Konjugiertenklassen und Harish-Chandra-Serien symplektischer und orthogonaler Gruppen

Diplomarbeit im Fachbereich Mathematik
an der RWTH Aachen

von

Martin Skutella
aus Freiburg im Breisgau

27. Juni 1995

Betreuer der Arbeit: Priv.-Doz. Dr. M. Geck

Vorwort

Das Thema dieser Arbeit ist die modulare Darstellungstheorie bestimmter endlicher Gruppen vom Lie-Typ. Um den Stellenwert dieser Klasse von Gruppen in der Gruppentheorie bewerten zu können, muß man die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen kennen. Im Jahre 1981 konnte nach langjähriger Arbeit vieler Mathematiker bewiesen werden, daß jede endliche einfache Gruppe in der folgenden Auflistung steht:

- Zyklische Gruppen von Primzahlordnung
- Alternierende Gruppen der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ mit $n \geq 5$
- Endliche Gruppen vom Lie-Typ
- 26 sporadische einfache Gruppen

Die Darstellungstheorie der zyklischen Gruppen ist trivial, und die Darstellungstheorie der alternierenden Gruppen steht in engem Zusammenhang zu der Theorie der symmetrischen Gruppen. Die 26 sporadischen Gruppen müssen im wesentlichen einzeln behandelt werden, also bleibt die Klasse der endlichen Gruppen vom Lie-Typ, deren Theorie bei weitem noch nicht vollständig bekannt ist.

In Kapitel 1 dieser Arbeit wird die Harish-Chandra-Theorie eingeführt, mit deren Hilfe man die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere einer Gruppe mit zerfallendem BN-Paar in Serien einteilen kann. Hiß hat in [18] diese Vorgehensweise auf die modulare Darstellungstheorie übertragen. Für die genaue Kenntnis der Harish-Chandra-Serien benötigt man einerseits Informationen über kuspidale Moduln, andererseits muß man die Aufspaltung eines Harish-Chandra-induzierten Moduls betrachten. Wie Geck, Hiß und Malle in [15] gezeigt haben, kann man das zweite Problem auf die Untersuchung der einfachen Moduln der Endomorphismen-Algebra zurückführen; dort wurde auch die Struktur dieser Endomorphismen-Algebra beschrieben. Für eine genaue Kenntnis ihrer einfachen Moduln benötigt man jedoch Informationen über gewisse Parameter der Algebra, die noch nicht vollständig bekannt sind. In Abschnitt 1.5 dieser Arbeit wird gezeigt, daß diese Parameter unter bestimmten Umständen Elemente des zugrundeliegenden Primkörpers sind. Das gilt insbesondere im Fall der klassischen Gruppen. Mit Hilfe dieses Ergebnisses können Aussagen über 2-modulare Brauercharaktere gemacht werden, da die erwähnte Endomorphismen-Algebra über einem Körper der Charakteristik 2 dann vollständig beschrieben ist.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Behandlung der endlichen symplektischen Gruppen $CSp_{2n}(q)$, wobei q eine Potenz der Primzahl p mit $p \neq 2$ ist. Fast alle Ergebnisse konnten aber gleichzeitig auch für die speziellen orthogonalen Gruppen $SO_{2n+1}(q)$ gezeigt werden. Diese Gruppen sind die Fixpunktmengen der affinen algebraischen Gruppen $CSp_{2n}(k)$ und $SO_{2n+1}(k)$ unter einem Frobenius-Morphismus F, wobei k der algebraische Abschluß des Körpers GF(p) ist. In Kapitel 2 werden die wichtigsten Grundlagen aus der Theorie der affinen algebraischen Gruppen und der endlichen Gruppen vom Lie-Typ dargestellt.

Im folgenden sei G eine der oben genannten affinen algebraischen Gruppen und G^F die entsprechende endliche Gruppe vom Lie-Typ. Geck hat in [13] gezeigt, daß die irreduziblen unipotenten 2-modularen Brauercharaktere von G^F in Bijektion zu den unipotenten Konjugiertenklassen von G^F stehen. In [16] haben Geck und Malle die Vermutung geäußert, daß dabei die kuspidalen unipotenten 2-modularen Brauercharaktere den sogenannten kuspidalen unipotenten Konjugiertenklassen entsprechen. Eine unipotente Konjugiertenklasse von G^F soll kuspidal heißen, wenn sie trivialen Schnitt mit allen echten Levi-Untergruppen von G^F hat. In Abschnitt 3.6 dieser Arbeit wird gezeigt, daß die Anzahl der kuspidalen unipotenten 2-modularen Brauercharaktere von $CSp_{2n}(q)$ der Anzahl der kuspidalen unipotenten Konjugiertenklassen dieser Gruppe entspricht (für die Gruppe $SO_{2n+1}(q)$ ist der Beweis dafür nicht vollständig gelungen). Um zu diesem Ergebnis zu kommen, wird in Kapitel 3 eine Parametrisierung der unipotenten Konjugiertenklassen von G^F durch Tripel von Partitionen entwickelt. Anhand dieser Parametrisierung kann man auch ablesen, mit welchen Levi-Untergruppen von G^F sich eine Konjugiertenklasse nicht-trivial schneidet. Insbesondere geht daraus hervor, welche Klassen kuspidal sind.

Bei der Beschäftigung mit den unipotenten Konjugiertenklassen von $CSp_{2n}(q)$ konnte ein Vertretersystem für diese Klassen gefunden werden (allgemein siehe hierzu den Artikel von Springer-Steinberg in [2]). In Kapitel 4 werden explizit Matrizen angegeben, die in den verschiedenen unipotenten Konjugiertenklassen liegen. Für eine unipotente Konjugiertenklasse C von G ist C^F die Vereinigung von unipotenten Konjugiertenklassen von G^F. Ist u ein Element von C^F und H der Zentralisator von u in G, dann stehen die Konjugiertenklassen C' von G^F mit $C' \subseteq C$ in Bijektion zu den Zusammenhangskomponenten von H. Daher werden zunächst F-stabile Vertreter für die unipotenten Klassen der affinen algebraischen Gruppe $CSp_{2n}(k)$ angegeben und die Zusammenhangskomponenten deren Zentralisatoren untersucht. Auch für die unipotenten Konjugiertenklassen der speziellen orthogonalen Gruppe $SO_{2n+1}(k)$ wird ein Vertretersystem angegeben. Da die Struktur der entsprechenden Zentralisatoren in diesem Fall jedoch wesentlich komplizierter zu sein scheint, können hier nur Kandidaten für ein Vertretersystem der unipotenten Konjugiertenklassen von $SO_{2n+1}(q)$ angegeben werden.

Danksagungen

Seit Beginn meines Studiums wurde ich in zahlreichen Übungen und Seminaren von Herrn Priv.-Doz. Dr. M. Geck betreut. Er gab mir auch im Verlauf meines Hauptstudiums den Anstoß, mich mit endlichen Gruppen vom Lie-Typ zu beschäftigen. Dafür und für die Betreuung der vorliegenden Arbeit möchte ich mich an dieser Stelle ganz herzlich bedanken.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Pahlings, durch dessen Vorlesungen mein Interesse für die Mathematik allgemein und speziell für die Algebra geweckt wurde. Er ermöglichte mir nach Abschluß meines Vordiploms die Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes, wofür ich besonders dankbar bin. Der Studienstiftung sei herzlich für die nicht nur finanzielle Unterstützung meines Hauptstudiums gedankt.

Schließlich möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls D für Mathematik bedanken, die mich während meines Studiums betreut und unterstützt haben.

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbst erstellt und keine anderen als die angegebenen und erlaubten Hilfsmitteln verwendet habe.

Aachen, den 27. Juni 1995

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Darstellungstheorie von Gruppen mit BN-Paar

1.1 Gruppen mit BN-Paar

In diesem Abschnitt soll das Konzept der Gruppen mit BN-Paar eingeführt werden. Es entstand ursprünglich aus Chevalleys Analysen der Struktur von den heute nach ihm benannten Chevalley-Gruppen. Das exakte Axiomensystem für Gruppen mit BN-Paar wurde von J. Tits entwickelt. Die Theorie hat eine grundlegende Bedeutung für die Behandlung der Gruppen vom Lie-Typ erlangt, da sich mit ihrer Hilfe eine Vielzahl von Fragen gleich für eine sehr große Klasse von Gruppen beantworten lassen.

Die im folgenden dargestellten Ergebnisse aus der Theorie der Gruppen mit BN-Paar können beispielsweise in den Büchern von Carter [4, Kapitel 8], [5, Kapitel 2] oder bei Curtis und Reiner [7, §64, §65 und §69] nachgelesen werden. Dort findet man auch die Beweise, die hier ausgelassen werden sollen.

Definition 1.1.1 *Zwei Untergruppen B und N einer Gruppe G bilden ein BN-Paar, wenn sie die folgenden Axiome erfüllen:*

BN1: $G = \langle B, N \rangle$

BN2: $T := B \cap N \trianglelefteq N$

BN3: *Es sei $W := N/T$, dann gilt $W = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle$ und ${r_\alpha}^2 = 1$ für alle $\alpha \in \Pi$.*

BN4: *Es sei $\pi : N \to W$ der natürliche Epimorphismus von N auf W, dann gilt für $n_\alpha, n \in N$ mit $\pi(n_\alpha) = r_\alpha$*

$$Bn_\alpha B \cdot BnB \subseteq Bn_\alpha nB \cup BnB.$$

BN5: *Für $n_\alpha \in N$ mit $\pi(n_\alpha) = r_\alpha$ gilt $n_\alpha B n_\alpha \neq B$.*

Man nennt W die dem BN-Paar zugeordnete *Weyl-Gruppe*, die Erzeuger r_α werden *ausgezeichnete Erzeuger* von W genannt. Die Kardinalität der Menge Π heißt *Rang* des BN-Paares. Der Rang des BN-Paares ist dadurch eindeutig bestimmt, da sogar die Menge der ausgezeichneten Erzeuger $\{r_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ eindeutig bestimmt ist. Die Untergruppe B wird Borel-Untergruppe von G genannt.

In dem folgenden Lemma sind einige grundlegende Ergebnisse über Gruppen mit BN-Paar zusammengefaßt (vgl. [5, Proposition 2.1.1. bis 2.1.6.]).

Lemma 1.1.2 *Es sei G eine Gruppe mit einem BN-Paar, dann gilt:*

(i) $G = BNB$

(ii) $BnB = Bn'B$ *genau dann, wenn* $\pi(n) = \pi(n')$ *für* $n, n' \in N$. *Es gibt also eine Bijektion zwischen den Doppelnebenklassen von* B *in* G *und den Elementen von* W.

(iii) *Es sei* J *eine Teilmenge der Indexmenge* Π *und* W_J *die Untergruppe von* W, *die von den Elementen* r_α *mit* $\alpha \in J$ *erzeugt wird. Ist* N_J *die Untergruppe von* N, *für die* $N_J/T = W_J$ *gilt, dann ist* $P_J := BN_JB$ *eine Untergruppe von* G.

(iv) *Alle Untergruppen von* G, *die oberhalb von* B *liegen, sind von der Form* P_J *für ein* $J \subseteq \Pi$.

(v) *Die Untergruppen* P_J *von* G *sind selbstnormalisierend,* P_J *und* P_K *sind für* $J \neq K$ *verschieden und nicht zueinander konjugiert, es gilt* $P_J \cap P_K = P_{J \cap K}$. *Die Untergruppen* P_J *bilden also einen Verband, der isomorph zum Teilmengenverband von* Π *ist.*

Die Untergruppen der Form P_J heißen *Standard-parabolische Untergruppen* von G. Eine *parabolische Untergruppe* von G ist eine Untergruppe, die für ein $J \subseteq \Pi$ zu P_J konjugiert ist. Die Menge der N-konjugierten Standard-parabolischen Untergruppen wird mit

$$\mathcal{P} = \{{P_J}^n \mid J \subseteq \Pi, n \in N\}$$

bezeichnet.

Wie schon in Lemma 1.1.2 deutlich geworden ist, kann man viele Informationen über die Gruppe G aus ihrer Weyl-Gruppe W erhalten. Es liegt also nahe, sich zunächst einmal näher mit der Weyl-Gruppe zu beschäftigen. Das folgende Resultat ist von grundlegender Bedeutung für die weitere Theorie (vgl. [5, Proposition 2.1.7.]).

Satz 1.1.3 *Die Weyl-Gruppe* $W = N/B \cap N$ *eines* BN*-Paares ist eine Coxetergruppe auf den durch* Π *indizierten Erzeugern, d.h.*

$$W \cong \langle r_\alpha, \alpha \in \Pi \mid {r_\alpha}^2 = 1, (r_\alpha r_\beta)^{m_{\alpha\beta}} = 1, \alpha \neq \beta \rangle,$$

wobei $m_{\alpha\beta}$ *die Ordnung des Produktes* $r_\alpha r_\beta$ *in* W *ist.*

Im allgemeinen muß diese Gruppe W nicht endlich sein, nicht einmal die Menge der ausgezeichneten Erzeuger muß endlich sein. In den Fällen, die später behandelt werden sollen, wird die Weyl-Gruppe jedoch immer endlich sein. Daher soll im Weiteren angenommen werden, daß W endlich ist. Die Menge Π sei gegeben durch $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Dann hat W eine Darstellung als Coxeter-Gruppe der Form

$$W = \langle r_{\alpha_1}, \ldots, r_{\alpha_n} \mid {r_{\alpha_i}}^2 = 1, (r_{\alpha_i} r_{\alpha_j})^{m_{ij}} = 1, i \neq j \rangle.$$

Man kann die Coxeter-Gruppe W in folgender Weise als Gruppe von Isometrien auf einem euklidischen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen auffassen. Es sei V ein Vektorraum der Dimension n über den reellen Zahlen mit Basis $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Auf V kann dann durch die Zuordnung

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle := -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}$$

eine Bilinearform definiert werden. Das Element r_{α_i} von W kann man als Spiegelung an der zu α_i senkrechten Hyperebene auffassen. Die Elemente aus $\Sigma := W(\Pi)$ heißen *Wurzeln*, und Π heißt Menge der *fundamentalen Wurzeln*. Jede Wurzel $\alpha \in \Sigma$ hat die Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$, wobei entweder alle $\lambda_i \geq 0$ oder alle $\lambda_i \leq 0$ gewählt werden können. Man definiert Σ^+ und Σ^- durch

$$\Sigma^+ = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha = \sum \lambda_i \alpha_i \text{ mit } \lambda_i \geq 0 \ \},$$

$$\Sigma^- = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha = \sum \lambda_i \alpha_i \text{ mit } \lambda_i \leq 0\}.$$

Die Elemente dieser Mengen heißen *positive* bzw. *negative Wurzeln*. Die Menge der Wurzeln Σ ist die disjunkte Vereinigung von Σ^+ und Σ^-.

Ist $J \subseteq \Pi$, so ist die Untergruppe W_J von W eine Coxetergruppe auf der Erzeugermenge $\{r_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Das entsprechende Wurzelsystem wird mit Σ_J bezeichnet.

Für ein Element $1 \neq w \in W$ bezeichnet $l(w)$ die minimale Länge einer Darstellung von w in den Erzeugern r_α, $\alpha \in \Pi$. Man setzt außerdem $l(1) = 0$. Dann gibt es in jeder Untergruppe W_J von W $(J \subseteq \Pi)$ ein eindeutiges Element maximaler Länge, das mit w_J bezeichnet wird. Für das Element w_Π schreibt man auch w_0.

Stellt man schärfere Bedingungen an eine Gruppe G mit einem BN-Paar, so erhält man weitere sehr nützliche Ergebnisse über die Struktur der Gruppe. Zu diesem Zweck führt man Gruppen mit zerfallendem BN-Paar ein.

