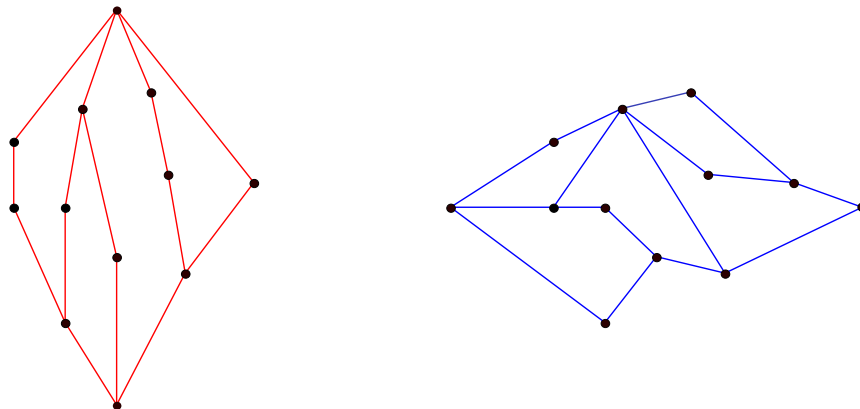
Genau wie bei den Schnyder-Woods gilt auch, dass alle Informationen über die Struktur sowohl in der Färbung als auch in der Orientierung der Kanten enthalten sind, man kann sich also auf eines von beidem beschränken.

Fusy gibt in [6] auch eine Charakterisierung für die Existenz von Transversalen Strukturen auf 4-Triangulierungen an:

**Satz 4.1.** *Eine 4-Triangulierung hat genau dann eine transversale Struktur, wenn sie keine trennenden Dreiecke hat.*



**Abbildung 4.1.:** Ein Graph mit transversaler Struktur.



**Abbildung 4.2.:** Das S-N-Netzwerk und das W-O-Netzwerk der Transversalen Struktur aus Abbildung 4.1



---

Außerdem bilden die Transversalen Strukturen einer Triangulierung einen distributiven Verband. Ein Algorithmus zur Konstruktion Transversaler Strukturen kann ebenfalls in [7] gefunden werden.

# 5. Rectangular Duals

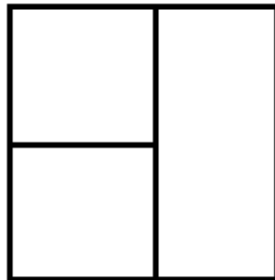
## 5.1. Existenz von Rectangular Duals

Der folgende Satz wurde in [9] bewiesen.

**Satz 5.1.** *Sei  $G$  eine 4-Triangulierung. Dann gilt:*

*$G$  hat ein Rectangular Dual  $\iff G$  hat keine trennenden Dreiecke.*

*Beweis. „ $\implies$ “*

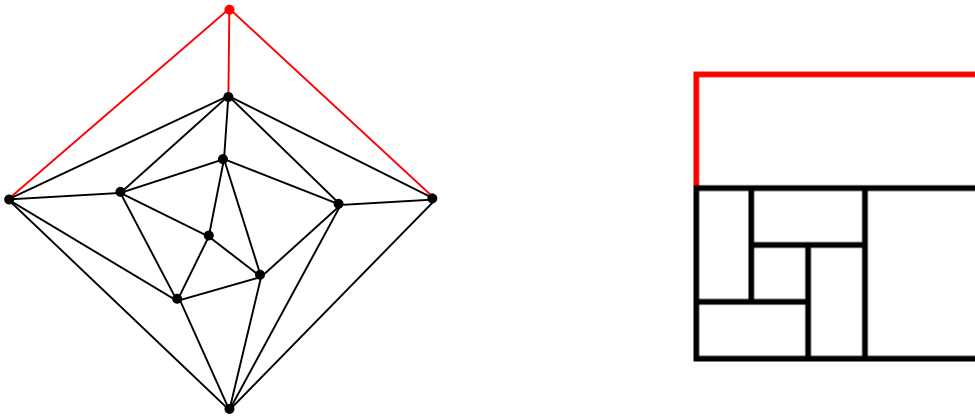


**Abbildung 5.1.:** Das ist die einzige Möglichkeit ein Dreieck darzustellen. Der Inhalt eines trennenden Dreiecks würde also in einem Punkt verschwinden.

„ $\Leftarrow$ “ Wir nehmen an, es gebe Graphen mit den geforderten Eigenschaften, die kein Rectangular Dual besitzen. Sei  $G$  ein solcher Graph mit minimaler Knotenanzahl. Es seien  $r, u, l, o$  die im Uhrzeigersinn geordneten äußeren Knoten. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: *Mindestens einer der Knoten  $r, u, l, o$  hat Grad 3.*

O.B.d.A habe  $r$  Grad 3. Da es Kanten  $\{r, o\}$  und  $\{r, u\}$  gibt, hat  $r$  nur noch einen weiteren Nachbarn, wir nennen diesen  $v$ . Da  $G$  eine Triangulierung ist, gibt es auch Kanten  $\{o, v\}$  und  $\{u, v\}$ . Wir betrachten nun den Graphen  $G'$ , der aus  $G$  hervorgeht, wenn man  $r$  und die zu  $r$  inzidenten Kanten löscht. Dieser Graph ist eine Triangulierung ohne trennende Dreiecke und hat einen Knoten weniger als  $G$ . Wenn  $G'$  ein Rectangular Dual  $R$  hätte, würde sich daraus leicht ein Rectangular Dual für  $G$  konstruieren lassen, indem man an der rechten Seite von  $R$  ein Rechteck für den Knoten  $v$  hinzufügt. Deshalb ergibt sich ein Widerspruch dazu, dass  $G$  der kleinste Graph seiner Art ist.



**Abbildung 5.2.:** Wenn einer der Knoten  $r, u, l, o$  von  $G$  nur Grad 3 hat, so können wir ihn einfach löschen und erhalten einen Graphen  $G'$  mit den gleichen Eigenschaften und einem Knoten weniger. Die Rectangular Duals von  $G$  und  $G'$  hängen ebenfalls auf einfache Art und Weise zusammen.