Definition 1.1.4 *Es sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Dann besitzt G ein zerfallendes BN-Paar der Charakteristik p, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) G besitzt ein BN-Paar, so daß $T = \bigcap_{n \in N} nBn^{-1}$, wobei $T = B \cap N$.

(ii) Es gibt einen Normalteiler U von B, so daß B das semidirekte Produkt von U mit T ist.

(iii) U ist der größte p-Normalteiler in B, und T ist eine abelsche p'-Gruppe.

Es sei nun G eine Gruppe mit einem zerfallenden BN-Paar, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ und Σ das zu der Weyl-Gruppe W gehörende Wurzelsystem. Für $\alpha_i \in \Pi$ definiert man die Untergruppe $X_{\alpha_i} := U \cap U^{n_0 n_i}$ von U. Dabei seien $n_0, n_i \in N$ mit $\pi(n_0) = w_0$ und $\pi(n_i) = r_{\alpha_i}$. Die Untergruppe X_{α_i} ist von der Wahl von n_0 und n_i unabhängig. Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Untergruppen $nX_{\alpha_i}n^{-1}$ mit $n \in N$, $\alpha_i \in \Pi$, und der Menge der Wurzeln Σ. Ist $\pi(n) = w$, so wird der Untergruppe $nX_{\alpha_i}n^{-1}$ die Wurzel $w(\alpha_i)$ zugeordnet. Man schreibt auch $nX_{\alpha_i}n^{-1} = X_{w(\alpha_i)}$. Diese Untergruppen heißen daher auch *Wurzeluntergruppen*.

Satz 1.1.5 *Es sei G eine Gruppe mit einem zerfallenden BN-Paar der Charakteristik p. Für $J \subseteq \Pi$ definiere*

$$L_J := \langle T, X_\alpha \mid \alpha \in \Sigma_J \rangle.$$

Dann ist L_J selbst eine Gruppe mit einem zerfallenden BN-Paar der Charakteristik p, das durch die Untergruppen $B_J = T(U \cap U^{w_0 w_J})$ und $N_J = \pi^{-1}(W_J)$ gebildet wird. Die zugehörige Weyl-Gruppe ist $W_J = N_J/T$.

Die Untergruppen der Form L_J für ein $J \subseteq \Pi$ heißen *Standard-Levi-Untergruppen* von G. Um weitere Ergebnisse zu erhalten, benötigt man die *Kommutator-Relationen* für Wurzeluntergruppen. Sind $\alpha, \beta \in \Sigma$ und $\alpha \neq \beta$, so soll gelten

$$[X_\alpha, X_\beta] \subseteq \prod_{i>0, j>0} X_{i\alpha + j\beta}.$$

Diese Kommutator-Relationen folgen nicht in einfacher Weise aus den Axiomen für ein zerfallendes BN-Paar, sie gelten jedoch in allen wichtigen Fällen. Für das Folgende wird angenommen, daß die Kommutator-Relationen für G erfüllt sind. Im nächsten Lemma sind die wichtigsten Folgerungen zusammengefaßt.

Lemma 1.1.6 *Es sei G eine endliche Gruppe mit einem zerfallenden BN-Paar, das die Kommutator-Relationen erfüllt.*

(i) Ist $U_J = U \cap U^{w_J}$, so ist U_J ein Normalteiler von P_J. Weiter gilt $P_J = U_J L_J$ und $U_J \cap L_J = \{1\}$.

Die Zerlegung von P_J in U_J und L_J heißt Standard-Levi-Zerlegung, L_J heißt Standard-Levi-Komplement von P_J. Die in P_J zu L_J konjugierten Untergruppen heißen Levi-Komplemente von P_J.

(ii) Die Standard-parabolische Untergruppe von L_J, die zu der Teilmenge K von J gehört, ist durch $P_K \cap L_J$ gegeben. Das Standard-Levi-Komplement von $P_K \cap L_J$ ist L_K.

Jede parabolische Untergruppe $P \in \mathcal{P}$ hat die Form $P = P_J^n$ für ein $n \in N$ und ein eindeutig bestimmtes $J \subseteq \Pi$. Es gibt also zu P eine Levi-Zerlegung

$$P = U \cdot L, \quad L = {L_J}^n, \quad U = {U_J}^n.$$

Diese Zerlegung ist eindeutig, da L und U unabhängig von der Wahl von $n \in N$ sind. Die Untergruppe L heißt dann *Standard-Levi-Komplement* von P. Die in P zu L konjugierten Untergruppen heißen *Levi-Komplemente* von P oder *Levi-Untergruppen* von G. Analog zu der Menge $\mathcal{P}$ sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Standard-Levi-Komplemente von parabolischen Untergruppen aus P, also

$$\mathcal{L} = \{{L_J}^n \mid J \subseteq \Pi, n \in N\}.$$

1.2 Harish-Chandra-Induktion und Restriktion

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Darstellungstheorie von Gruppen mit zerfallendem BN-Paar. Das wohl wichtigste Werkzeug dafür ist die Harish-Chandra-Theorie. Die zugrundeliegenden Ideen wurden erstmals von Green bei der Behandlung der Charaktere von vollen linearen Gruppen verwendet und wurden dann von Harish-Chandra auf reduktive Gruppen über endlichen Körpern angewendet. Später fand die Harish-Chandra-Theorie auch Anwendung in der modularen Darstellungstheorie. Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt können in dem Buch von Curtis und Reiner [7, §70] nachgelesen werden, der modulare Fall ist in dem Artikel von Hiß [18] beschrieben. Einen weiteren wichtigen Beitrag dazu haben Dipper und Du in [10] geliefert.

Im folgenden sei p eine Primzahl, G eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar der Charakteristik p und $l \neq p$ eine weitere Primzahl oder $l = 0$. Weiter sei (K, R, k) ein l-modulares Zerfällungssystem für alle Untergruppen von G, im Fall $l = 0$ soll $K = R = k$ gelten.

Da eine echte Levi-Untergruppe einer Gruppe G mit zerfallendem BN-Paar wieder ein zerfallendes BN-Paar von echt kleinerem Rang besitzt, liegt es nahe, Fragestellungen bezüglich G auf die kleineren Levi-Untergruppen zurückzuführen. Es sei also $L \in \mathcal{L}$, dann gibt es ein $P \in \mathcal{P}$, so daß L das Standard-Levi-Komplement von P ist, also

$$P = U \cdot L \quad \text{mit} \quad U = O_p(P).$$

Es sei nun C einer der Ringe K, R oder k. Alle im folgenden betrachteten CG- oder CL-Moduln sollen endlich erzeugte Links-Moduln sein, die als C-Moduln frei seien. Einen beliebigen CL-Modul X kann man als CP-Modul $\tilde{X}$ auffassen, indem man U trivial auf $\tilde{X}$ operieren läßt. Der CG-Modul $R_{L,P}^G X$ wird dann folgendermaßen definiert:

$$R_{L,P}^G X := CG \otimes_{CP} \tilde{X}.$$

Falls X ein projektiver CL-Modul ist, so ist $\tilde{X}$ projektiv, und folglich ist $R_{L,P}^G X$ ein projektiver CG-Modul. Die Abbildung $R_{L,P}^G$ heißt *Harish-Chandra-Induktion.* Howlett und Lehrer bzw. Dipper und Du haben unabhängig voneinander gezeigt, daß bei gegebenem kL-Modul X der Isomorphietyp des CG-Moduls $R_{L,P}^G X$ nicht von der Wahl der parabolischen Untergruppe P abhängt (vgl. [19] und [10]). Das rechtfertigt die kürzere Schreibweise $R_L^G X$.

Ist umgekehrt Y ein beliebiger CG-Modul, so betrachtet man die Menge

$$\operatorname{inv}_U Y := \{y \in Y \mid uy = y \text{ für alle } u \in U\}.$$

Wie man leicht sieht, ist $\operatorname{inv}_U Y$ ein Untermodul des CP-Moduls Y_P, auf dem U nach Definition trivial operiert. Folglich kann $\operatorname{inv}_U Y$ als CL-Modul aufgefaßt werden, schreibe auch

$$T_{L,P}^G Y = \operatorname{inv}_U Y.$$

Die Abbildung $T_{L,P}^G$ heißt *Harish-Chandra-Restriktion.* Falls Y ein projektiver CG-Modul ist, ist auch der CL-Modul $T_{L,P}^G Y$ projektiv, da er ein direkter Summand von Y_P ist.

Im folgenden sollen die Abbildungen Harish-Chandra-Induktion und Harish-Chandra-Restriktion in bezug auf Klassenfunktionen beschrieben werden. Bezeichne den Raum aller K-wertigen Klassenfunktionen der Gruppe G mit $\mathrm{CF}(G)$. Der Teilraum der Funktionen, die auf Elementen mit durch l teilbarer Ordnung verschwinden, wird mit $\mathrm{CF}_{l'}(G)$ bezeichnet. Das gewöhnliche innere Produkt auf $\mathrm{CF}(G)$ ist folgendermaßen gegeben: Für $\chi, \psi \in \mathrm{CF}(G)$ sei

$$(\chi, \psi)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1}).$$

Die Brauercharaktere von G werden als Elemente von $\mathrm{CF}_{l'}(G)$ aufgefaßt.

In bezug auf die zu den Moduln gehörenden Klassenfunktionen sind die Abbildungen Harish-Chandra-Induktion und Restriktion wie folgt gegeben. Es seien $\chi \in \mathrm{CF}(G)$ und $\psi \in \mathrm{CF}(L)$, dann gilt

$$R_L^G \psi(g) = \frac{1}{|P|} \sum_{x \in G, xgx^{-1} \in P} \tilde{\psi}(xgx^{-1}) \quad \text{für } g \in G$$

und

$$T_L^G \chi(h) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \chi(uh) \quad \text{für } h \in L.$$

Dabei sei $\tilde{\psi} \in \mathrm{CF}(P)$ mit $\tilde{\psi}(hu) := \psi(h)$ für $h \in L$, $u \in U$. Harish-Chandra-Induktion und Restriktion sind bezüglich des oben beschriebenen inneren Produkts zueinander adjungierte Abbildungen, d.h. für $\chi \in \mathrm{CF}(G)$ und $\psi \in \mathrm{CF}(L)$ gilt

$$(T_L^G \chi, \psi)_L = (\chi, R_L^G \psi)_G.$$

Harish-Chandra-Induktion und Restriktion besitzen eine Transitivitätseigenschaft im folgenden Sinn: Es seien $P, Q \in \mathcal{P}$ parabolische Untergruppen von G mit $P \leq Q$ und L bzw. M die Standard-Levi-Komplemente von P bzw. Q. Nach Lemma 1.1.6 ist dann $M \cap P$ eine parabolische Untergruppe von M, das Standard-Levi-Komplement von $M \cap P$ ist L, und es gilt

$$T_{L,P}^G = T_{L,M\cap P}^M \circ T_{M,Q}^G \quad \text{und} \quad R_{L,P}^G = R_{M,Q}^G \circ R_{L,M\cap P}^M.$$

Nach den entsprechenden Betrachtungen für Moduln ist klar, daß durch Harish-Chandra-Induktion und Restriktion sowohl Brauercharaktere auf Brauercharaktere als auch projektive Charaktere auf projektive Charaktere abgebildet werden.

1.3 Kuspidale Charaktere und Harish-Chandra-Serien

Mit Hilfe von Harish-Chandra-Induktion und Restriktion kann man die irreduziblen Charaktere der Gruppe G in sogenannte Harish-Chandra-Serien einteilen. Das Kriterium für die Einteilung der Charaktere in Serien ist, ob und in welchen Harish-Chandra-induzierten Charakteren kleinerer Levi-Untergruppen ein Charakter vorkommt. Man verwendet also Informationen aus den Levi-Untergruppen, um die Charaktere von G klassifizieren zu können. Dieses Prinzip eröffnet die Möglichkeit, Probleme für eine Vielzahl von Gruppen mit induktiven Mitteln zu lösen.

Die Bezeichnungen seien wie in Abschnitt 1.2 gewählt, es sei also wieder G eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar der Charakteristik p und (K, R, k) ein l-modulares Zerfällungssystem für alle Untergruppen von G mit $l \neq p$. Wann immer im folgenden von einem Charakter die Rede ist, soll damit entweder ein gewöhnlicher Charakter oder ein Brauercharakter gemeint sein. Ist $\chi \in \mathrm{CF}(G)$ ein irreduzibler Charakter, so soll $\Phi_\chi \in \mathrm{CF}(G)$ der Charakter der entsprechenden projektiven Hülle sein. Falls χ ein gewöhnlicher Charakter ist, gilt natürlich $\Phi_\chi = \chi$. Zunächst wird definiert, wann ein irreduzibler Charakter kuspidal genannt werden soll.

Definition 1.3.1 *Ein irreduzibler Charakter χ von G ist kuspidal, falls für alle $L \in \mathcal{L}$ mit $L \neq G$ gilt*

$$T_L^G \chi = 0.$$

Ein einfacher CG-Modul Y soll genau dann kuspidal heißen, wenn der zugehörige Charakter kuspidal ist. Offenbar gilt das genau dann, wenn $T_L^G Y$ für alle $L \in \mathcal{L} \setminus \{G\}$ der Nullmodul ist. Ist nun $\mathcal{S}$ die Menge aller Paare (L, χ), wobei $L \in \mathcal{L}$ eine Levi-Untergruppe und χ ein irreduzibler Charakter von L ist, dann kann man $\mathcal{S}$ zu einer teilgeordneten Menge machen. Man setzt $(L', \chi') \leq (L, \chi)$, falls $L' \subseteq L$ und $(\Phi_{\chi'}, T_{L'}^L \chi) > 0$, falls also χ' ein Kompositionsfaktor von $T_{L'}^L \chi$ ist. Aufgrund der in Abschnitt 1.2 erwähnten Transitivität der Harish-Chandra-Restriktion wird dadurch eine Teilordnung auf $\mathcal{S}$ definiert. Offenbar ist ein Paar (L, χ) genau dann ein minimales Element bezüglich dieser Ordnung, wenn χ ein kuspidaler Charakter von L ist.

Das folgende Theorem ist eines der Hauptergebnisse der Harish-Chandra-Theorie, es ermöglicht die Einteilung der irreduziblen Charaktere in die sogenannten Harish-Chandra-Serien (vgl. [18, Theorem 5.5.]).

Theorem 1.3.2 *Ist χ ein irreduzibler Charakter von G, dann gibt es ein bis auf Konjugation in N eindeutiges minimales Paar $(L, \psi) \leq (G, \chi)$.*

Man definiert nun folgende Einteilung in Serien. Ist $J \subseteq \Pi$ und ψ ein kuspidaler Charakter von L_J, dann soll ein irreduzibler Charakter χ von G in der (J, ψ)-Serie liegen, falls es ein minimales Paar $(L', \psi') \leq (G, \chi)$ gibt, das in N zu (L_J, ψ) konjugiert ist. Man kann zeigen, daß χ dann ein Konstituent des Harish-Chandra-induzierten Charakters $R_{L_J}^G \psi$ ist. Außerdem ist jeder Konstituent des Harish-Chandra-eingeschränkten Charakters $T_{L_J}^G \chi$ kuspidal, und je zwei davon sind durch ein Element aus $N_G(L_J) \cap N$ zueinander konjugiert.

In der gewöhnlichen Theorie, d.h. falls die betrachteten Charaktere gewöhnliche Charaktere sind, besteht die (J, ψ)-Serie genau aus den Konstituenten von $R_{L_J}^G \psi$. Betrachtet man jedoch Brauercharaktere, so kann es Konstituenten von $R_{L_J}^G \psi$ geben, die nicht in der (J, ψ)-Serie liegen. Der folgende Satz zeigt, wie dieses Problem gelöst werden kann (vgl. [18, Theorem 5.8.]).