Fall 2: *Alle Knoten  $r, u, l, o$  haben mindestens Grad 4.*

Wir können nun vier zusätzliche Knoten benennen, die  $G$  auf jeden Fall hat. Wir nennen den eindeutigen Knoten, zu dem sowohl  $o$  als auch  $r$  adjazent sind  $v_1$ , usw., siehe Abbildung 5.3. Wir zeigen nun, dass es immer einen *zerschneidenden Pfad* gibt, d.h. einen Pfad von  $l$  nach  $r$ , der weder  $o$  noch  $u$  enthält und der  $G$  in zwei jeweils mindestens zwei Knoten enthaltende Teile schneidet.

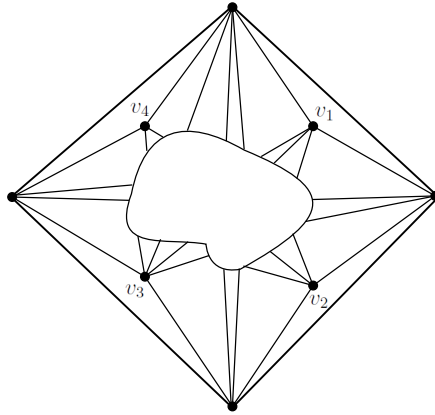


Abbildung 5.3.: Die Knoten  $v_1, \dots, v_4$ .

Fall 2.1: *Es gibt eine Kante  $\{v_1, v_3\}$ .*

Dann ist  $(l, v_3, v_1, r)$  ein zerschneidender Pfad. Der obere Teil von  $G$  enthält auf jeden Fall  $o$  und  $v_4$ , der untere  $u$  und  $v_2$ .

Fall 2.2: *Es gibt keine Kante  $\{v_1, v_3\}$*

Wir betrachten die von  $l$  und  $r$  verschiedenen, zu  $u$  adjazenten Knoten im Gegenuhrzeigersinn. Wir beginnen bei  $v_2$  und bezeichnen die darauf folgenden mit  $y_2, \dots, y_{n+1}$ , wobei  $y_{n+1} = v_3$ . Da  $G$  eine Triangulierung ist, ist  $(v_2, y_1, \dots, y_n, v_3)$  ein Pfad. Nun betrachten wir die zu  $v_3$  adjazenten, von  $l$  und  $u$  verschiedenen Knoten und bezeichnen sie im Uhrzeigersinn beginnend mit dem auf  $l$  folgenden Knoten mit  $x_1, \dots, x_m$ , wobei auch  $(l, x_1, \dots, x_m, u)$  ein Pfad ist.

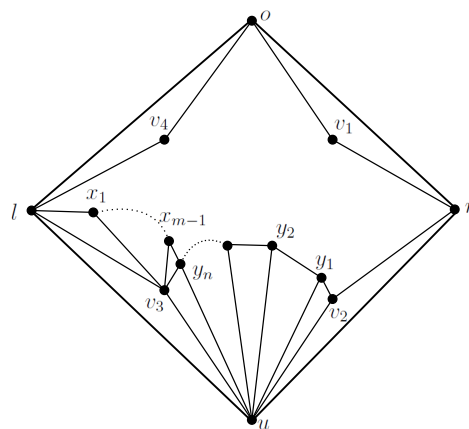


Abbildung 5.4.: Benennung der zu  $u$  bzw.  $v_3$  adjazenten Knoten im Fall 2.2.

Die beiden Pfade haben einen Knoten gemeinsam, nämlich  $x_m = y_n$ . Da es keine trennenden Dreiecke in  $G$  gibt, kann es keine Kanten  $\{u, o\}$ ,  $\{u, v_1\}$  oder  $\{v_3, o\}$  geben und wegen der Voraussetzung von Fall 2.2 gibt es die Kante  $\{v_1, v_3\}$  nicht. Daher ist  $(l, x_1, \dots, x_{m-1}, y_n, \dots, y_1, r)$  ein zerschneidender Pfad, denn der obere Teil von  $G$  enthält zumindest  $o$  und  $v_1$  und der untere  $u$  und  $v_3$ .

Die Existenz eines zerschneidenden Pfades ist also bewiesen. Wir nehmen nun einen bezüglich Knotenanzahl kürzesten zerschneidenden Pfad  $W = (l, w_1, \dots, w_k, r)$ , der o.B.d.A.  $v_1$  und  $v_3$  trennt. Wir konstruieren nun einen Graphen  $G_o$  aus dem Teilgraphen von  $G$ , der oberhalb von  $W$  liegt. Wir fügen einen Knoten  $u'$  und Kanten  $\{u', l\}, \{u', w_1\}, \dots, \{u', w_k\}, \{u', r\}$  hinzu.

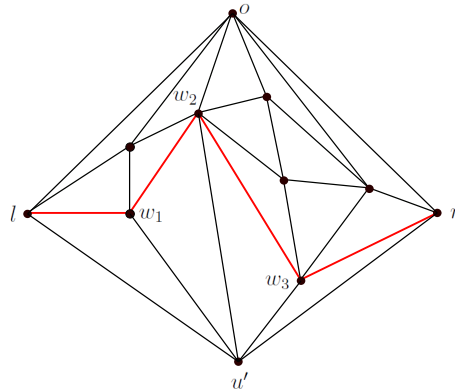


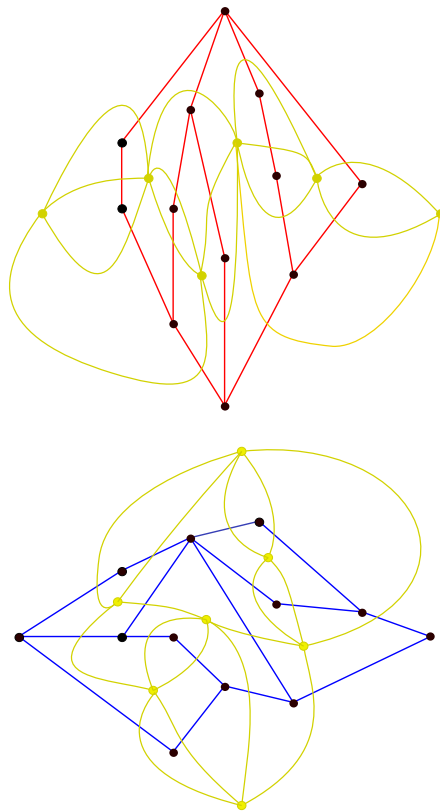
Abbildung 5.5.: Konstruktion von  $G_o$ .