Satz 1.3.3 *Es sei (L_J, ψ) ein minimales Paar von $\mathcal{S}$ und X ein einfacher kL_J-Modul mit Brauercharakter ψ. Weiter sei Y ein einfacher kG-Modul mit Brauercharakter χ. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) χ liegt in der (J,ψ)-Serie.

(ii) Y ist ein Kompositionsfaktor des Kopfes von $R_{L_J}^G X$.

(iii) Y ist ein Kompositionsfaktor des Sockels von $R_{L_J}^G X$.

Insbesondere ist die (J,ψ)-Serie also nicht leer.

Die Idee kuspidaler Darstellungen und Charaktere geht auf Harish-Chandra zurück, der dieses Konzept in der Darstellungstheorie reduktiver Lie-Gruppen und reduktiver algebraischer Gruppen angewendet hat. Der wichtigste Punkt dieses Konzepts liegt darin, daß kuspidale Charaktere offenbar die gesamte Darstellungstheorie der Gruppe G beherrschen. Denn um bis auf Isomorphie alle einfachen KG-Moduln bzw. kG-Moduln der Gruppe G bestimmen zu können, muß man folgende zwei Probleme lösen:

Problem I Klassifiziere die kuspidalen einfachen Moduln für die Standard-Levi-Untergruppen von G.

Problem II Bestimme für alle $J \subseteq \Pi$ und für jeden kuspidalen KL_J-Modul bzw. kL_J-Modul X die vollständige Zerlegung des Kopfes von $R_{L_J}^G X$.

Für die KG-Moduln kann das Problem II unmittelbar auf das folgende Problem zurückgeführt werden:

Problem II' Bestimme für alle $J \subseteq \Pi$ und für jeden kuspidalen KL_J-Modul Xdie Struktur und die einfachen Moduln der Endomorphismen-Algebra des Moduls $R_{L_J}^G X$.

Das folgt aus Fittings Lemma über den Zusammenhang zwischen den unzerlegbaren direkten Summanden eines gegebenen Moduls und den einfachen Moduln seiner Endomorphismen-Algebra, da in dem Fall der KG-Moduln die betrachteten Moduln halbeinfach sind.

Im Fall der kG-Moduln gibt es jedoch einen grundsätzlichen Unterschied zwischen den Begriffen „unzerlegbarer Modul“ und „einfacher Modul“. Daher ist zunächst nicht klar, ob es auch hier eine Bijektion zwischen den einfachen Moduln einer gegebenen Harish-Chandra-Serie und den einfachen Moduln der zugehörigen Endomorphismen-Algebra gibt.

In [15] haben Geck, Hiß und Malle dieses Problem gelöst. Die Notation sei wie oben, zusätzlich wird verlangt, daß G die Kommutator-Relationen erfüllt (vgl. [15, Theorem 2.4]).

Theorem 1.3.4 *Es sei $L \in \mathcal{L}$ und X ein kuspidaler kL-Modul. Die Endomorphismen-Algebra von $R_L^G X$ werde mit $H(L,X)$ bezeichnet.*

(i) Jeder unzerlegbare direkte Summand von $R_L^G X$ hat einen einfachen Kopf. Zwei direkte Summanden sind genau dann isomorph, wenn ihre Köpfe isomorph sind.

(ii) Es gibt eine Bijektion zwischen den einfachen kG-Moduln der Harish-Chandra-Serie, die zu dem Paar (L,X) gehört, und den einfachen Moduln von $H(L,X)$.

Der zweite Teil des Theorems folgt mit Fittings Lemma direkt aus dem ersten Teil. Damit ist auch für die kG-Moduln das Problem II auf das oben formulierte Problem II' zurückgeführt. Dadurch wird für das Folgende die Betrachtung der Endomorphismen-Algebra $H(L,X)$ von $R_L^G X$ motiviert.

1.4 Die Endomorphismen-Algebra des Moduls $R_L^G X$

Im folgenden wird die Notation aus dem letzten Abschnitt verwendet, insbesondere sei G eine endliche Gruppe mit einem zerfallenden BN-Paar der Charakteristik p, die die Kommutator-Relationen erfüllt. Es sei $J \subseteq \Pi$ und $P = P_J$ die zugehörige Standard-parabolische Untergruppe von G und $P = U \cdot L$ die Standard-Levi-Zerlegung von P, d.h. $U = U_J$ und $L = L_J$. Mit k wird wieder ein Körper der Charakteristik $l \neq p$ bezeichnet, der Zerfällungskörper für alle Untergruppen von G ist. Schließlich sei X ein kuspidaler kL-Modul. In diesem Abschnitt soll die Struktur der k-Algebra

$$H(L, X) := \mathrm{End}_{kG}(R_L^G X)$$

beschrieben werden. Der Abschnitt bezieht sich hauptsächlich auf [15, Abschnitt 3]. Dort können auch Beweise und nähere Erklärungen nachgelesen werden.

Setze $\mathcal{N}(L) := (N_G(L) \cap N)L$ und $W(L) := \mathcal{N}(L)/L$. Dann ist $W(L)$ isomorph zu der Untergruppe $\{w \in W \mid w(J) = J\}$ von W, die *relative Weyl-Gruppe von L in G* genannt wird. Weiter sei $\mathcal{N}(L, X) := \{g \in \mathcal{N}(L) \mid X^g \cong X\}$ und

$$W(L, X) := \mathcal{N}(L, X)/L.$$

Die Gruppe $W(L, X)$ heißt *Verzweigungsgruppe* von $R_L^G X$. Ihre Struktur steht in engem Zusammenhang zu der Struktur der Algebra $H(L, X)$. Im folgenden soll eine k-Basis von $H(L, X)$ eingeführt werden. Die Basiselemente können durch die Elemente aus $W(L, X)$ indiziert werden.

Betrachte zunächst eine Darstellung $\mathcal{X}$, die zu dem kL-Modul X gehört. Da nach Definition X unter $\mathcal{N}(L, X)$ invariant ist, gibt es eine Erweiterung von $\mathcal{X}$ zu einer projektiven Darstellung $\tilde{\mathcal{X}}$ von $\mathcal{N}(L, X)$. Zu $\tilde{\mathcal{X}}$ gehört ein 2-Kozykel $\lambda : W(L, X) \times W(L, X) \to k^*$, der durch

$$\tilde{\mathcal{X}}(\dot{w}_1)\tilde{\mathcal{X}}(\dot{w}_2) = \lambda(w_1, w_2)\tilde{\mathcal{X}}(\dot{w}_1\dot{w}_2), \quad w_1, w_2 \in W(L, X)$$

gegeben ist. Dabei sei für $w \in W(L, X)$ das Element $\dot{w} \in N$ ein fest gewähltes Urbild von w unter dem kanonischen Epimorphismus. Da $\tilde{\mathcal{X}}$ nur bis auf Skalare ungleich null eindeutig bestimmt ist, kann man gewisse Bedingungen an λ stellen.

Lemma 1.4.1 *Die projektive Darstellung $\tilde{\mathcal{X}}$ kann so gewählt werden, daß der 2-Kozykel λ die folgenden Eigenschaften besitzt:*

(i) $\lambda(w, 1) = \lambda(1, w) = 1$ *für alle* $w \in W(L, X)$.

(ii) $\lambda(w, w^{-1}) = 1$ *für alle* $w \in W(L, X)$.

(iii) $\lambda(w_1, w_2) = \frac{1}{\lambda({w_2}^{-1}, {w_1}^{-1})} = \lambda({w_2}^{-1}{w_1}^{-1}, w_1)$ *für alle* $w_1, w_2 \in W(L, X)$.

(iv) $\lambda(w_1, w_2)$ *ist eine Einheitswurzel für alle* $w_1, w_2 \in W(L, X)$.

Der Beweis zu diesem Lemma kann bei Carter [5, Proposition 10.3.4] nachgelesen werden. Für das Folgende sei die projektive Darstellung $\tilde{\mathcal{X}}$ wie in Lemma 1.4.1 gewählt. Das Lemma und die darin beschriebenen Eigenschaften von λ sind für das Verständnis des Folgenden nicht unbedingt notwendig. Sie werden hier dennoch erwähnt, da sie in Abschnitt 1.5 eine wichtige Rolle spielen werden.

Der kG-Modul $R_L^G X$ kann als die Menge $\mathrm{Hom}_{kP}(kG, X)$ realisiert werden. Die Operation von G auf $R_L^G X$ ist dann gegeben durch

$$(gf)(a) = f(ag), \quad f \in \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X),\ g \in G,\ a \in kG.$$

Wähle wiederum zu $w \in W(L, X)$ ein Element $\dot{w} \in N$, das unter dem kanonischen Epimorphismus auf w abgebildet wird. Es sei

$$[J] := \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} u,$$

dann ist $[J]$ ein Element von kG, da U eine p-Gruppe ist und die Charakteristik von k ungleich p ist. Definiere nun die Abbildung

$$B_w : \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X)$$

durch

$$(B_w f)(a) := \tilde{\mathcal{X}}(\dot{w}) f(\dot{w}^{-1}[J]a), \quad f \in \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X),\ a \in kG.$$

Dann ist B_w ein Element von $H(L, X)$, außerdem ist B_w unabhängig von der Wahl des Vertreters $\dot{w}$ aus N. Die Elemente der Form B_w mit $w \in W(L, X)$ bilden eine k-Basis der Endomorphismen-Algebra $H(L, X)$ (siehe dazu auch [11, Theorem 2.9]).

Dieses Ergebnis läßt bereits vermuten, daß sich Informationen über die Struktur von $H(L, X)$ aus einer genaueren Kenntnis der Verzweigungsgruppe $W(L, X)$ gewinnen lassen. Obwohl $W(L, X)$ im allgemeinen selbst keine Spiegelungsgruppe ist, enthält sie eine normale Spiegelungs-Untergruppe $R(L, X)$, die einen großen Teil von ihr ausmacht. Es sei nämlich

$$\hat{\Omega} := \{a \in \Sigma \setminus J \mid w(J \cup \{a\}) \subseteq \Pi \text{ für ein } w \in W\}$$

und

$$v(a, J) := w_{J \cup \{a\}} w_J \quad \text{für } a \in \hat{\Omega}.$$

Die Teilmenge Γ von $\hat{\Omega}$ sei gegeben durch

$$\Gamma := \{a \in \hat{\Omega} \mid v(a, J)^2 = 1 \text{ und } v(a, J) \in W(L, X)\}.$$

Man kann folgende Untergruppen von $W(L, X)$ definieren:

$$R(L, X) := \langle v(a, J) \mid a \in \Gamma \rangle,$$

$$C(L, X) := \{w \in W(L, X) \mid w(\Gamma^+) = \Gamma^+\},$$

wobei $\Gamma^+ := \Gamma \cap \Sigma^+$. Dann ist, wie oben angedeutet, $R(L, X)$ eine normale Spiegelungsuntergruppe, und $W(L, X)$ ist das semidirekte Produkt von $R(L, X)$ mit $C(L, X)$. Im weiteren Verlauf wird noch die folgende Teimenge von Γ^+ eine Rolle spielen:

$$\Delta' := \{a \in \Gamma^+ \mid v(a, J)(b) \in \Gamma^+ \text{ für alle } b \in \Gamma^+ \setminus \{a\}\}.$$

Jetzt können Regeln für die Multiplikation von zwei Elementen der oben angegebenen Basis entwickelt werden. An dieser Stelle werden wieder einige Zwischenschritte ausführlicher angegeben, da in Abschnitt 1.5 darauf Bezug genommen wird. Zunächst sei das folgende Lemma erwähnt (vgl. [15, Proposition 3.7]).

Lemma 1.4.2 *Es sei $a \in \Delta'$ und $v := v(a, J)$. Dann gibt es $\alpha, \beta \in k$, $\alpha \neq 0$, so daß*

$$B_v{}^2 = \alpha B_1 + \beta B_v.$$

Die Parameter α und β können noch normiert werden, das folgende Lemma macht dazu eine Aussage (vgl. [15, Lemma 3.9]).

Lemma 1.4.3 *Es sei $a \in \Delta'$ und $v := v(a, J)$. Dann gibt es ein $\xi \in k^*$ und ein $p_a \in k^*$, so daß das Element $T_v := \xi B_v$ die folgende Gleichung erfüllt:*

$$T_v{}^2 = p_a T_1 + (p_a - 1) T_v.$$

Beweis. Es sei γ eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$Z^2 - \beta Z - \alpha = 0,$$

o.B.d.A. sei $\gamma \in k$, d.h. k muß groß genug gewählt sein. Setze $\xi := -\frac{1}{\gamma}$, dann erfüllt das Element $T_v := \xi B_v$ die geforderte Gleichung mit dem Parameter $p_a = \frac{\alpha}{\gamma^2}$. ∎

Die Ergebnisse über die Struktur der Endomorphismen-Algebra $H(L, X)$ sind in dem folgenden Theorem zusammengefaßt (vgl. [15, Theorem 3.12]).

Theorem 1.4.4 *(1) Es gibt einen 2-Kozykel λ' von $W(L, X)$, der kohomolog zu λ ist, so daß die folgenden Multiplikationsregeln für alle $w \in W(L, X)$ und $x \in C(L, X)$ erfüllt sind:*

(i) $B_w B_x = \lambda'(w, x) B_{wx}$,

(ii) $B_x B_w = \lambda'(x, w) B_{xw}$.

(2) Für alle $a \in \Delta'$ gibt es ein skalares Vielfaches $T_v = T_{v(a,J)}$ von $B_{v(a,J)}$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(iii) $T_v{}^2 = p_a T_1 + (p_a - 1) T_v$ *für ein* $0 \neq p_a \in k$.

(iv) Es seien $a, a' \in \Delta'$, $v = v(a, J)$, $v' = v(a', J)$ und $m(v, v')$ die Ordnung des Elements vv'. Dann gibt es ein Vorzeichen $\varepsilon(v, v')$, so daß

$$T_v T_{v'} T_v \ldots = \varepsilon(v, v') T_{v'} T_v T_{v'} \ldots$$

($m(v, v')$ Faktoren auf jeder Seite). Wenn v und v' in $W(L, X)$ zueinander konjugiert sind, so gilt $p_a = p_{a'}$. Falls $p_a \neq 1$ oder $m(v, v')$ ungerade ist, gilt $\varepsilon(v, v') = 1$.

Für die genaue Kenntnis der Endomorphismen-Algebra $H(L, X)$ ist also die Kenntnis der Parameter p_a von ausschlaggebender Bedeutung. Am Ende dieses Abschnitts soll daher in Anlehnung an [15, (3.14)] erwähnt werden, daß man die Berechnung der Parameter p_a auf eine einfachere Situation zurückführen kann. Zunächst sei bemerkt, daß es genügt, die Parameter p_a für solche $a \in \Delta'$ zu bestimmen, für die $a \in \Pi \setminus J$ gilt. Für solch ein a setzt man $I := J \cup \{a\} \subseteq \Pi$. Um den Parameter p_a zu berechnen, genügt es, die Situation zu betrachten, in der die Gruppe G durch die Standard-Levi-Untergruppe L_I ersetzt ist und die Gruppe $W(L, X) = \langle v(a, J) \rangle$ nur zwei Elemente besitzt.

In dieser vereinfachten Situation kann man auch eine allgemeine Aussage über den Harish-Chandra-induzierten Modul $R_L^G X$ machen (vgl. [15, Lemma 3.15 und 3.16]).