Analog konstruieren wir durch Hinzufügen eines Knoten  $o'$  und entsprechenden Kanten aus dem Teilgraphen von  $G$ , der unterhalb von  $W$  liegt einen Graphen  $G_u$ . Wenn nun  $G_o$  und  $G_u$  Rectangular Duals haben, so lässt sich aus diesen beiden offensichtlich ein Rectangular Dual von  $G$  zusammensetzen. Mindestens einer von beiden darf also kein Rectangular Dual haben. Da aber beide mindestens einen Knoten weniger haben als  $G$  ergibt sich ein Widerspruch dazu, dass  $G$  die kleinste Triangulierung mit genau 4 Knoten auf der Grenze der Außenfläche ohne trennende Dreiecke ist, die kein Rectangular Dual ist.

□

## 5.2. Konstruktion von Rectangular Duals

He stellt in [8] einen auf einer im Voraus berechneten transversalen Struktur basierenden Algorithmus vor, der ein Rectangular Dual erzeugt. Sei also  $G$  eine 4-Triangulierung mit einer transversalen Struktur. Seien  $G_1$  das S-N-Netzwerk und  $G_2$  das W-O-Netzwerk von  $G$ .  $G_1^*$  sei der *erweiterte Dualgraph* von  $G_1$ , das bedeutet, dass er einen Knoten für jede innere Fläche von  $G_1$  hat und außerdem je einen für die Flächen  $f_W$  und  $f_O$ . Für jede Kante  $e \in E(G_1)$  gibt es eine entsprechende Kante  $e^* \in G_1^*$ , die zwischen dem  $G_1^*$ -Knoten zu der Fläche links von  $e$  und dem  $G_1^*$ -Knoten zu der Fläche rechts von  $e$  verläuft. Wir definieren den erweiterten Dualgraphen  $G_2^*$  von  $G_2$  analog, Knoten sind innere Flächen von  $G_2$  und  $f_S$  und  $f_N$ , Kanten wie oben.



**Abbildung 5.6.:** Die erweiterten Duale von  $G_1$  und  $G_2$  in Gelb.

Nun betrachten wir einen Knoten  $v$  von  $G_1$  bzw.  $G_2$ .  $v$  hat eingehende und ausgehende Kanten. Wir bezeichnen die am weitesten links liegende eingehende Kante

mit  $e_l^+$ , die am weitesten links liegende ausgehende Kante mit  $e_l^-$ , die am weitesten rechts liegende eingehende Kante mit  $e_r^-$  und die am weitesten rechts liegende ausgehende Kante mit  $e_r^+$ . Wir nennen die Fläche in  $G_1$  (bzw.  $G_2$ ), die an  $v$  zwischen  $e_l^+$  und  $e_l^-$  liegt *links von  $v$*  (bzw. *oberhalb von  $v$* ), die Fläche, die an  $v$  zwischen  $e_r^+$  und  $e_r^-$  liegt *rechts von  $v$*  (bzw. *unterhalb von  $v$* ). Wir schreiben für diese Flächen  $f_l(v)$  (bzw.  $f_o(v)$ ) und  $f_r(v)$  (bzw.  $f_u(v)$ ).

Zur Konstruktion eines Rectangular Duals kann nun der folgende Algorithmus formuliert werden:

**Algorithmus 5.2.** 1. Berechne eine transversale Struktur  $T$  auf  $G$ .

2. Berechne  $G_1$  und  $G_1^*$  sowie  $G_2$  und  $G_2^*$ .

3. Berechne  $l_1^*(f) = \text{Länge eines längsten } f_S - f\text{-Weges}$  für alle  $f \in V(G_1^*)$ .

4. Berechne  $l_2^*(f) = \text{Länge eines längsten } f_W - f\text{-Weges}$  für alle  $f \in V(G_2^*)$ .

5. Berechne  $x_1(v) = l_1^*(f_l)$ ,  $x_2(v) = l_1^*(f_r)$ .

6. Berechne  $y_1(v) = l_2^*(f_o)$ ,  $y_2(v) = l_2^*(f_u)$ .

7. Das Rechteck zum Knoten  $v$  ist nun gegeben durch

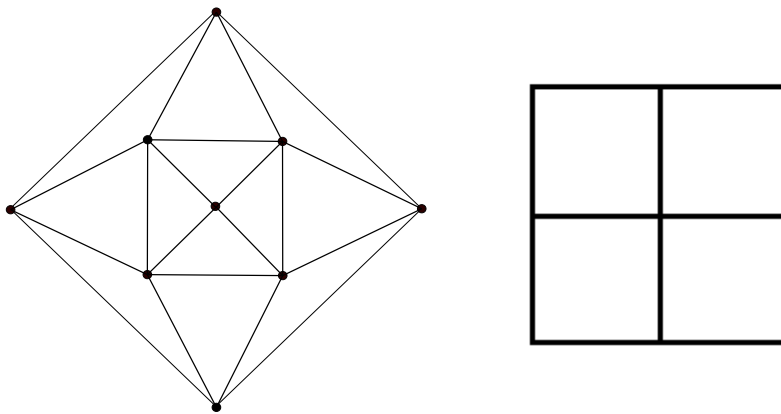
$$[x_1(v), x_2(v)] \times [y_1(v), y_2(v)]$$

.

# 6. Quadratkontaktdarstellungen

## 6.1. Entartung

Auch bei Quadratkontaktdarstellungen kann es zu Entartungen kommen.