Lemma 1.4.5 *Entweder ist $R_L^G X$ unzerlegbar oder die direkte Summe von zwei einfachen kG-Moduln, die nicht zueinander isomorph sind. $R_L^G X$ ist genau dann unzerlegbar, wenn $p_a = -1$. In diesem Fall teilt l die Dimension von $R_L^G X$.*

1.5 Die Parameter der Endomorphismen-Algebra

Verwende wieder die Bezeichnungen aus dem letzten Abschnitt, der Körper k sei der algebraische Abschluß von $\mathrm{GF}(l)$. Es sei $k_0 \subseteq k$ ein endlicher Teilkörper, über dem die zu dem Modul X gehörende Darstellung $\mathcal{X}$ realisierbar ist. Mit X_0 wird im folgenden der entsprechende k_0L-Modul bezeichnet werden. Weiter seien alle einfachen Moduln, die im Kopf von $R_L^G(X)$ liegen, bereits über k_0 realisierbar.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß unter diesen Voraussetzungen die in Theorem 1.5.6 betrachteten Parameter p_a schon in dem Körper k_0 liegen. Das ist eine Verschärfung des Resultats in [15, (3.20)]. Dort wurde gezeigt, daß die Parameter p_a unter den beschriebenen Voraussetzungen in einer Körpererweiterung von k_0 vom Grad vier liegen.
Für den Beweis der Behauptung wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma 1.5.1 *Es sei Y_0 ein k_0L-Modul und $Y := (Y_0)_k$, dann gilt*

$$\mathrm{Hom}_{kL}(X, Y) \cong k \otimes_{k_0} \mathrm{Hom}_{k_0L}(X_0, Y_0).$$

Insbesondere ist $\dim_k \mathrm{Hom}_{kL}(X, Y) = \dim_{k_0} \mathrm{Hom}_{k_0L}(X_0, Y_0)$.

Der Beweis kann in dem Buch von Curtis und Reiner [6, 29.5] nachgelesen werden.

Die Basiselemente $B_w : \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X) \to \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X)$ aus der Endomorphismen-Algebra $H(L, X)$ des Moduls $R_L^G X = \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X)$ sind wie im letzten Abschnitt folgendermaßen gegeben:

$$(B_w f)(a) = \tilde{\mathcal{X}}(\dot{w}) f(\dot{w}^{-1}[J]a), \quad f \in \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X),\ a \in kG.$$

Dabei ist $\tilde{\mathcal{X}}$ eine Fortsetzung der Darstellung $\mathcal{X}$ zu einer projektiven Darstellung von $\mathcal{N}(L, X)$. Im folgenden soll kurz erläutert werden, wie die projektive Darstellung $\tilde{\mathcal{X}}$ aus $\mathcal{X}$ entsteht.

Ist $w \in W(L, X)$ und $\dot{w} \in \mathcal{N}(L, X)$ ein Urbild von w unter dem kanonischen Epimorphismus, so ist nach Definition von $\mathcal{N}(L, X)$ der Modul $X^{\dot{w}}$ isomorph zu dem Modul X. Folglich sind $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}^{\dot{w}}$ äquivalente Darstellungen von L. Daher gibt es eine nicht-singuläre lineare Abbildung $\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w}) : X \to X$ mit

$$\mathcal{X}^{\dot{w}}(h) = \tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w}) \mathcal{X}(h) \tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w})^{-1}$$

für alle $h \in L$. Nach dem Lemma von Schur ist $\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w})$ bis auf einen Skalar ungleich null eindeutig bestimmt. Die projektive Darstellung $\tilde{\mathcal{X}}_0$ von $\mathcal{N}(L, X)$ ist dann gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{X}}_0(h\dot{w}) = \mathcal{X}(h) \tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w}) \quad h \in L,\ w \in W(L, X).$$

Es sei $\lambda_0 : W(L,X) \times W(L,X) \to k^*$ der zu $\tilde{\mathcal{X}}_0$ gehörende 2-Kozykel, d.h.

$$\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w}_1)\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w}_2) = \lambda(w_1, w_2)\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w}_1\dot{w}_2)$$

für $w_1, w_2 \in W(L,X)$. Die projektive Darstellung $\tilde{\mathcal{X}}$ von $\mathcal{N}(L,X)$ geht nun aus $\tilde{\mathcal{X}}_0$ hervor, indem man die Abbildungen $\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w})$ durch skalare Vielfache $\tilde{\mathcal{X}}(\dot{w})$ ersetzt, so daß der zu der neuen projektiven Darstellung $\tilde{\mathcal{X}}$ gehörende 2-Kozykel λ die in Lemma 1.4.1 geforderten Bedingungen erfüllt. Zu $w \in W(L,X)$ gibt es also ein $0 \neq \eta \in k$ mit $\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w}) = \eta\tilde{\mathcal{X}}(\dot{w})$.

Lemma 1.5.2 *Die projektive Fortsetzung $\tilde{\mathcal{X}}_0$ von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{N}(L,X)$ kann über dem Körper k_0 realisiert werden.*

Beweis. Es muß gezeigt werden, daß die Matrizen $\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w})$ für alle $w \in W(L,X)$ so gewählt werden können, daß ihre Einträge in k_0 liegen. Es sei $w \in W(L,X)$ fest gewählt. Betrachte nochmals die oben beschriebene Konstruktion der Matrix $\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w})$. Es gilt $X^{\dot{w}} \cong X$, also $\mathrm{Hom}_{kL}(X^{\dot{w}}, X) \neq 0$. Wegen Lemma 1.5.1 gilt $\mathrm{Hom}_{k_0L}({X_0}^{\dot{w}}, X_0) \neq 0$, und mit dem Lemma von Schur folgt daraus ${X_0}^{\dot{w}} \cong X_0$. Die Darstellungen $\mathcal{X}^{\dot{w}}$ und $\mathcal{X}$ sind also auch als Darstellungen des k_0L-Moduls X_0 äquivalent, man kann folglich die Matrix $\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{w})$ wie behauptet wählen. ∎

Mit Hilfe von Lemma 1.5.2 kann man jetzt eine Basis von $H(L,X)$ über dem Körper k_0 finden. Da letztlich eine Aussage über die Parameter p_a gefunden werden soll, kann man o.B.d.A. annehmen, daß man sich in der am Ende von Abschnitt 1.4 beschriebenen minimalen Situation befindet, d.h. die Endomorphismen-Algebra $H(L,X)$ ist zweidimensional.

Lemma 1.5.3 *Es sei $a \in \Delta'$ und $v := v(a,J)$, dann gibt es ein $0 \neq \eta \in k$, so daß*

$$\eta B_v \in \mathrm{End}_{k_0G}(\mathrm{Hom}_{k_0P}(k_0G, X_0)) = \mathrm{End}_{k_0G}(R_L^G X_0).$$

Durch $\{1, \eta B_v\}$ ist dann eine Basis von $H_0 := H(L, X_0) = \mathrm{End}_{k_0G}(R_L^G X_0)$ gegeben.

Beweis. Nach Definition von B_v gilt

$$(B_v f)(a) = \tilde{\mathcal{X}}(\dot{v}) f(\dot{v}^{-1}[J]a), \quad f \in \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X),\ a \in kG.$$

Wie oben geschildert wurde, gibt es ein $0 \neq \eta \in k$ mit $\tilde{\mathcal{X}}(\dot{v}) = 1/\eta\tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{v})$. Dann gilt

$$((\eta B_v) f)(a) = \tilde{\mathcal{X}}_0(\dot{v}) f(\dot{v}^{-1}[J]a), \quad f \in \mathrm{Hom}_{kP}(kG, X),\ a \in kG.$$

Falls also $f \in \mathrm{Hom}_{k_0P}(k_0G, X_0)$ und $a \in k_0G$, dann gilt $((\eta B_v)f)(a) \in X_0$. Folglich kann ηB_v als Element von $\mathrm{End}_{k_0G}(R_L^G X_0)$ aufgefaßt werden.

Da wir uns nach Voraussetzung in der erwähnten minimalen Situation befinden, ist $\{1, B_v\}$ eine Basis von $H(L,X) = \mathrm{End}_{kG}(R_L^G X)$. Folglich ist die Menge $\{1, \eta B_v\} \subseteq H_0$ linear unabhängig und wegen Lemma 1.5.1 sogar eine Basis von H_0. ∎

Folgerung 1.5.4 *Es sei η wie in Lemma 1.5.3 gewählt, dann gibt es $\alpha_0, \beta_0 \in k_0$, $\alpha_0 \neq 0$ mit*

$$(\eta B_v)^2 = \alpha_0 B_1 + \beta_0(\eta B_v).$$

Beweis. Da nach Lemma 1.5.3 die Menge $\{1, \eta B_v\}$ eine Basis von H_0 ist, läßt sich $(\eta B_v)^2$ als k_0-Linearkombination in den Basiselementen schreiben. Nach Lemma 1.4.2 gilt außerdem $B_v^2 = \alpha B_1 + \beta B_v$ mit $\alpha, \beta \in k$, $\alpha \neq 0$, also gilt $\alpha_0 = \eta^2 \alpha \neq 0$. ∎

Aus den bisherigen Ergebnissen folgt, daß die Parameter p_a in einem Erweiterungskörper von k_0 vom Grad zwei liegen. Das folgende Lemma verbessert dieses Ergebnis noch weiter.

Lemma 1.5.5 *Es sei $a \in \Delta'$, $v := v(a, J)$, η wie in Lemma 1.5.3 und α_0, β_0 wie in Folgerung 1.5.4. Ist Z eine Unbestimmte über dem Körper k, dann zerfällt das Polynom $P(Z) = Z^2 - \beta_0 Z - \alpha_0$ über k_0.*

Beweis. Nehme an, daß P über k_0 irreduzibel ist. Da k_0 endlich ist, ist k_0 vollkommen. Deshalb gilt

$$P(Z) = (Z - \mu)(Z - \zeta) \quad \text{mit } \mu, \zeta \in k \text{ und } \mu \neq \zeta.$$

Da $\{1, \eta B_v\}$ auch eine Basis von $H := H(L, X)$ ist, gilt dann

$$H \cong k[Z]/(Z - \mu)(Z - \zeta) \cong k[Z]/(Z - \mu) \oplus k[Z]/(Z - \zeta) \cong k \oplus k.$$

Also ist H halbeinfach, d.h. $J(H) = \{0\}$. Nach Lemma 1.4.5 ist $R_L^G X$ entweder unzerlegbar oder die direkte Summe von zwei nicht-isomorphen einfachen kG-Moduln.

Wäre $R_L^G X$ unzerlegbar, so folgte, daß H lokal ist. Da H kommutativ ist, müßte $H/J(H)$ ein Körper sein, und wegen $J(H) = \{0\}$ wäre H ein Körper. Dann müßte aber das von $(Z - \mu)(Z - \zeta)$ erzeugte Ideal maximal in $k[Z]$ sein, was zum Widerspruch führt.

Also gilt $R_L^G X = X_1 \oplus X_2$ mit $X_1 \ncong X_2$. Nach Voraussetzung sind X_1 und X_2 schon über k_0 realisierbar, d.h. $R_L^G X_0 = X_1 \oplus X_2$. Da $\dim_{k_0} H = 2$, folgt

$$k_0 \oplus k_0 \cong H \cong k_0[Z]/(Z^2 - \beta_0 Z - \alpha_0).$$

Daraus folgt aber, daß P im Widerspruch zur Annahme über k_0 reduzibel ist. ∎

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist jetzt eine einfache Folgerung aus den bisher erzielten Ergebnissen.

Theorem 1.5.6 *Unter den zu Beginn dieses Abschnitts beschriebenen Voraussetzungen gilt: Die in Theorem 1.5.6 betrachteten Parameter p_a mit $a \in \Delta'$ liegen in dem endlichen Körper k_0.*

Beweis. Verwende im folgenden die Bezeichnungen aus den vorangegangenen Lemmata. Es sei $\gamma \in k_0$ Nullstelle des Polynoms P, dann gilt für $T_v := -\frac{\eta}{\gamma} B_v$ und $T_1 := 1$

$$T_v^2 = \frac{\alpha_0}{\gamma^2} T_1 - \frac{\beta_0}{\gamma} T_v = \frac{\alpha_0}{\gamma^2} T_1 + (\frac{\alpha_0}{\gamma^2} - 1) T_v.$$

Also gilt $p_a = \frac{\alpha_0}{\gamma^2} \in k_0$. ∎

Kapitel 2

Endliche Gruppen vom Lie-Typ

In diesem und den weiteren Kapiteln wird die folgende Schreibweise für Konjugiertenklassen verwendet werden: Ist G eine Gruppe, $C \subseteq G$ eine Konjugiertenklasse und $g \in C$, dann schreibe $C = (g)_G$.

2.1 Affine algebraische Gruppen

In diesem Abschnitt sollen die wesentlichen Merkmale und Eigenschaften affiner algebraischer Gruppen eingeführt werden. Beweise und nähere Erläuterungen zu dem Thema können zum Beispiel in den Büchern von Carter [5] und von Springer [24] nachgelesen werden.

Im folgenden sei immer k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Um zu definieren, was eine affine algebraische Gruppe ist, benötigt man zunächst den Begriff der affinen algebraischen Menge. Für $n \in \mathbb{N}$ kann man auf der Menge k^n eine Topologie einführen, deren abgeschlossene Mengen folgendermaßen gegeben sein sollen: $V \subseteq k^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn V die Nullstellenmenge einer beliebigen Teilmenge des Polynomrings $k[X_1, \ldots, X_n]$ in n Unbestimmten ist. Die so definierte Topologie auf k^n heißt *Zariski-Topologie*.

Eine *affine algebraische Menge* V soll eine Teilmenge von k^n für ein $n \in \mathbb{N}$ sein, die bezüglich der Zariski-Topologie abgeschlossen ist. Man kann V selbst wieder als topologischen Raum mit der induzierten Topologie auffassen. Ist k_0 ein perfekter Teilkörper von k, so heißt V *über* k_0 *definiert*, falls V die Nullstellenmenge einer Teilmenge des Polynomrings $k_0[X_1, \ldots, X_n] \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ist.

Ein topologischer Raum heißt *irreduzibel*, wenn er nicht als Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen geschrieben werden kann. Jede affine algebraische Menge V ist die Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen, und diese Zerlegung ist auch eindeutig, falls man voraussetzt, daß keine der Teilmengen in einer anderen enthalten ist. Die Teilmengen dieser Zerlegung heißen *irreduzible Komponenten* von V.

Es seien $V \subseteq k^n$ und $W \subseteq k^m$ zwei affine algebraische Mengen. Eine Abbildung ψ von V nach W heißt *Morphismus*, falls ψ die Einschränkung einer polynomialen Abbildung von k^n nach k^m auf V ist. Der Morphismus ψ heißt *über* k_0 *definiert* (k_0 wie oben), wenn die Koeffizienten dieser Polynome Elemente des Körpers k_0 sind.

Sind $V_1 \subseteq k^n$ und $V_2 \subseteq k^m$ affine algebraische Mengen, dann gibt es nach Definition $S_1 \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ und $S_2 \subseteq k[Y_1, \ldots, Y_m]$, so daß V_i für $i = 1, 2$ die gemeinsame Nullstellenmenge der Polynome aus S_i ist. Man kann das direkte Produkt $V_1 \times V_2 \subseteq k^{n+m}$ wieder als affine algebraische Menge auffassen, indem man S_1 und S_2 als Teilmengen des Polynomrings $k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$ auffaßt. Dann ist nämlich $V_1 \times V_2$ die gemeinsame Nullstellenmenge der Polynome aus $S_1 \cup S_2$.

Mit Hilfe der eingeführten Begriffe kann man jetzt definieren, was eine affine algebraische Gruppe ist.

Definition 2.1.1 *Eine affine algebraische Gruppe ist eine Menge G, die sowohl eine affine algebraische Menge als auch eine Gruppe ist, so daß die Abbildungen*

$$\mu : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array} \qquad \text{und} \quad i : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

Morphismen von affinen algebraischen Mengen sind. Die affine algebraische Gruppe G ist über dem Teilkörper k_0 von k definiert, wenn G als affine algebraische Menge über k_0 definiert ist und die Morphismen μ und i über k_0 definiert sind.

Ein Beispiel für eine affine algebraische Gruppe ist die spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}_n(k) = \{(a_{ij}) \in k^{n^2} \mid \det(a_{ij}) = 1\}$$

mit dem üblichen Matrizenprodukt als Multiplikation. Die volle lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(k)$, die definiert ist durch

$$\mathrm{GL}_n(k) = \{(a_{ij}) \in k^{n^2} \mid \det(a_{ij}) \neq 0\}$$

ist auch eine affine algebraische Gruppe, da man sie in folgender Weise als affine algebraische Menge in k^{n^2+1} betrachten kann:

$$\mathrm{GL}_n(k) = \{(a_{ij}, b) \in k^{n^2+1} \mid b \cdot \det(a_{ij}) = 1\}.$$

Folglich ist auch jede in der Zariski-Topologie abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$ selbst eine affine algebraische Gruppe. Es kann sogar gezeigt werden, daß es zu jeder affinen algebraischen Gruppe G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$ für ein n gibt, zu der G als Gruppe und auch als affine Varietät isomorph ist.

Es sei jetzt G eine affine algebraische Gruppe. Als affine algebraische Menge ist G die endliche Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten. Als topologischer Raum ist G die disjunkte Vereinigung der Zusammenhangskomponenten. In affinen algebraischen Gruppen entsprechen die irreduziblen Komponenten den Zusammenhangskomponenten, so daß G die disjunkte Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen ist. Die Komponente, die das Einselement enthält, ist ein abgeschlossener Normalteiler mit endlichem Index in G, der üblicherweise mit G^0 bezeichnet wird. Die anderen Komponenten sind die Nebenklassen $G^0 g$ mit $g \in G$. Jede abgeschlossene Untergruppe mit endlichem Index in G enthält G^0.

Ein Element $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ heißt *halbeinfach*, falls g diagonalisierbar ist, d.h. falls g zu einer Diagonalmatrix konjugiert ist. Ein Element $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ heißt *unipotent*, falls g nur den Eigenwert 1 besitzt. Ist nun G eine beliebige affine algebraische Gruppe, so ist G zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$ isomorph. Ein Element $g \in G$ wird dann *halbeinfach* genannt, wenn das entsprechende Element von $\mathrm{GL}_n(k)$ halbeinfach ist. Genauso soll $g \in G$ *unipotent* sein, falls das entsprechende Element von $\mathrm{GL}_n(k)$ unipotent ist. Diese Eigenschaften sind unabhängig von der Einbettung von G als abgeschlossene Untergruppe in eine volle lineare Gruppe.

Ist k der algebraische Abschluß des endlichen Körpers $\mathrm{GF}(p)$, so ist jedes Element aus k^* algebraisch über $\mathrm{GF}(p)$ und liegt damit in einem endlichen Erweiterungskörper von $\mathrm{GF}(p)$. Folglich liegen die Matrixeinträge jedes Elements aus $\mathrm{GL}_n(k)$ in einem endlichen Körper, insbesondere ist also jedes Element aus $\mathrm{GL}_n(k)$ von endlicher Ordnung. Ein Element $g \in G$ ist in dieser Situation genau dann halbeinfach, wenn seine Ordnung nicht von p geteilt wird, und es ist genau dann unipotent, wenn es p-Potenz-Ordnung hat.

Eine affine algebraische Gruppe, die isomorph zu einem direkten Produkt der Form

$$k^* \times \ldots \times k^*$$

ist, wird *Torus* genannt. Es sei G eine beliebige zusammenhängende affine algebraische Gruppe. Eine *Borel-Untergruppe* B von G ist eine maximale zusammenhängende auflösbare abgeschlossene Untergruppe von G. Je zwei Borel-Untergruppen von G sind in G zueinander konjugiert. Jeder maximale Torus von G liegt in einer Borel-Untergruppe von G, je zwei maximale Tori sind in G zueinander konjugiert.

In einer affinen algebraischen Gruppe G gibt es einen eindeutigen maximalen abgeschlossenen zusammenhängenden auflösbaren Normalteiler. Dieser wird das *Radikal* $R(G)$ genannt und G ist *halbeinfach*, falls $R(G) = \{1\}$ gilt. Außerdem besitzt G einen eindeutigen maximalen abgeschlossenen zusammenhängenden Normalteiler, dessen Elemente alle unipotent sind. Er wird *unipotentes Radikal* $R_u(G)$ genannt und G ist *reduktiv*, falls $R_u(G) = \{1\}$ gilt. Jede halbeinfache Gruppe ist reduktiv, die Umkehrung ist jedoch im allgemeinen falsch.

2.2 Die endlichen Gruppen vom Lie-Typ

Die endlichen Gruppen vom Lie-Typ sind Untergruppen von zusammenhängenden reduktiven affinen algebraischen Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper mit Charakteristik ungleich null. Diese Untergruppen erhält man als Fixpunktmengen von bestimmten Gruppenhomomorphismen der affinen algebraischen Gruppe in sich selbst. Ein *Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen* ist ein Gruppenhomomorphismus, der gleichzeitig ein Morphismus von affinen algebraischen Mengen ist. Im folgenden sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p. Dann gibt es zu jeder Potenz q von p eine Abbildung

$$F_q : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(k) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(k) \\ (a_{ij}) & \longmapsto & ({a_{ij}}^q) \end{array},$$

die jeden Matrixeintrag in die q-te Potenz hebt. Offenbar ist F_q ein Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen. Die Abbildung F_q ist zwar bijektiv, die Umkehrabbildung ist jedoch kein Homomorphismus von affinen algebraischen Gruppen, da sie kein Morphismus von affinen algebraischen Mengen ist. Die endliche volle lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(q)$ kann man jetzt als abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$ erhalten, indem man die Fixpunktmenge von F_q betrachtet, d.h.

$$\mathrm{GL}_n(q) = \{g \in \mathrm{GL}_n(k) \mid F_q(g) = g\}.$$

Im allgemeinen Fall kann man die Situation folgendermaßen beschreiben. Es sei G eine affine algebraische Gruppe. Eine Abbildung $F : G \to G$ heißt *Standard-Frobenius-Morphismus*, falls es einen injektiven Homomorphismus $i : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ und eine Potenz q der Primzahl p gibt, so daß $i(F(g)) = F_q(i(g))$ für alle $g \in G$ gilt. Allgemeiner nennt man einen Homomorphismus $F : G \to G$ einen *Frobenius-Morphismus*, falls es ein $m \geq 1$ gibt, so daß F^m ein Standard-Frobenius-Morphismus ist. Ist F ein Frobenius-Morphismus, dann ist die Gruppe

$$G^F = \{g \in G \mid F(g) = g\}$$

der Fixpunkte von G unter F endlich. Die endlichen Gruppen G^F, die man so erhält, werden *endliche Gruppen vom Lie-Typ* genannt.

Für einen Frobenius-Morphismus F nennt man eine Teilmenge H von G nun *F-stabil*, falls $F(H) \subseteq H$ gilt. Man spricht beispielsweise von F-stabilen Untergruppen oder F-stabilen Konjugiertenklassen von G. Ist H eine F-stabile abgeschlossene Untergruppe von G, so ist die Einschränkung von F auf H ein Frobenius-Morphismus. Ist H zusätzlich ein Normalteiler von G, so induziert F einen Homomorphismus von G/H in sich selbst.

Der im folgenden vorgestellte Satz von Lang ist von grundlegender Bedeutung für die Theorie der endlichen Gruppen vom Lie-Typ.

Satz 2.2.1 (Lang, Steinberg) *Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \neq 0$ und G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe. Ist $F : G \to G$ ein Frobenius-Morphismus, dann ist die Abbildung $L : G \to G$, die durch $L(g) = g^{-1}F(g)$ gegeben ist, surjektiv.*

In Abschnitt 1.1 wurden endliche Gruppen mit einem zerfallenden BN-Paar definiert. Analog dazu soll jetzt definiert werden, was eine affine algebraische Gruppe mit einem zerfallenden BN-Paar ist.

Definition 2.2.2 *Eine affine algebraische Gruppe mit einem zerfallenden BN-Paar ist eine affine algebraische Gruppe G, die den folgenden Bedingungen genügt:*

(i) G enthält abgeschlossene Untergruppen B und N, die ein BN-Paar gemäß Definition 1.1.1 bilden, so daß $T = \bigcap_{n \in N} nBn^{-1}$, wobei $T = B \cap N$.

(ii) Es gibt einen abgeschlossenen Normalteiler U von B, so daß B das semidirekte Produkt von U mit der abgeschlossenen Untergruppe T ist.

(iii) U ist eine unipotente Gruppe, und T ist eine abelsche Gruppe, deren Elemente alle halbeinfach sind.

Ist G eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik $p \neq 0$, so besitzt G ein zerfallendes BN-Paar. Es sei nämlich B eine Borel-Untergruppe und T ein maximaler Torus von G, der in B liegt. Außerdem sei $N = N_G(T)$, dann bilden B und N ein zerfallendes BN-Paar in G mit $B \cap N = T$. Jede Levi-Untergruppe von G ist wieder eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe mit zerfallendem BN-Paar (vgl. [5, 2.6]).

Im folgenden sei F ein Frobenius-Morphismus von G. Betrachtet man nun die endliche Gruppe vom Lie-Typ G^F, so erkennt man, daß auch diese Gruppe ein zerfallendes BN-Paar besitzt. Es sei nämlich B eine F-stabile Borel-Untergruppe von G und T ein F-stabiler maximaler Torus, der in B enthalten ist. Dann ist auch die Untergruppe $N = N_G(T)$ eine F-stabile Untergruppe von G, und es gilt $B^F \cap N^F = T^F$. Die beiden Untergruppen B^F und N^F von G^F bilden ein zerfallendes BN-Paar. Da F auf N und auf T operiert, kann man auch eine Operation auf $W = N/T$ definieren, nämlich $F(nT) = F(n)T$. Ist W^F die Untergruppe der F-stabilen Elemente von W, dann gilt $N^F/T^F \cong W^F$, also ist W^F die Weyl-Gruppe von G^F.

2.3 Unipotente Konjugiertenklassen

Das folgende Resultat von Springer und Steinberg stellt den Zusammenhang zwischen unipotenten Konjugiertenklassen einer affinen algebraischen Gruppe G und unipotenten Klassen der endlichen Gruppe G^F her (vgl. [2, E I, 3.4]).

Satz 2.3.1 *Es sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und $F : G \to G$ ein Frobenius-Morphismus. Ist C eine F-stabile Konjugiertenklasse von G, so ist C^F die Vereinigung von Konjugiertenklassen von G^F. Ist $u \in C^F$, so stehen diese Klassen von G^F in Bijektion zu den F-Konjugiertenklassen von*

$$A_G(u) = C_G(u)/C_G(u)^0.$$

Dabei nennt man zwei Elemente x und y einer Gruppe A, auf der F operiert, F-konjugiert, *wenn es ein $a \in A$ gibt, so daß $x = ayF(a)^{-1}$. Beachte, daß die Untergruppen $C_G(u)$ und $C_G(u)^0$ beide F-stabil sind, folglich operiert F auf dem Quotienten $A_G(u)$.*

Die erwähnte Bijektion erhält man folgendermaßen: Ist $g \in G$ und $gug^{-1} \in C^F$, dann ist $g^{-1}F(g) \in C_G(u)$, und man ordnet der Klasse $(gug^{-1})_{G^F}$ die F-Konjugiertenklasse von

$$\overline{g^{-1}F(g)} \in C_G(u)/C_G(u)^0 = A_G(u)$$

zu. Dieses Ergebnis soll im folgenden auf eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe mit BN-Paar angewendet werden. Ist L ein F-stabiles Levi-Komplement einer F-stabilen parabolischen Untergruppe von G und $g \in L^F$, dann hat die Einschränkung des kanonischen Epimorphismus

$$\pi : C_G(g) \longrightarrow A_G(g)$$

auf $C_L(g)$ offenbar den Kern $C_G(g)^0 \cap L$. Nach [23, (1.4)] gilt $C_G(g)^0 \cap L = C_L(g)^0$, und folglich gibt es einen kanonischen Monomorphismus

$$\pi' : \begin{array}{ccc} A_L(g) & \longrightarrow & A_G(g) \\ h \cdot C_L(g)^0 & \longmapsto & h \cdot C_G(g)^0 \end{array}, \qquad h \in C_L(G).$$

In [16, Abschnitt 3.] wurde definiert, wann eine F-stabile unipotente Konjugiertenklasse C von G kuspidal genannt werden soll.

Definition 2.3.2 *Eine F-stabile unipotente Konjugiertenklasse C von G ist nicht kuspidal, wenn es ein F-stabiles Levi-Komplement einer echten F-stabilen parabolischen Untergruppe von G gibt, so daß C nicht-leeren Schnitt mit L^F hat und außerdem die Abbildung $\pi' : A_L(u) \to A_G(u)$ für mindestens ein $u \in C \cap L^F$ ein Isomorphismus ist. Andernfalls ist C kuspidal.*

Wie in [16, Abschnitt 4.] vorgeschlagen wird, soll im folgenden definiert werden, wann eine unipotente Konjugiertenklasse von G^F kuspidal genannt wird.

Definition 2.3.3 *Eine unipotente Konjugiertenklasse C' von G^F heißt kuspidal, falls sie mit allen F-stabilen Levi-Komplementen von echten F-stabilen parabolischen Untergruppen von G trivialen Schnitt hat.*

Im folgenden Lemma wird eine äquivalente Formulierung des Begriffs „kuspidal“ für unipotente Klassen von G^F gegeben.

Lemma 2.3.4 *Es sei C eine F-stabile unipotente Konjugiertenklasse von G und $C' \subseteq C^F$ eine Konjugiertenklasse von G^F, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) C' ist kuspidal.

(ii) Ist L ein F-stabiles Levi-Komplement einer echten F-stabilen parabolischen Untergruppe von G und ist $u \in C \cap L^F$, dann liegt kein Element der zu C' gehörenden F-Konjugiertenklasse der Gruppe $A_G(u)$ im Bild von $\pi' : A_L(u) \to A_G(u)$.

Beweis. „(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Es sei L ein F-stabiles Levi-Komplement einer echten F-stabilen parabolischen Untergruppe von G und $u \in C \cap L^F$. Weiter liege ein Element a der zu C' gehörenden F-Konjugiertenklasse von $A_G(u)$ im Bild von $\pi' : A_L(u) \to A_G(u)$. Dann gibt es also ein $h \in C_L(u) \subseteq L$ mit $a = h \cdot C_G(u)^0$. Da L eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe ist, gibt es nach Satz 2.2.1 ein $g \in L$, so daß $g^{-1}F(g) = h$. Dann liegt aber das Element gug^{-1} in $C' \cap L$, und nach Definition ist C' nicht kuspidal.

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Es sei nun C' nicht kuspidal. Dann gibt es ein F-stabiles Levi-Komplement L einer echten F-stabilen parabolischen Untergruppe von G und ein $u \in C' \cap L \subseteq C \cap L^F$. Da die Klasse $C' = (u)_{G^F}$ zur F-Konjugiertenklasse der Eins von $A_G(u)$ gehört und die Eins natürlich im Bild von π' liegt, gilt die zweite Aussage nicht. ■

Folgerung 2.3.5 *Es sei C eine F-stabile unipotente Konjugiertenklasse der Gruppe G und $C' \subseteq C^F$ eine Konjugiertenklasse von G^F. Ist C' kuspidal in G^F, dann ist auch C kuspidal in G.*

Beweis. Falls C nicht kuspidal ist, dann gibt es nach Definition ein F-stabiles Levi-Komplement L einer echten F-stabilen parabolischen Untergruppe von G und ein $u \in C \cap L^F$, so daß $\pi' : A_L(u) \to A_G(u)$ ein Isomorphismus ist. Insbesondere liegt also die zu C' gehörende F-Konjugiertenklasse von $A_G(u)$ im Bild von π', und mit Lemma 2.3.4 folgt, daß C' nicht kuspidal ist. ∎

In Abschnitt 3.5 wird gezeigt werden, daß man in speziellen Fällen jeder unipotenten Klasse von G^F eine kuspidale unipotente Klasse einer Untergruppe L^F von G^F zuordnen kann, wobei L ein F-stabiles Levi-Komplement einer F-stabilen parabolischen Untergruppe von G ist. Im allgemeinen funktioniert das nicht, man erhält aber das folgende Resultat.