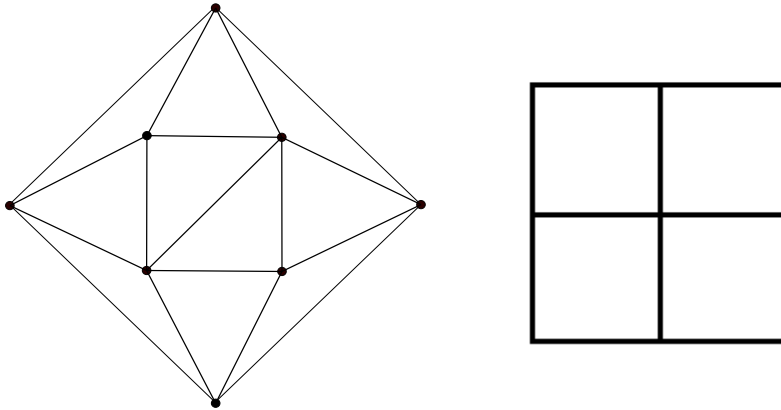


**Abbildung 6.1.:** Der Graph im linken Bild kann nur mit Quadraten dargestellt werden, wenn das Quadrat zum mittleren Knoten die Größe 0 hat.

Man kann diesem Problem -mit einem analogen Argument wie bei gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen- begegnen, indem man fordert, dass der Graph keine trennenden 4-Kreise besitzen darf. Trotzdem wollen wir hier aus verschiedenen Gründen nicht auf die Existenz trennender 4-Kreise verzichten. Man kann bei Dreieckskontaktdarstellungen den Inhalt trennender 3-Kreise als eigenständige kleinere Probleme betrachten. Dann kann man die gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen dieser kleineren Probleme einfach rekursiv in die Lösung des ursprünglichen Problems integrieren. Das funktioniert bei den trennenden 4-Kreisen nicht, da erstens der Rahmen einer Quadratkontaktdarstellung kein Quadrat, sondern nur ein Rechteck ist und zweitens der Graph nach dem Löschen



des Inhalts der trennenden 4-Kreise nicht mehr trianguliert ist. Wir werden die Entartungen also in Kauf nehmen, vor allem auch, weil noch ein weiteres Problem auftaucht, dem wir sowieso nicht Herr werden können: Unter Umständen können die Kontakte zwischen den Quadraten unklar werden.



**Abbildung 6.2.:** Der Graph im linken Bild kann nur mit 4 gleich großen Quadraten für die inneren Knoten dargestellt werden. Damit ist jedoch aus der Darstellung mit Quadraten nicht mehr ersichtlich welche der diagonal gegenüberliegenden Knoten im Graphen adjazent waren.

Wir werden im Folgenden eine Darstellung eines Graphen mit Quadraten, bei der dieses Problem auftritt als *unechte Quadratkontaktdarstellung* bezeichnen.

## 6.2. Satz über Existenz und Eindeutigkeit

**Satz 6.1.** *Sei  $G$  eine 4-Triangulierung mit Knoten  $N$ ,  $O$ ,  $S$ ,  $W$  an der Außenfläche. Dann gibt es eine (möglicherweise unechte) bis auf Skalierung eindeutige Quadratkontaktdarstellung für  $G$ .*

Der folgende Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit von Quadratkontaktdarstellungen wurde im Wesentlichen von Oded Schramm in [12] entwickelt.

### 6.3. Extremale Längen

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph und seien  $a, b \in V$ . Wir nennen eine nichtnegative Funktion  $m : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine *Metrik* auf  $G$ . Für einen Pfad  $\gamma = (v_0, \dots, v_n)$  und eine Metrik  $m$  definieren wir die  $m$ -Länge von  $\gamma$  als

$$l_m(\gamma) := \sum_{j=0}^{n-1} m(v_j).$$

Die  $(a, b)$ -Länge einer Metrik  $m$  definieren wir als  $l_m(a, b) := \inf_{\gamma} l_m(\gamma)$ , wobei das Infimum über alle Pfade geht, die in  $a$  beginnen und in  $b$  enden. Die *normalisierte Länge* von  $m$  ist definiert als

$$\hat{l}_m(a, b) := \frac{l_m(a, b)^2}{\|m\|}.$$

Die *extremale Länge* ist nun

$$L(G; a, b) := \sup_m \hat{l}_m(a, b),$$

wobei das Supremum über alle  $m$  mit  $\|m\| > 0$  geht. Eine *extremale Metrik* ist eine Metrik, für die dieses Supremum angenommen wird.

**Lemma 6.2.** *Seien  $G, a, b \in V(G)$  gegeben. Dann gibt es eine bis auf Skalierung eindeutige extremale Metrik  $m^*$  für  $(G; a, b)$ .*

*Beweis.* Einfach, s. [12]. □

### 6.4. Beweis: Eindeutigkeit

Wir zeigen nun, dass eine Quadratkontaktdarstellung eine extremale Metrik induziert. Wegen 6.2 folgt daraus die Eindeutigkeit der Quadratkontaktdarstellung. Wir werden im folgenden Beweis die Fläche der Quadratkontaktdarstellung auf 1 normieren, was natürlich problemlos möglich ist.

**Lemma 6.3.** *Sei  $G$  eine 4-Triangulierung mit den Knoten  $N, O, S, W$  an der Außenfläche und sei  $R_G$  ein Rectangular Dual mit Quadraten zu  $G$ , das im Bereich  $[0, h^{-1}] \times [0, h]$  liegt.  $Q_v$  sei das Quadrat zu Knoten  $v$  und  $s(v)$  sei die Seitenlänge von  $Q_v$ . Dann ist  $s$  eine extremale Metrik für  $(G; S, N)$ .*

*Beweis.* Sei  $m$  eine beliebige Metrik mit  $\|m\|^2 > 0$ . Wir zeigen, dass

$$\hat{l}_m \leq \hat{l}_s.$$

Sei  $t \in [0, h^{-1}]$ ,  $\beta_t$  die Linie  $\{t\} \times \mathbb{R}$  und  $\gamma_t = \{v \in V \mid \beta_t \cap Q_v \neq \emptyset\}$ .  $\gamma_t$  enthält also die Knotenmenge eines Pfades von  $S$  nach  $N$ . Deshalb gilt:

$$l_m \leq \sum_{v \in \gamma_t} m(v).$$

Integration über  $t$  liefert

$$h^{-1}l_m \leq \int_{t=0}^{h^{-1}} \sum_{v \in \gamma_t} m(v) dt.$$

Da jeder Knoten  $v$  für ein Intervall der Länge  $s(v)$  in  $\gamma_t$  ist, können wir die rechte Seite der Ungleichung umformulieren:

$$h^{-1}l_m \leq \sum_{v \in V} s(v)m(v) \leq \|s\| \|m\| = \|m\|.$$

Die letzte Gleichheit folgt, da die Fläche von  $R_G$  gleich 1 ist. Außerdem ist  $l_s = h$ , da es natürlich keinen Pfad  $(v_1, \dots, v_k)$  von  $S$  nach  $N$  gibt, bei dem die Seitenlängen seiner Quadrate  $Q_{v_1}, \dots, Q_{v_k}$  aufsummiert weniger als  $h$  ergeben. Insgesamt ergibt sich also:

$$\hat{l}_m = \frac{l_m^2}{\|m\|^2} \leq h^2 = \hat{l}_s^2 = \frac{\hat{l}_s^2}{\|s\|^2} = \hat{l}_s.$$