Lemma 2.3.6 *Ist C' eine unipotente Konjugiertenklasse von G^F und L ein F-stabiles Levi-Komplement einer F-stabilen parabolischen Untergruppe von G mit $C' \cap L \neq \emptyset$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) L ist mit diesen Eigenschaften minimal, d.h. es gibt kein F-stabiles Levi-Komplement L_1 einer echten F-stabilen parabolischen Untergruppe von L mit $C' \cap L_1 \neq \emptyset$.

(ii) Für beliebige $c \in C' \cap L^F$ ist $(c)_{L^F}$ eine kuspidale Konjugiertenklasse von L^F.

Beweis. „(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Es sei $c \in C' \cap L^F$ und $(c)_{L^F}$ nicht kuspidal, dann gibt es ein F-stabiles Levi-Komplement L_1 einer echten F-stabilen parabolischen Untergruppe von L mit $(c)_{L^F} \cap L_1 \neq \emptyset$. Aus $(c)_{L^F} \subseteq C'$ folgt $C' \cap L_1 \neq \emptyset$, also ist L nicht minimal.

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Ist L nicht minimal, dann gibt es ein F-stabiles Levi-Komplement $L_1 \subseteq L$ einer F-stabilen parabolischen Untergruppe von L, so daß $C' \cap L_1 \neq \emptyset$ gilt. Es sei nun $c \in C' \cap L_1 \subseteq C' \cap L$, dann ist $(c)_{L^F}$ offenbar nicht kuspidal. ∎

2.4 Unipotente Charaktere

Um zu definieren, was ein unipotenter Charakter einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ ist, müssen zunächst die verallgemeinerten Charaktere $R^G_{T,\theta}$ von Deligne-Lusztig eingeführt werden.

Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \neq 0$ und $l \neq p$ eine weitere Primzahl. Außerdem seien G eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe, F ein Frobenius-Morphismus und T ein F-stabiler maximaler Torus von G. Zu einem gewöhnlichen irreduziblen Charakter θ von T^F haben Deligne und Lusztig einen verallgemeinerten Charakter $R^G_{T,\theta}$ von G^F definiert. Auf die genaueren Hintergründe soll hier nicht eingegangen werden, sie können beispielsweise in dem Buch von Carter [5] in Kapitel 7.2 nachgelesen werden. Für die weiteren Anwendungen wird jedoch noch das folgende Lemma benötigt.

Lemma 2.4.1 *Ist T ein F-stabiler maximaler Torus von G und 1 der Eins-Charakter von T^F, dann nimmt der verallgemeinerte Charakter $R^G_{T,1}$ nur Werte aus den rationalen Zahlen an.*

Beweis. Nach [5, Theorem 7.2.8.] gilt für $g \in G^F$

$$R_{T,1}^G(g) = \frac{1}{|C^0(s)^F|} \sum_{\substack{x \in G^F \\ x^{-1}sx \in T^F}} \mathcal{Q}_{xTx^{-1}}^{C^0(s)}(u),$$

wobei $g = su = us$ mit s halbeinfach und u unipotent. Nach [5, 7.6] sind aber die $\mathcal{Q}_{xTx^{-1}}^{C^0(s)}(u)$ ganze Zahlen, woraus die Behauptung folgt. ■

Die folgende Definition führt die Begriffe der unipotenten Charaktere und Blöcke ein.

Definition 2.4.2 *(i) Ein gewöhnlicher irreduzibler Charakter von G^F heißt unipotent, wenn er Konstituent eines Deligne-Lusztig-Charakters $R_{T,1}^G$ für einen F-stabilen maximalen Torus T von G ist.*

(ii) Ein l-Block heißt unipotent, falls er in der Vereinigung $\mathcal{B}_1(G)$ von l-Blöcken enthalten ist. Die Menge $\mathcal{B}_1(G)$ besteht aus den irreduziblen Charakteren von G^F, die Konstituenten eines Deligne-Lusztig-Charakters $R_{T,\theta}^G$ sind, wobei T ein F-stabiler maximaler Torus von G und θ ein irreduzibler Charakter von T^F mit l-Potenz-Ordnung ist (vgl. hierzu auch [3]).

(iii) Ein l-modularer Brauercharakter von G^F heißt unipotent, wenn er in einem unipotenten l-Block liegt.

Ein Brauercharakter ist genau dann unipotent, wenn er Konstituent der l-modularen Reduktion eines gewöhnlichen unipotenten Charakters ist (s. [17]). Im folgenden sei G eine affine algebraische Gruppe von klassischem Typ, konkret sei G eine der Gruppen

$$\text{(a) } U_n(k), \qquad \text{(b) } SO_{2n+1}(k), \qquad \text{(c) } CSp_{2n}(k), \qquad \text{(d) } CSO_{2n}(k).$$

Lemma 2.4.3 *Die gewöhnlichen unipotenten Charaktere von G^F haben ganzzahlige Werte.*

Beweis. Es sei χ ein gewöhnlicher unipotenter Charakter von G^F und $e := \exp(G^F)$. Für alle $g \in G^F$ gilt dann $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\sqrt[e]{1})$. Da $\mathbb{Q}(\sqrt[e]{1}) \supseteq \mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist, genügt es zu zeigen, daß $\chi^\sigma = \chi$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[e]{1})/\mathbb{Q})$. Es sei also σ ein beliebiges Element der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[e]{1})/\mathbb{Q})$. Nach Lemma 2.4.1 gilt für einen beliebigen F-stabilen maximalen Torus T von G, daß $(R_{T,1}^G)^\sigma = R_{T,1}^G$. Also gilt

$$(\chi, R_{T,1}^G) = (\chi, R_{T,1}^G)^\sigma = (\chi^\sigma, (R_{T,1}^G)^\sigma) = (\chi^\sigma, R_{T,1}^G),$$

und mit dem nächsten Lemma folgt daraus $\chi = \chi^\sigma$. ■

Lemma 2.4.4 *Ein gewöhnlicher unipotenter Charakter ist eindeutig durch die Vielfachheiten bestimmt, mit denen er in den verallgemeinerten Charakteren $R_{T,1}^G$ für beliebige F-stabile maximale Tori T von G vorkommt.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus [21, (4.23)], vergleiche dazu auch die Bemerkung bei [12] im Beweis zu Aussage (3A)(1). Die vollständige Diskussion dieses Themas kann in [8] nachgelesen werden. ■

Kapitel 3

Unipotente Konjugiertenklassen von symplektischen und orthogonalen Gruppen

In diesem Kapitel sei $p \neq 2$ eine Primzahl, q eine p-Potenz und k der algebraische Abschluß des Körpers $\mathrm{GF}(p)$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = G_n$ eine der beiden folgenden Gruppen

$$\begin{array}{l} \text{(b) } SO_{2n+1}(k) \\ \text{(c) } CSp_{2n}(k) \end{array} \qquad \text{und} \qquad n' = \begin{cases} 2n+1 & \text{im Fall (b)} \\ 2n & \text{im Fall (c)} \end{cases} .$$

Die Gruppe G ist eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe vom Typ B_n oder C_n mit zusammenhängendem Zentrum (siehe dazu auch [5, 1.11]). Die unipotenten Konjugiertenklassen von G bzw. von G^F stehen in Bijektion zu den unipotenten Konjugiertenklassen von $G/Z(G)$ bzw. von $(G/Z(G))^F$. Bezeichne für $m \leq n$ mit G_m die entsprechende Gruppe vom Typ B_m bzw. C_m. Im Fall (b) ist G_0 die triviale Untergruppe, im Fall (c) die Gruppe k^*. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Matrizen:

$$H_n := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in k^{n \times n} \qquad X_{2n} := \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & 0 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & 0 & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix} \in k^{2n \times 2n}$$

Dann können die betrachteten Gruppen in folgender Weise als abgeschlossene Untergruppen einer vollen linearen Gruppe aufgefaßt werden:

(b) $SO_{2n+1}(k) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n+1}(k) \mid A \cdot H_{2n+1} \cdot A^{tr} = H_{2n+1} \text{ und } \det(A) = 1\}$

(c) $CSp_{2n}(k) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid A \cdot X_{2n} \cdot A^{tr} = \lambda X_{2n} \text{ für ein } \lambda \in k^*\}$

Der Frobenius-Morphismus F von G sei gegeben durch

$$F : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ (a_{ij}) & \longmapsto & ({a_{ij}}^q) \end{array} .$$

3.1 Die Levi-Untergruppen von G und G^F

Die Untergruppe B, die von den oberen Dreiecksmatrizen der jeweiligen Gruppe gebildet wird, ist eine F-stabile Borel-Untergruppe von G. Die Untergruppe T von G, die von den Diagonalmatrizen in G gebildet wird, ist ein F-stabiler maximaler Torus von G, der in B liegt. Diese Ergebnisse können in dem Buch von Digne und Michel [9, Kapitel 15] nachgelesen werden. Dort findet man auch Hinweise auf die weiteren Betrachtungen aus diesem Abschnitt, die sich mit Levi-Untergruppen und parabolischen Untergruppen beschäftigen.

Die Untergruppen B und $N = N_G(T)$ bilden also nach Abschnitt 2.2 ein zerfallendes BN-Paar in G. Die Standard-Levi-Untergruppen von G werden von den Blockdiagonalmatrizen gebildet, die zu einer festen Blockeinteilung gehören. Diese Blockeinteilung muß spiegelsymmetrisch zur Gegendiagonalen sein. Ist die Matrix A ein Element einer Standard-Levi-Untergruppe, dann ist eine Untermatrix, die in einem Block außerhalb der Mitte von A steht, eindeutig durch die Untermatrix bestimmt, die im gegenüberliegenden Block steht. Genauer gesagt haben die beiden Matrizen die Gestalt M^{-1} und λM^{tr^*}. Das Element $\lambda \in k^*$ ist im Fall (b) gleich 1, im Fall (c) ist es durch $A \cdot X_{2n} \cdot A^{tr} = \lambda X_{2n}$ gegeben. Abgesehen davon kann in einem Block der Größe r, der außerhalb der Mitte von A steht, eine beliebige Matrix aus $\mathrm{GL}_r(k)$ stehen. Zu einer Standard-Levi-Untergruppe L gibt es also $m', m \in \mathbb{N}_0$ mit $n = m' + m$, und eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ von m, so daß die Matrizen aus L die Gestalt

$$\begin{pmatrix} {M_1}^{-1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & {M_t}^{-1} & & & & \\ & & & M' & & & \\ & & & & \lambda {M_t}^{tr^*} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda {M_1}^{tr^*} \end{pmatrix}$$

besitzen, wobei $M' \in G_{m'}$ und $M_i \in \mathrm{GL}_{\lambda_i}(k)$ ist. Für die Standard-Levi-Untergruppe L gilt also die folgende Isomorphie

$$L \cong G_{m'} \times \mathrm{GL}_{\lambda_1}(k) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\lambda_t}(k).$$

Umgekehrt gibt es zu allen $m', m \in \mathbb{N}_0$ mit $n = m' + m$ und $\lambda \vdash m$ mindestens eine Standard-Levi-Untergruppe, die isomorph zu dem entsprechenden direkten Produkt ist. Die Standard-Levi-Untergruppen von G sind offenbar alle F-stabil. Außerdem sind sie wie G zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppen.

Da diese Überlegungen unabhängig von dem Körper sind, über dem die Matrizen definiert sind, gelten die genannten Sachverhalte in analoger Weise auch für die endliche Gruppe G^F. Deren Standard-Levi-Untergruppen sind gerade die Fixpunktmengen der Standard-Levi-Untergruppen von G unter F, d.h. eine Standard-Levi-Untergruppe von G^F ist isomorph zu

$${G_{m'}}^F \times \mathrm{GL}_{\lambda_1}(q) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\lambda_t}(q)$$

für entsprechende $m', m \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \vdash m$.

Lemma 3.1.1 *Zwei Levi-Untergruppen von G bzw. von G^F sind genau dann zueinander konjugiert, wenn sie zueinander isomorph sind.*

Beweis. Da jede Levi-Untergruppe von G zu einer Standard-Levi-Untergruppe von G konjugiert ist, genügt es, die Behauptung für zwei Standard-Levi-Untergruppen L_1 und L_2 zu zeigen. Ist $L_1 \cong L_2$, dann folgt aus den vorhergehenden Überlegungen, daß die Blockdiagonalgestalt von L_1 aus der von L_2 durch eine Permutation der Blöcke hervorgeht (d.h. die entsprechenden $m', m \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \vdash m$ sind gleich). Man erkennt leicht, daß eine solche Permutation durch Konjugation mit einer geeigneten Permutationsmatrix aus der Standard-Levi-Untergruppe $L \cong G_{m'} \times \mathrm{GL}_m(k)$ von G erreicht werden kann. Da diese Permutationsmatrix sogar aus L^F gewählt werden kann, gilt die Behauptung auch für die Gruppe G^F. ∎

Führe noch folgende Schreibweisen ein:

Definition 3.1.2 *Es seien $m', m \in \mathbb{N}_0$ mit $n = m' + m$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ eine Partition von m und L eine Levi-Untergruppe von G, die isomorph zu*

$$G_{m'} \times \mathrm{GL}_{\lambda_1}(k) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\lambda_t}(k)$$

ist. Weiter sei $g = (g', g_1, \ldots, g_t) \in L$ unipotent, also $g' \in G_{m'}$ unipotent und $g_i \in \mathrm{GL}_{\lambda_i}(k)$ unipotent. Dann schreibe

$$g \mathrel{\hat{\in}} L,$$

falls die g_i den Elementarteiler $(x-1)^{\lambda_i}$ besitzen. Ist C eine unipotente Konjugiertenklasse von G oder von G^F, dann schreibe

$$C \mathrel{\hat{\in}} L,$$

falls es ein $g \in C$ gibt mit $g \mathrel{\hat{\in}} L$. Ganz analog sind die Schreibweisen $g \mathrel{\hat{\in}} L^F$ und $C \mathrel{\hat{\in}} L^F$ zu verstehen.

3.2 Die unipotenten Konjugiertenklassen von G

Eine Parametrisierung der unipotenten Konjugiertenklassen von G ist bereits seit längerem bekannt (s. [5, Abschnitt 13.1]).

Lemma 3.2.1 *Die unipotenten Konjugiertenklassen von G sind alle F-stabil und können durch zwei Partitionen α und β mit*

$$2|\alpha| + |\beta| = n'$$

parametrisiert werden. Dabei sind die Elemente von β paarweise verschieden, im Falle (b) alle ungerade und im Fall (c) alle gerade. Die Elemente der zu den Partitionen α und β gehörenden Klasse $C(\alpha, \beta)$ haben in der natürlichen Matrix-Darstellung vom Grad n' die Elementarteiler

$$(x-1)^{\alpha_1}, (x-1)^{\alpha_1}, \ldots, (x-1)^{\alpha_r}, (x-1)^{\alpha_r}, (x-1)^{\beta_1}, \ldots, (x-1)^{\beta_s},$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ und $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$.

Diese Parametrisierung der unipotenten Konjugiertenklassen von G kann bei Carter [5] in Abschnitt 13.1 nachgelesen werden. Für den Fall (c) werden in [5, 13.1] Aussagen über die Gruppe $PCSp_{2n}$ und nicht über CSp_{2n} gemach. Die unipotente Konjugiertenklassen von $PCSp_{2n}$ stehen jedoch in natürlicher Bijektion zu den unipotenten Konjugiertenklassen von CSp_{2n}, daher gelten die Ergebnisse in analoger Weise für beide Gruppen. Beachte außerdem, daß sich im Fall (c) die Partition β in Lemma 3.2.1 von der in [5, 13.1] gewählten unterscheidet. Auch die Aussagen der beiden folgenden Lemmata findet man bei Carter [5, 13.1].

Lemma 3.2.2 *Die unipotenten Konjugiertenklassen der Gruppe* $\mathrm{GL}_n(k)$ *mit* $n \in \mathbb{N}$ *können durch Partitionen von* n *parametrisiert werden. Die unipotenten Klassen spalten beim Übergang zu* $\mathrm{GL}_n(q) = \mathrm{GL}_n(k)^F$ *nicht auf.*

Lemma 3.2.3 *Es seien* α, β *wie in Lemma 3.2.1 und* $C = C(\alpha, \beta)$ *die entsprechende unipotente Konjugiertenklasse von* G. *Ist* $u \in C^F$, *dann ist*

$$A_G(u) = C_G(u)/C_G(u)^0 \cong \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$$

mit $a(u)$ *Faktoren, und* F *operiert trivial auf* $A_G(u)$. *Da* $A_G(u)$ *abelsch ist, sind die* F*-Konjugiertenklassen einelementig. Für* $i \in \mathbb{N}$ *sei* r_i *die Anzahl der Elementarteiler von* u, *die gleich* $(x-1)^i$ *sind. Dann gilt im Fall (b)*

$$a(u) = \begin{cases} n(u) - 1 & \textit{falls } n(u) \geq 1 \\ 0 & \textit{falls } n(u) = 0 \end{cases},$$

wobei $n(u)$ *die Anzahl der ungeraden* i *mit* $r_i > 0$ *ist. Im Fall (c) gilt*

$$a(u) = n(u) - \delta(u).$$

Dabei ist $n(u)$ *die Anzahl der geraden* i *mit* $r_i > 0$ *und* $\delta(u) = 1$, *falls es ein gerades* i *mit ungeradem* r_i *gibt (d.h. falls* β *nicht die leere Partition ist), und* $\delta(u) = 0$ *sonst.*

In Definition 2.3.2 wurden kuspidale unipotente Konjugiertenklassen eingeführt. Mit Hilfe der Parametrisierung aus Lemma 3.2.1 können die kuspidalen Klassen von G genau angegeben werden (vgl. [16, Proposition 3.6.]).

Lemma 3.2.4 *Es seien* α, β *wie in Lemma 3.2.1 und* $C = C(\alpha, \beta)$ *die entsprechende unipotente Konjugiertenklasse von* G. *Im Fall (b) ist* C *genau dann kuspidal, wenn die Teile von* α *ungerade, paarweise verschieden und verschieden von den Teilen von* β *sind. Im Fall (c) ist* C *genau dann kuspidal, wenn die Teile von* α *gerade, paarweise verschieden und verschieden von den Teilen von* β *sind.*

Zum Schluß dieses Abschnitts sei noch das folgende Resultat erwähnt, das in den folgenden Abschnitten mehrfach Verwendung finden wird.

Lemma 3.2.5 *Es sei* L *eine Levi-Untergruppe von* G *und* $g, h \mathrel{\hat{\in}} L$ *zwei unipotente Elemente, dann gilt*

$$g \sim_G h \qquad \Longleftrightarrow \qquad g \sim_L h.$$

Beweis. Die Rückrichtung ist trivial, zeige also die andere Richtung. Zu der Levi-Untergruppe L gibt es $m', m \in \mathbb{N}_0$ und eine Partition $\lambda \vdash m$, so daß L isomorph zu dem direkten Produkt

$$G_{m'} \times \mathrm{GL}_{\lambda_1}(k) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\lambda_r}(k)$$

ist, wobei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Schreibe also

$$g = (g', g_1, \ldots, g_r) \quad \text{und} \quad h = (h', h_1, \ldots, h_r).$$

Nach Voraussetzung besitzen die Matrizen g_i und h_i den Elementarteiler $(x-1)^{\lambda_i}$ und sind folglich in $\mathrm{GL}_{\lambda_i}(k)$ zueinander konjugiert.

Es bleibt also zu zeigen, daß g' und h' in $G_{m'}$ zueinander konjugiert sind. Für $m' = 0$ ist das klar, da dann $g' = h' = 1$ gelten muß (im Fall (b) ist das trivial, im Fall (c) folgt das aus der Voraussetzung, daß g und h unipotent sind).

Es sei nun $m' > 0$. Da nach Voraussetzung $g \sim_G h$ besitzen g und h dieselben Elementarteiler, und nach den obigen Überlegungen besitzen folglich auch g' und h' diesselben Elementarteiler. Nach Lemma 3.2.1 sind die Konjugiertenklassen von $G_{m'}$ eindeutig durch die zugehörigen Elementarteiler parametrisierbar, also sind g' und h' in $G_{m'}$ zueinander konjugiert. Folglich gilt $g \sim_L h$. ■

3.3 Die Aufspaltung unipotenter Konjugiertenklassen von G in G^F

Die Voraussetzungen und Schreibweisen seien wie im letzten Abschnitt. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man die Aufspaltung der unipotenten Konjugiertenklassen von G in G^F auf die Aufspaltung der in Lemma 3.2.4 charakterisierten kuspidalen unipotenten Klassen zurückführen kann.

Theorem 3.3.1 *Es seien $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ und β zwei Partitionen wie in Lemma 3.2.1. Weiter sei $C = C(\alpha, \beta)$ eine nicht-kuspidale unipotente Klasse von G. Dann gibt es eine Standard-Levi-Untergruppe L von G mit*

$$L \cong G_{n-\alpha_j} \times \mathrm{GL}_{\alpha_j}(k)$$

für ein $1 \leq j \leq r$, so daß für alle Klassen $C' \subseteq C^F$ von G^F gilt:

(i) $C' \mathrel{\hat{\in}} L$.

(ii) Ist L_0 eine minimale F-stabile Levi-Untergruppe von G mit $C' \cap L_0 \neq \emptyset$, dann liegt L_0 bis auf Konjugation in L.

(iii) Ist $h \in C'$ mit $h = (h', h_1) \mathrel{\hat{\in}} L$ und ist L_1' eine minimale F-stabile Levi-Untergruppe von $G_{n-\alpha_j}$ mit $(h')_{(G_{n-\alpha_j})^F} \cap L_1' \neq \emptyset$, dann ist die entsprechende F-stabile Levi-Untergruppe $L_1 \cong L_1' \times \mathrm{GL}_{\alpha_j}(k)$, die unterhalb von L liegt, eine minimale Levi-Untergruppe von G mit $C' \cap L_1 \neq \emptyset$.

Beweis. Da $C = C(\alpha, \beta)$ nicht kuspidal ist, gibt es nach Lemma 3.2.4 ein $1 \leq j \leq r$, so daß mindestens einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

1. α_j ist im Fall (b) gerade bzw. im Fall (c) ungerade.

2. $\alpha_j = \alpha_i$ für ein $j \neq i$ oder $\alpha_j = \beta_i$ für ein i.

Wähle also j so, daß 1. oder 2. gilt, und betrachte die Standard-Levi-Untergruppe

$$L \cong G_{n-\alpha_j} \times \mathrm{GL}_{\alpha_j}(k).$$

Es gibt ein $g \in C^F$ mit $g = (g', g_1) \hat{\in} L$. Nach Lemma 3.2.2 und Lemma 3.2.3 gilt die Gleichheit

$$|A_L(g)| = |A_{G_{n-\alpha_j}}(g')| = |A_G(g)|.$$

Folglich ist der in Abschnitt 2.3 eingeführte Monomorphismus $\pi' : A_L(g) \to A_G(g)$ ein Isomorphismus. Es sei nun $C' \subseteq C^F$ eine beliebige Klasse von G^F und $x_{C'} \in A_G(g)$ das zugehörige Element. Dann gibt es also ein $z \in C_L(g)$ mit $x_{C'} = z \cdot C_G(g)^0$. Da L eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe ist, gibt es nach Satz 2.2.1 ein $y \in L$ mit $z = y^{-1}F(y)$. Dann ist ${}^y g \in C'$ und ${}^y g \hat{\in} L$, also folgt (i).

Es sei nun L_0 eine minimale F-stabile Levi-Untergruppe mit $C' \cap L_0 \neq \emptyset$. Da L_0 minimal ist, gilt sogar $C' \hat{\in} L_0$. Dann ist aber

$$L_0 \cong G_m \times \mathrm{GL}_{\alpha_{i_1}}(k) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\alpha_{i_t}}(k)$$

mit $1 \leq i_l \leq r$ und $m := n - \sum_{l=1}^{t} \alpha_{i_l}$. Es sei also $h \in C'$ mit $h = (h', h_1 \ldots, h_t) \hat{\in} L_0$.

Annahme: $\alpha_j \neq \alpha_{i_l}$ für alle $1 \leq l \leq t$. Dann gehört h' zu einer unipotenten Konjugiertenklasse $C(\alpha', \beta')$ von G_m, so daß α_j ein Teil der Partition α' ist und eine der Bedingungen 1. oder 2. von oben (bzgl. α' und β') erfüllt. Es kann also analog zu oben geschlossen werden, daß es eine Standard-Levi-Untergruppe $L' \cong G_{m-\alpha_j} \times \mathrm{GL}_{\alpha_j}(k)$ von G_m gibt mit $(h')_{{G_m}^F} \hat{\in} L'$. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von L_0, also war die Annahme falsch.

Dann gibt es aber eine F-stabile Levi-Untergruppe L_1 von G, die über L_0 liegt und isomorph zu $G_{n-\alpha_j} \times \mathrm{GL}_{\alpha_j}(k)$ ist. Also ist $L_1 \cong L$, und nach Lemma 3.1.1 ist L_1 zu L konjugiert, woraus die Behauptung (ii) folgt.

Nun zur Behauptung (iii). Falls L_1 nicht minimal ist, dann gibt es eine echte minimale F-stabile Levi-Untergruppe L_0 von L_1 mit $C' \cap L_0 \neq \emptyset$. Wie im Beweis zu Behauptung (ii) gezeigt wurde, ist dann L_0 zu einer F-stabilen Levi-Untergruppe von G konjugiert, die unterhalb von L liegt und mit L den Faktor $\mathrm{GL}_{\alpha_j}(k)$ gemeinsam hat. Man sieht leicht, daß diese Levi-Untergruppe sogar so gewählt werden kann, daß sie echt unterhalb von L_1 liegt und mit L_1 den Faktor $\mathrm{GL}_{\alpha_j}(k)$ gemeinsam hat. Es sei also o.B.d.A. L_0 von dieser Form, d.h. $L_0 \cong \mathrm{GL}_{\alpha_j}(k) \times L_0'$, wobei L_0' eine echte Levi-Untergruppe von L_1' ist. Wähle nun $l \in C'$ mit $l = (l', l_1) \hat{\in} L$ und $l \in L_0$. Dann muß aber nach den Überlegungen im ersten Teil des Beweises

$$l' \sim_{(G_{n-\alpha_j})^F} h'$$

gelten, da $A_L(g) \cong A_G(g)$. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von L_1'. ■

Damit ist das Problem der Aufspaltung auf die Konjugiertenklasse $(g')_{G_{n-\alpha_j}}$ der kleineren Gruppe $G_{n-\alpha_j}$ zurückgeführt. Diesen Schritt kann man so oft wiederholen, bis man bei einer unipotenten kuspidalen Klasse einer kleineren Gruppe angelangt ist.

3.4 Die Aufspaltung kuspidaler unipotenter Konjugiertenklassen von G in G^F

Verwende wieder die Bezeichnungen aus den letzten Abschnitten. Es sei nun $C = C(\alpha, \beta)$ eine kuspidale unipotente Konjugiertenklasse von G. Dann sind nach Lemma 3.2.4 die Elemente aus $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ paarweise verschieden und verschieden von den Elementen aus β. Weiter sind die α_i im Fall (b) ungerade und im Fall (c) gerade. Es sei $L_\emptyset$ eine Standard-Levi-Untergruppe von G mit

$$L_\emptyset \cong G_m \times \mathrm{GL}_{\alpha_1}(k) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\alpha_r}(k), \qquad m := n - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i,$$

so daß die Matrizen aus $L_\emptyset$ die Diagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} {M_1}^{-1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & {M_r}^{-1} & & & & \\ & & & M' & & & \\ & & & & \lambda {M_r}^{tr^*} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda {M_1}^{tr^*} \end{pmatrix}$$

besitzen, wobei $M' \in G_m$ und $M_i \in \mathrm{GL}_{\alpha_i}(k)$ sind. Wie oben gilt im Fall (b) $\lambda = 1$, im Fall (c) ist λ durch $M' X_{2m} {M'}^{tr} = \lambda X_{2m}$ gegeben. Es sei $I := \{1, \ldots, r\}$, und für $J \subseteq I$ sei L_J eine F-stabile Levi-Untergruppe von G mit

$$L_J \cong G_{m_J} \times \prod_{j \in I \setminus J} \mathrm{GL}_{\alpha_j}(k), \qquad m_J := n - \sum_{j \in I \setminus J} \alpha_j$$

(für $J = \emptyset$ sei $L_J = L_\emptyset$ wie oben). Die Levi-Untergruppen L_J können so gewählt werden, daß

$$L_J \cap L_K = L_{J \cap K}$$

für $J, K \subseteq I$. Für $j \in I$ sei nämlich $L_{I \setminus \{j\}}$ die Untergruppe von G, die aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & M^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda M^{tr^*} & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

mit $M \in \mathrm{GL}_{\alpha_j}(k)$ besteht. Dabei sollen in der gezeigten Darstellung die äußeren Spalten und Zeilen die Breite bzw. Höhe $\sum_{l=1}^{j-1} \alpha_l$ haben. Für beliebiges $J = I \setminus \{j_1, \ldots, j_t\} \subseteq I$ sei nun

$$L_J := L_{I \setminus \{j_1\}} \cap \ldots \cap L_{I \setminus \{j_t\}}.$$

Dann besitzen diese Untergruppen offenbar die geforderten Eigenschaften und sind F-stabil. Weiterhin ist L_J für beliebiges $J = I \setminus \{j_1, \ldots, j_t\} \subseteq I$ eine Levi-Untergruppe von G, da L_J in G zu der Standard-Levi-Untergruppe konjugiert ist, deren Matrizen die Diagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} {M_1}^{-1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & {M_t}^{-1} & & & & \\ & & & M' & & & \\ & & & & \lambda {M_t}^{tr^*} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda {M_1}^{tr^*} \end{pmatrix}$$

besitzen, wobei $M' \in G_{m_J}$ und $M_i \in \mathrm{GL}_{\alpha_{j_i}}(k)$ sind.