□

## 6.5. Beweis: Existenz

**Lemma 6.4.** Sei  $G = (V, E)$  eine 4-Triangulierung mit den Knoten  $N, O, S, W$  an der Außenfläche und sei  $m$  die extremale Metrik für die  $\|m\| = 1$  gilt. Sei  $h := l_m(S, N)$ ,  $R := [0, h^{-1}] \times [0, h]$ . Für jedes  $v \in V$  sei

$$Z_v := [x(v) - m(v), x(v)] \times [y(v) - m(v), y(v)],$$

wobei  $x(v)$  die kürzeste  $m$ -Länge eines Pfades von  $W$  nach  $v$  ist und  $y(v)$  die kürzeste  $m$ -Länge eines Pfades von  $S$  nach  $v$ . Dann bilden die  $Z_v, v \in V$  eine (möglicherweise unechte) Quadratkontaktdarstellung von  $G$ .

**Bemerkung:**  $Z_v$  ist ein Quadrat mit Seitenlänge  $m(v)$ .

*Beweis.* Der Beweis von Schramm läuft in zwei Schritten ab. Den dritten Schritt benötigt er nicht, da er andere Voraussetzungen für eine Quadratkontaktdarstellung definiert als wir. Hier wird folgendes gezeigt:

1.  $\{u, v\} \in E \implies Z_u \cap Z_v \neq \emptyset$ .
2.  $\bigcup_{v \in V} Z_v =: Z \supseteq R$ .
3.  $\{u, v\} \notin E \implies Z_u$  und  $Z_v$  haben maximal einen Punkt gemeinsam (und das genau dann wenn die Quadratkontaktdarstellung unecht ist).

Daraus kann man bereits folgern, dass die  $Z_v$  eine Quadratkontaktdarstellung bilden. Da nämlich

$$\text{area}(Z) \leq \sum_{v \in V} m(v)^2 \leq \|m\|^2 = 1 = \text{area}(R)$$

ist, ist damit

$$\bigcup_{v \in V} Z_v = R$$

und es kann keinen positiven Überlapp geben.

zu 1.: Hier müssen einerseits die Kanten zwischen zwei inneren Knoten überprüft werden und andererseits die Randbedingungen.

Sei  $\{u, v\} \in E$ . Man kann einen Pfad von  $W$  nach  $v$  erhalten, indem man zu einem beliebigen Pfad von  $W$  nach  $u$  die Kante  $\{u, v\}$  hinzufügt. Deshalb gilt offensichtlich  $y(v) - m(v) \leq y(u)$ . Wegen Symmetrie gilt auch  $y(u) - m(u) \leq y(v)$ . Diese beiden Ungleichungen ergeben zusammen, dass

$$[y(v) - m(v), y(v)] \cap [y(u) - m(u), y(u)] \neq \emptyset.$$

Da eine analoges Argument zeigt, dass

$$[x(v) - m(v), x(v)] \cap [x(u) - m(u), x(u)] \neq \emptyset$$

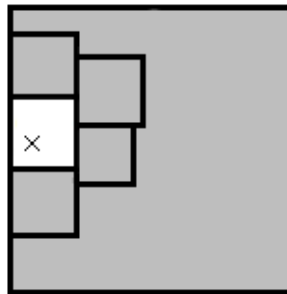
können wir folgern, dass

$$Z_v \cap Z_u \neq \emptyset.$$

Das beweist, dass 1. für die Kanten zwischen zwei inneren Knoten erfüllt ist. Dass es für die Kanten  $(S, \cdot)$  und  $(W, \cdot)$  gilt ist klar. Wenn  $v$  adjazent zu  $S$  bzw.  $W$  ist

gilt nämlich  $x(v) - m(v) \leq 0$  bzw.  $y(v) - m(v) \leq 0$ . Auch für die Kanten  $(., N)$  gilt 1., hier wegen der Definition von  $h$ . Für die Kanten  $(., O)$  ist es ein wenig schwieriger. Das genaue Vorgehen kann in [12] nachgelesen werden.

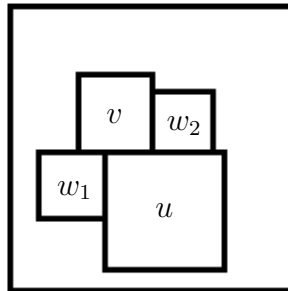
zu 2.: Hier gehen wir komplett anders vor als Schramm. Angenommen die  $Z_v$  überdecken  $R$  nicht. Dann existiert ein Punkt  $(x, y) \in R$  mit  $(x, y) \notin Z$ . Das könnte beispielsweise so aussehen:



**Abbildung 6.3.:** Ein Punkt  $(x, y)$ , der in  $R$ , aber nicht in  $Z$  liegt, ist mit einem Kreuz gekennzeichnet.

Man braucht mindestens  $4 + k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  Quadrate, um die Lücke, in der  $(x, y)$  liegt zu umschließen, im Graphen  $G$  entspricht das einem  $(4 + k)$ -Kreis  $C$ . Wegen 1. wissen wir, dass die Quadrate zu zwei adjazenten Knoten nicht disjunkt sind. Also kann  $C$  keine Sehnen haben. Das ergibt einen Widerspruch dazu, dass  $G$  trianguliert ist.

zu 3.: Sei  $\{u, v\} \notin E$ . Angenommen die Quadrate zu  $u$  und  $v$  haben mehr als einen Punkt gemeinsam. Das sieht dann z.B. so aus:



**Abbildung 6.4.:** In den Quadraten stehen die Namen der zugehörigen Knoten.

Wegen 1. wissen wir, dass die Quadrate zu im Graphen adjazenten Knoten nicht disjunkt sein können. Also können  $w_1$  und  $w_2$  nicht adjazent sein. Das ergibt einen Widerspruch dazu, dass  $G$  trianguliert ist, denn der 4-Kreis  $(u, w_1, v, w_2)$  hat somit keine Sehne.  $\square$

# 7. Quadratkontaktdarstellungen: Ein anderer Ansatz

Im Gegensatz zu der Methode von Schramm kann man jedoch auch ganz anders ansetzen, sehr ähnlich wie bei den Dreieckskontaktdarstellungen.

Hierbei nimmt die Transversale Struktur den Platz ein, den die Schnyder Woods bei den Dreieckskontaktdarstellungen inne hatten.

## 7.1. Layouts

Wir beginnen wieder mit Layouts, also Klassen von Rectangular Duals. Wir unterscheiden fünf verschiedene Beziehungen zweier Rechtecke  $A$  und  $B$  untereinander:

1.  $A$  und  $B$  berühren sich nicht.
2.  $A$  berührt mit seiner rechten Seite die linke Seite von  $B$ . Dann nennen wir  $A$  *links* von  $B$ .
3.  $A$  berührt mit seiner linken Seite die rechte Seite von  $B$ . Dann nennen wir  $A$  *rechts* von  $B$ .
4.  $A$  berührt mit seiner unteren Seite die obere Seite von  $B$ . Dann nennen wir  $A$  *oberhalb* von  $B$ .
5.  $A$  berührt mit seiner oberen Seite die untere Seite von  $B$ . Dann nennen wir  $A$  *unterhalb* von  $B$ .

Wir sagen zwei Rectangular Duals stehen in Relation zueinander, wenn alle ihre Rechtecke jeweils in der gleichen Beziehung zueinander stehen. Diese Relation ist

eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Rectangular Duals. Eine Klasse dieser Äquivalenzrelation nennen wir ein *Layout*.

**Satz 7.1.** *Sei  $G$  eine 4-Triangulierung ohne trennende Dreiecke. Dann gibt es eine Bijektion zwischen Layouts von Rechteckskontaktdarstellungen von  $G$  und transversalen Strukturen auf  $G$ .*

*Beweis.* „ $\implies$ “ Sei  $v$  ein Knoten mit zugehörigem Rechteck  $R_v$ . Färbe die Kanten zu Knoten von Rechtecken links und rechts von  $R_v$  blau und die Knoten zu Rechtecken oberhalb und unterhalb von  $R_v$  rot.

„ $\impliedby$ “ Benutze Algorithmus 5.2.

□

## 7.2. Das Gleichungssystem

Ein *Segment* ist eine maximal lange, ununterbrochene, waagrechte oder senkrechte Linie in dem Layout, das wir mit Algorithmus 5.2 für einen gegebenen Graphen  $G$  erhalten haben.

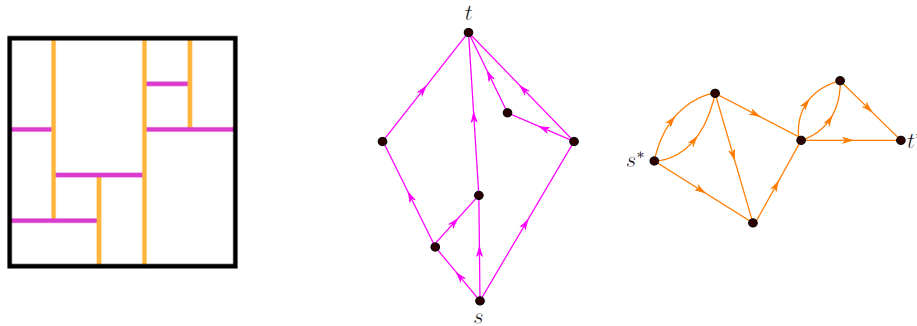
Wir wollen die Rechtecke der Kontaktdarstellung nun zu Quadraten machen, deshalb assoziieren wir mit jedem Rechteck eine Variable, die seine Seitenlänge repräsentiert. Wir stellen für jedes Segment eine Gleichung auf: Wir setzen die Summe der Variablen der Rechtecke auf der linken (bzw. oberen) Seite gleich der Summe der Variablen der Rechtecke auf der rechten (bzw. unteren) Seite des Segments.

### 7.2.1. Lösbarkeit

Um die Lösbarkeit des Gleichungssystems zu zeigen, benutzen wir Erkenntnisse aus der Flusstheorie. Zunächst einmal verwandeln wir jedoch unseren Graphen. Sei also  $G$  eine 4-zusammenhängende 4-Triangulierung mit Transversaler Struktur  $T$  und Gleichungssystem  $A_T x = b$  mit  $b = (1, 0, \dots, 0)^T$ . Wir konstruieren nun zwei Graphen  $H, H^*$ , die jeweils für jeden inneren Knoten von  $G$  eine Kante enthalten. Dazu erzeugen wir zunächst (z.B. mit Algorithmus 5.2) ein Rectangular



Dual von  $G$  und fassen dieses als Segmentkontaktdarstellung auf.  $H$  erhalten wir nun, indem wir auf jedes waagrechte Segment einen Knoten setzen und zwischen zwei Knoten je eine Kante hinzufügen für jedes Rechteck an das beide Segmente grenzen. Wir erhalten  $H^*$  wenn wir auf die senkrechten Segmente Knoten setzen und analog wie bei  $H_1$  Kanten hinzufügen (s. Abbildung 7.1). Offensichtlich sind  $H$  und  $H^*$  dual zueinander. Wir nennen die Knoten von  $H$ , die dem untersten bzw. obersten Segment entsprechen  $s$  bzw.  $t$  und die Knoten von  $H^*$ , die dem linken bzw. rechten Segment entsprechen  $s^*$  bzw.  $t^*$ .



**Abbildung 7.1.:** Eine Rechteckskontaktdarstellung mit farbig markierten Segmenten und die zugehörigen Segmentgraphen.

Wir stellen nun fest, dass trivialerweise das Folgende gilt:

**Lemma 7.2.** Sei  $w \in \mathbb{N}^{|V(G)-4|}$ . Dann gilt:

$$w \text{ ist eine Lösung von } A_T x = b, \quad b = (1, 0, \dots, 0)^T$$

$$\iff$$

$w$  ist eine Kantenbewertung, die sowohl auf  $H$  als auch auf  $H^*$  die Flusserhaltung in allen Knoten außer  $s, s^*, t, t^*$  erfüllt und für die

$$\sum_{e \text{ inzident zu } s} w_e = 1$$

gilt.

Wir zeigen nun, dass es eine (bis auf Skalierung) eindeutige Kantenbewertung gibt, die simultan auf  $H$  und  $H^*$  die Flusserhaltung erfüllt. Zunächst versuchen wir, dieses Problem so umzuformulieren, dass wir nur noch einen der beiden Graphen benötigen. Dazu definieren wir für einen Kreis  $C$  in  $H$ :

$$\sigma_w(C) := \sum_{e \in C} \bar{w}_e(C), \text{ wobei}$$

$$\bar{w}_e(C) = \begin{cases} w_e & e \text{ Vorwärtskante in } C \text{ im UZS} \\ -w_e & e \text{ Rückwärtskante in } C \text{ im UZS} \end{cases}$$

$\sigma_w(C)$  ist also die Summe der Kantenbewertung entlang eines Kreises im Uhrzeigersinn, wobei Vorwärtskanten positiv und Rückwärtskanten negativ gerechnet werden.

**Lemma 7.3.** *Eine Kantenbewertung  $w$  erfüllt die Flusserhaltung auf  $H^* \iff \sigma_w(C) = 0$  für alle Kreise  $C$  aus  $H$ .*

*Beweis.* Das ist leicht zu sehen: Wir betrachten zunächst einen Kreis  $C$  aus  $H$ , der eine Fläche begrenzt. Diese Fläche entspricht in  $H^*$  einem Knoten  $v^*$ . Die Vorwärtskanten des Kreises entsprechen den eingehenden Kanten des Knotens, die Rückwärtskanten den ausgehenden. Wenn  $\sigma_w(C) = 0$  gilt ist also die Flusserhaltung in  $v^*$  erfüllt und umgekehrt. Der allgemeine Fall folgt durch Induktion. Sei  $C$  ein Kreis in  $H$ , der  $k > 1$  Flächen umschließt. Wir nehmen eine Sehne  $e$  und betrachten die Kreise, in die  $e$  den Kreis  $C$  zerlegt. Wir nennen den Kreis in dem  $e$  Vorwärtskante ist  $C_1$  und der in dem  $e$  Rückwärtskante ist  $C_2$ . Laut Induktionsvoraussetzung ist  $\sigma_w(C_1) = \sigma_w(C_2) = 0$  und somit  $\sigma_w(C) = (\sigma_w(C_1) - w_e) + (\sigma_w(C_2) + w_e) = 0$ .

□

Wir müssen nun nur noch zeigen, dass es eine eindeutige Kantenbewertung  $w$  gibt, die die Flusserhaltung auf  $H$  erfüllt und für die zusätzlich gilt, dass  $\sigma_w(C) = 0 \forall$  Kreise  $C$  aus  $H$ . Dazu betrachten wir den Zykel- und den Kozykelraum von  $H$ .

Diese sind bekanntlich orthogonal zueinander und es gilt

$$\underbrace{\dim(\text{Zykelraum})}_{|E(H)|-|V(H)|+1} + \underbrace{\dim(\text{Kozykelraum})}_{|V(H)|-1} = |E(H)|.$$

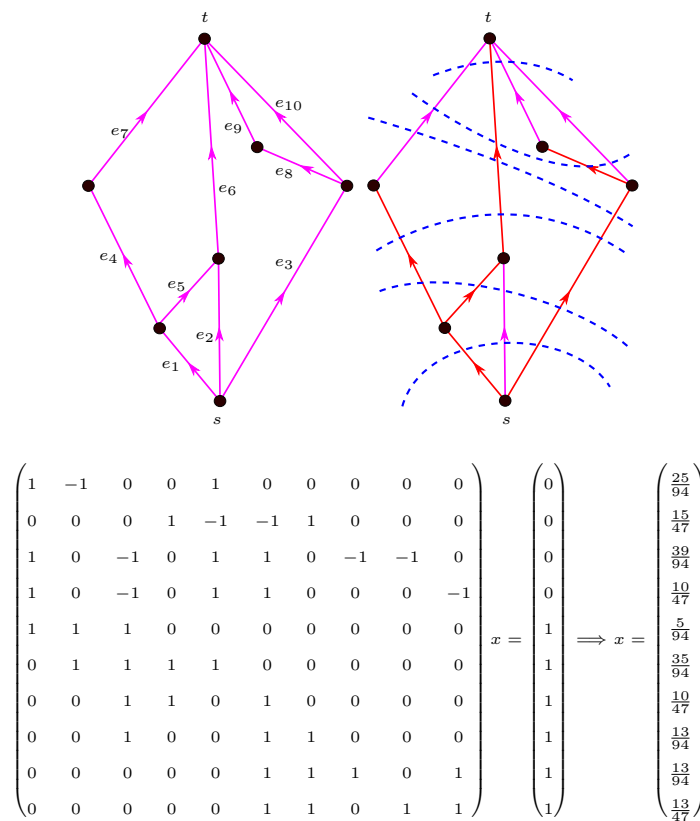
Die Inzidenzvektoren  $\xi_{C_j}$ ,  $j = 1, \dots, |E(H)| - |V(H)| + 1$  der Fundamentalkreise von  $H$  bilden eine Basis des Zykelraums. Auch für den Kozykelraum wählen wir eine Basis. Zunächst betrachten wir die Mengen, die entstehen, wenn wir mit  $B_1 = \{s\}$  starten und dann sukzessive in Pfeilrichtung immer einen Knoten  $v \neq t$  hinzufügen, so dass  $B_i = B_{i-1} \cup \{v\}$ . Die Basis besteht nun aus den Inzidenzvektoren  $\xi_{S_k}$ ,  $k = 1, \dots, |V(H)| - 1$  der Schnitte  $\delta(B_1), \dots, \delta(B_{|V(H)|-1})$ . Dass diese Vektoren linear unabhängig sind und somit eine Basis des Kozykelraums bilden ist leicht zu sehen. Wir schreiben die Vektoren  $\xi_{C_j}$ ,  $j = 1, \dots, |E(H)| - |V(H)| + 1$  und  $\xi_{S_k}$ ,  $k = 1, \dots, |V(H)| - 1$  nun nacheinander zeilenweise in eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{|E(H)| \times |E(H)|}$  und definieren einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^{|E(H)|}$  durch

$$b = \left( \underbrace{0 \dots 0}_{|E(H)|-|V(H)|+1} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{|V(H)|-1} \right)^T.$$

Da die Matrix  $M$  regulär ist hat das Gleichungssystem  $Mx = b$  eine eindeutige Lösung  $w$ . Diese Lösung ist die Kantenbewertung, die wir gesucht haben, denn sie ist die einzige, die  $w^T * \xi_C = 0$  für alle Kreise  $C$  aus  $H$  und  $w^T * \xi_S = 1$  für alle Schnitte  $S$  aus  $H$  erfüllt. Wenn für alle Fundamentalkreise  $C$   $\bar{w}_e(C) = 0$  ist, so gilt natürlich dass  $w_e$  für alle Kreise gleich 0 ist. Wenn für alle Schnitte, deren Inzidenzvektoren in der oben konstruierten Basis liegen gilt, dass  $w_e(S) = 1$  ist, so gilt das auch für alle anderen  $s$ - $t$ -Schnitte, denn durch Hinzufügen und Wegnehmen von Knoten ändert sich wegen der erfüllten Flusserhaltung der  $w_e$ -Wert eines Schnittes nicht und jeder  $s$ - $t$ -Schnitt lässt sich durch Hinzufügen und Wegnehmen von Knoten auf einen  $s$ - $t$ -Schnitt aus der Basis zurückführen.

**Bemerkung:**

Man kann die Lösbarkeit des Gleichungssystems auch ähnlich wie bei den Dreiecken in Abschnitt 3.3.2 beweisen, mit perfekten Matchings. Allerdings ist es ein wenig komplizierter. Sei  $\hat{A}_T$  die Matrix, die aus  $A_T$  hervorgeht, wenn man komponentenweise die Betragsfunktion anwendet. Der Graph  $\hat{G}$ , der die Matrix  $\hat{A}_T$  als Adjazenzmatrix hat, hat hier 4-Kreise als Flächen. Deshalb unterscheiden sich die Vorzeichen der perfekten Matchings hier durchaus. Da die  $-1$ en nicht isoliert in einzelnen Spalten stehen wie das bei den Dreiecken der Fall war ist auch i.A.



**Abbildung 7.2.:** Links oben der Graph  $H$  von oben mit nummerierten Kanten. Rechts oben sind die  $s$ - $t$ -Schnitte eingezeichnet, die wir für die Matrix verwenden und der spannende Baum, der die verwendeten Fundamentalkreise definiert.

$\det A_T \neq \pm \det \hat{A}_T$ . Für den Beweis muss man also zusätzlich die Vorzeichen der Einträge der Matrix betrachten.

### 7.3. Neues Problem

Dass das Gleichungssystem zu einer Transversalen Struktur eine eindeutige Lösung hat wissen wir nun. Allerdings muss diese im Allgemeinen natürlich nicht positiv sein. Zusätzlich gibt es noch ein neues Problem: Selbst wenn die Lösung positiv ist, heißt das noch nicht unbedingt, dass sie einer Quadratkontaktdarstellung unseres Graphen entspricht. Wenn an einem Segment auf beiden Seiten mehrere Quadrate beteiligt sind, so kann es passieren, dass Kontakte verloren gehen oder dass sich Quadrate berühren, die das gar nicht sollen.

**Bemerkung:** Wenn man eine Dreieckskontaktdarstellung, die nicht rein ist als Vorlage für das Gleichungssystem zulässt, so kann es ebenfalls derartige Probleme geben.

# Literaturverzeichnis

- [1] Nicolas Bonichon, Stefan Felsner, and Mohamed Mosbah. Convex drawings of 3-connected plane graphs. *Algorithmica*, 47(4):399–420, 2007.
- [2] Enno Brehm. 3-orientations and schnyder 3-tree-decompositions, 2000.
- [3] Hubert de Fraysseix and Patrice Ossona de Mendez. On topological aspects of orientations, 2001.
- [4] Hubert de Fraysseix, Patrice Ossona de Mendez, and Pierre Rosenstiehl. On triangle contact graphs. *Combinatorics, Probability & Computing*, 3:233–246, 1994.
- [5] Stefan Felsner. *Geometric Graphs and Arrangements: Some Chapters from Combinatorial Geometry*. Vieweg, 2004.
- [6] Éric Fusy. *Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques*. PhD thesis, 2007.
- [7] Éric Fusy. Transversal structures on triangulations: A combinatorial study and straight-line drawings. *Discrete Mathematics*, 309(7):1870–1894, 2009.
- [8] Xin He. On finding the rectangular duals of planar triangular graphs. *SIAM J. Comput.*, 22:1218–1226, 1993.
- [9] Krzysztof Kozminski and Edwin Kinnon. Rectangular duals of planar graphs. *Networks*, 15:145–157, 1985.
- [10] Dominique Poulalhon and Gilles Schaeffer. Optimal coding and sampling of triangulations. *Algorithmica*, 46:505–527, November 2006.
- [11] Walter Schnyder. Embedding planar graphs on the grid. In *Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, SODA '90*, pages 138–148, Philadelphia, PA, USA, 1990. Society for Industrial and

Applied Mathematics.

- [12] Oded Schramm. Square tilings with prescribed combinatorics. *Israel Journal of Mathematics*, 84:97–118, 1993.
- [13] Yi ting Chiang, Ching chi Lin, and Hsueh i Lu. Orderly spanning trees with applications. *SIAM Journal on Computing*, 34:924–945, 2005.

# Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich meine Diplomarbeit ohne Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.