Es gibt ein $u \in C^F$ mit $u \hat{\in} L_\emptyset$, also gilt $u \hat{\in} L_J$ für alle $J \subseteq I$. Schreibe daher auch $u = (u', u_1, \ldots, u_r)$ mit $u' \in G_{m_\emptyset}$ und $u_i \in \mathrm{GL}_{\alpha_i}(k)$. Für beliebiges $J = \{j_1, \ldots, j_t\} \subseteq I$ schreibe

$$u = ((u', u_{j_1}, \ldots, u_{j_t}), u_{j_{t+1}}, \ldots, u_{j_r}) \hat{\in} L_J \cong G_{m_J} \times \mathrm{GL}_{\alpha_{j_{t+1}}}(k) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\alpha_{j_r}}(k),$$

wobei $I \setminus J = \{j_{t+1}, \ldots, j_r\}$. Betrachte nun für $J \subseteq I$ die Gruppe

$$A_{L_J}(u) = C_{L_J}(u)/C_{L_J}(u)^0.$$

Mit Hilfe des kanonischen Monomorphismus

$$\pi'_J : \begin{array}{ccc} A_{L_J}(u) & \longrightarrow & A_G(u) \\ h \cdot C_{L_J}(u)^0 & \longmapsto & h \cdot C_G(u)^0 \end{array} \qquad (h \in C_{L_J}(u))$$

kann man zu jedem $J \subseteq I$ die Untergruppe $A_J := \pi'_J(A_{L_J}(u))$ von $A_G(u)$ definieren. Dann gilt für $J, K \subseteq I$

$$A_J \cap A_K \supseteq A_{J \cap K}.$$

Leider ist es nicht gelungen, die andere Inklusion „$A_J \cap A_K \subseteq A_{J \cap K}$“ allgemein zu zeigen. Anhand des Vertretersystems für die unipotenten Konjugiertenklassen der Gruppe G^F, das in Abschnitt 4.3 beschrieben wird, kann man diese Inklusion jedoch für den Fall (c) beweisen (siehe Abschnitt 4.4). Es liegt die Vermutung nahe, daß sie auch für den Fall (b) oder sogar ganz allgemein für Gruppen von klassischem Typ gilt. Diese Vermutung wird dadurch gestützt, daß die in Abschnitt 4.6 für den Fall (b) beschriebenen Kandidaten für ein Vertretersystem der unipotenten Klassen von G^F mit ihr im Einklang zu stehen scheinen.

Vermutung 3.4.1 *Die Bezeichnungen seien wie oben gewählt. Sind $J, K \subseteq I$, dann gilt*

$$A_J \cap A_K \subseteq A_{J\cap K}.$$

Im folgenden sind alle Aussagen, die auf dieser Vermutung beruhen mit (*) gekennzeichnet. Diese Aussagen gelten also sicher für den Fall, daß G_n die symplektische Gruppe $CSp_{2n}(k)$ ist (Fall (c)), sind aber für den Fall, daß G_n die orthogonale Gruppe $SO_{2n+1}(k)$ ist (Fall (b)), nicht vollständig bewiesen.

Zum Beweis der Vermutung für den Fall (c) mit Hilfe des erwähnten Vertretersystemen aus Abschnitt 4.3 benötigt man das folgende Lemma:

Lemma 3.4.2 *Gilt für alle unipotenten Konjugiertenklassen $C' \subseteq C^F$ von G^F*

$$C' \mathrel{\hat{\in}} L_J \text{ und } C' \mathrel{\hat{\in}} L_K \qquad \Longrightarrow \qquad C' \mathrel{\hat{\in}} L_{J\cap K},$$

dann folgt $A_J \cap A_K \subseteq A_{J\cap K}$ und umgekehrt.

Die Aussage dieses Lemmas folgt direkt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 3.4.3 *Ist $C' \subseteq C^F$ eine Konjugiertenklasse von G^F, $x_{C'} \in A_G(u)$ das zu C' gehörende Element und $J \subseteq I$, dann gilt*

$$C' \mathrel{\hat{\in}} L_J \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{C'} \in A_J.$$

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Es sei $g \in C'$ mit $g \mathrel{\hat{\in}} L_J$. Da auch $u \mathrel{\hat{\in}} L_J$ und $g \sim_G u$, gibt es nach Lemma 3.2.5 ein $y \in L_J$ mit $u = g^y$. Damit gilt

$$x_{C'} = y^{-1}F(y) \cdot C_G(u)^0 = \pi'_J(y^{-1}F(y) \cdot C_{L_J}(u)^0) \in \pi'_J(A_{L_J}(u)) = A_J.$$

„$\Longleftarrow$“: Da $x_{C'} \in A_J$, gibt es ein $z \in C_{L_J}(u)$ mit $x_{C'} = z \cdot C_G(u)^0$. Da L_J zusammenhängend ist, gibt es nach Satz 2.2.1 ein $y \in L_J$ mit $z = y^{-1}F(y)$. Dann ist $g := {}^y u \in C' \cap L_J$. Da $u \mathrel{\hat{\in}} L_J$, folgt $g \mathrel{\hat{\in}} L_J$, also $C' \mathrel{\hat{\in}} L_J$. ■

Nun kann man die Levi-Untergruppen von G^F, die nicht-leeren Schnitt mit C' haben, genau angeben.

Lemma 3.4.4 (*) *Ist $C' \subseteq C^F$ eine Konjugiertenklasse von G^F, dann gibt es genau ein minimales $J_0 \subseteq I$ mit $C' \mathrel{\hat{\in}} L_{J_0}$. Ist L' eine beliebige Levi-Untergruppe von G^F, so hat C' genau dann nicht-leeren Schnitt mit L', wenn L' bis auf Konjugation über ${L_{J_0}}^F$ liegt.*

Beweis. Es seien $J_1, J_2 \subseteq I$ minimal mit $C' \mathrel{\hat{\in}} L_{J_i}$. Dann liegt das zu C' gehörende Element $x_{C'} \in A_G(u)$ nach Lemma 3.4.3 in den Untergruppen A_{J_i}, also gilt mit Vermutung 3.4.1

$$x_{C'} \in A_{J_1} \cap A_{J_2} \subseteq A_{J_1\cap J_2}.$$

Daraus folgt wiederum mit Lemma 3.4.3, daß $C' \mathrel{\hat{\in}} L_{J_1\cap J_2}$, und aus der Minimalität der J_i folgt $J_1 = J_2$. Es sei nun L' eine beliebige Levi-Untergruppe von G^F.

„$\Longrightarrow$“: Da $L' \cap C' \neq \emptyset$, gibt es eine Levi-Untergruppe L'_1 von L' mit $C' \hat{\in} L'_1$. Dann gibt es ein $J \subseteq I$ mit

$$L'_1 \cong {G_{m_J}}^F \times \prod_{j \in I \setminus J} \mathrm{GL}_{\alpha_j}(q).$$

Also gilt $L'_1 \cong {L_J}^F$, und nach Lemma 3.1.1 gibt es ein $g \in G^F$ mit ${L'_1}^g = {L_J}^F$. Daraus folgt ${L_{J_0}}^F \subseteq {L_J}^F \subseteq L'^g$.
„$\Longleftarrow$“: Es sei $g \in G^F$ mit ${L_{J_0}}^F \subseteq L'^g$. Dann hat L'^g nicht-leeren Schnitt mit C'. Also gibt es ein $h \in L'^g \cap C'$, dann ist aber ${}^g h \in L' \cap C'$. ∎

Folgerung 3.4.5 (*) *Es gibt eine bis auf Konjugation eindeutige minimale Levi-Untergruppe von G^F, die nicht-leeren Schnitt mit C' hat.*

Beweis. Nach Lemma 3.4.4 sind die gesuchten minimalen Levi-Untergruppen von G^F genau die zu ${L_{J_0}}^F$ konjugierten. ∎

3.5 Eine Parametrisierung der unipotenten Klassen von endlichen symplektischen und orthogonalen Gruppen

Die Bezeichnungen seien wie oben. Im folgenden soll nun eine geeignete Parametrisierung der unipotenten Konjugiertenklassen von G^F entwickelt werden, aus der einerseits hervorgeht, zu welcher Konjugiertenklasse von G die betreffende Klasse gehört, und andererseits, mit welchen Levi-Untergruppen von G^F die Klasse nicht-leeren Schnitt hat.

Theorem 3.5.1 *Die unipotenten Konjugiertenklassen von G^F können durch Tripel von Partitionen (α, β, γ) parametrisiert werden, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:*

(i) $2|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = n'$.

(ii) Die Teile der Partition β sind paarweise verschieden und im Fall (b) ungerade bzw. im Fall (c) gerade. Dasselbe gilt für die Partition γ.

(iii) Im Fall (b) ist $|\gamma|$ gerade.

(iv) Sind im Fall (c) die Partitionen β und γ verschieden, so liegt die kleinste Zahl, in der sie sich unterscheiden, in β und nicht in γ.

Die Parametrisierung kann so gewählt werden, daß eine Klasse C' vom Typ (α, β, γ) die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) Ist C eine unipotente Konjugiertenklasse von G vom Typ $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, dann gilt

$$C' \subseteq C^F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bar{\alpha} \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\beta} = \alpha \cup \alpha \cup \beta \cup \gamma$$

(2) Ist L' eine Levi-Untergruppe von G^F mit $L' \cong {G_m}^F \times \mathrm{GL}_{\lambda_1}(q) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\lambda_t}(q)$ und $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ die zugehörige Partition, so ist der Schnitt von L' mit C' genau dann nicht leer, wenn es eine Teilpartition α' von α gibt, die eine Verfeinerung von λ ist.*

Beweis. Zeige zunächst: Ist (α, β, γ) ein Tripel von Partitionen mit den vier geforderten Eigenschaften, dann gibt es genau ein Tupel von Partitionen $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, so daß

$$\bar{\alpha} \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\beta} = \alpha \cup \alpha \cup \beta \cup \gamma$$

und $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ zu einer unipotenten Klasse von G gehört.

Die Eindeutigkeit ist klar, also zur Existenz. $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ erhält man folgendermaßen: Es sei $\bar{\alpha}$ die Partition, die aus allen Teilen von α und aus den Teilen von β besteht, die auch in γ liegen. Es sei $\bar{\beta}$ die Partition, die aus allen Teilen von β und von γ besteht, die in nur einer der beiden Partitionen vorkommen. Wie man sich leicht überzeugt, erfüllt dann $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ die geforderten Eigenschaften.

Zeige nun: Ist $C = C(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ eine unipotente Konjugiertenklasse von G, dann entspricht die Anzahl der Klassen $C' \subseteq C^F$ von G^F der Anzahl der (α, β, γ), die zu $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ gehören.

Um die Anzahl der zu dem Tupel $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ gehörenden Tripel (α, β, γ) zu bestimmen, muß man zunächst verstehen, wie ein (α, β, γ) aus dem zugehörigen $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ entsteht, indem man die Teile der Partitionen ($\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$) auf α, β und γ verteilt. Es seien also zunächst α, β und γ leere Partitionen.

<u>1. Schritt</u>: Ist i ein Teil von $\bar{\alpha}$ und ist i im Fall (b) gerade, bzw. im Fall (c) ungerade, dann nehme es aus $\bar{\alpha}$ weg, und füge es zu α hinzu. Wiederhole das so lange, bis es kein solches i mehr gibt. Kommt nun ein Teil i des verbliebenen $\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$ genau m-mal in $\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$ vor und ist $m > 1$ (d.h. $r_i > 2$), dann nehme i genau $(m-1)$-mal aus $\bar{\alpha}$ weg, und füge es $(m-1)$-mal zu α hinzu. Wiederhole auch das so oft, bis kein solches i mehr existiert. Mit den restlichen Teilen verfahre wie folgt:

<u>2. Schritt</u>: Ist α_j ein Teil des verbliebenen $\bar{\alpha}$, dann nimm es aus $\bar{\alpha}$ weg, und füge es entweder zu α oder zu β und γ hinzu. Ist β_j ein Teil des verbliebenen $\bar{\beta}$, dann nimm es aus $\bar{\beta}$ weg, und füge es entweder zu β oder zu γ hinzu. Falls β_j das kleinste Element des ursprünglichen $\bar{\beta}$ ist, muß β_j im Fall (c) zu β hinzugefügt werden, im Fall (b) muß die Wahl für β_j so getroffen werden, daß die Partition γ am Ende eine gerade Anzahl von Teilen enthält.

Anhand dieser Überlegung erkennt man leicht, daß die Anzahl der so konstruierbaren Tripel (α, β, γ) genau $2^{a(u)}$ ist. Dabei sei $u \in C$ und $a(u)$ die in Lemma 3.2.3 beschriebene Größe, für die $|A_G(u)| = 2^{a(u)}$ gilt.

Durch Summation über alle Konjugiertenklassen von G, d.h. über alle entsprechenden Tupel $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, erkennt man, daß die Anzahl der Tripel (α, β, γ) genau der Anzahl der unipotenten Konjugiertenklassen von G^F entspricht. Bisher wurde also gezeigt, daß die geforderte Parametrisierung existiert und die Eigenschaft (1) erfüllt (beachte, daß bislang noch nicht die unbewiesene Vermutung 3.4.1 verwendet wurde, d.h. abgesehen von Eigenschaft (2) bleibt der Satz auch bei Wegfall dieser Annahme richtig).

Zeige also noch, daß die Klassen so parametrisiert werden können, daß auch die Eigenschaft (2) erfüllt ist. Es sei also wieder C' eine Konjugiertenklasse von G^F, die aus einer unipotenten Klasse von G vom Typ $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ hervorgeht, d.h. $C' \subseteq C(\bar{\alpha}, \bar{\beta})^F$. Betrachte nun die oben beschriebene Konstruktion des zu C' gehörenden Tripels (α, β, γ) aus dem Tupel $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Nach dem 1. Schritt ist aus $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ das Tupel $(\bar{\alpha}', \bar{\beta}')$ geworden, das nach Konstruktion und Lemma 3.2.4 zu einer kuspidalen unipotenten Klasse $\tilde{C}$ der kleineren Gruppe G_m

gehört mit

$$2|\bar{\alpha}'| + |\bar{\beta}'| = \begin{cases} 2m+1 & \text{im Fall (b)} \\ 2m & \text{im Fall (c)} \end{cases} .$$

Der 1. Schritt entspricht genau der durch Theorem 3.3.1 beschriebenen Rückführung einer Konjugiertenklasse auf eine kuspidale Konjugiertenklasse einer kleineren Gruppe. Wie in Theorem 3.3.1 beschrieben, gibt es dann eine natürliche Bijektion zwischen den Klassen $C' \subseteq C^F$ von G^F und den Klassen $\tilde{C}' \subseteq \tilde{C}^F$ von ${G_m}^F$. Es sei also $\tilde{C}'$ die Klasse von ${G_m}^F$, die der Klasse C' von G^F entspricht.

Verwende nun die oben eingeführten Bezeichnungen, insbesondere sei $L_\emptyset$ eine minimale Standard-Levi-Untergruppe von G_m, die nicht-leeren Schnitt mit $\tilde{C}$ hat und $u \in \tilde{C}^F \cap L_\emptyset$. Weiter sei $\bar{\alpha}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $I = \{1, \dots, r\}$, und für $J \subseteq I$ sei $A_J \leq A_{G_m}(u)$ wie oben.

Bei der Konstruktion des zu C' gehörenden Tripels (α, β, γ) aus dem Tupel $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ kann man nun im 2. Schritt die Teile α_j von $\bar{\alpha}'$ folgendermaßen verteilen: Füge α_j genau dann zu α hinzu, wenn das zu $\tilde{C}'$ gehörende Element $x_{\tilde{C}'}$ von $A_{G_m}(u)$ in der Untergruppe $A_{I\setminus\{j\}}$ liegt.

Zeige nun noch die Aussge (2). Es genügt offenbar, die Behauptung für den folgenden minimalen Fall zu zeigen: Falls $C' \cap L' \neq \emptyset$, dann sei L' mit dieser Eigenschaft minimal; falls es eine Teilpartition α' von α gibt, die eine Verfeinerung von λ ist, dann sei sogar $\lambda = \alpha$. Insbesondere gilt in diesem Fall die Äquivalenz

$$C' \cap L' \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad C' \mathrel{\hat{\in}} L'.$$

Es sei $C = C(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ die Klasse von G mit $C' \subseteq C^F$. Dann kann man den Beweis der Aussage (2) auf den Fall zurückspielen, daß C kuspidal ist. Ist nämlich C nicht kuspidal, dann gibt es nach dem Beweis zu Theorem 3.3.1 ein $\alpha_j \in \bar{\alpha}$ mit den dort beschriebenen Eigenschaften. Aufgrund der Konstruktion von α aus $\bar{\alpha}$ im 1. Schritt gilt $\alpha_j \in \alpha$. Wegen Theorem 3.3.1 (ii) gilt außerdem

$$C' \cap L' \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_j = \lambda_i \text{ für ein } i$$

(o.B.d.A. $i = t$). Dann genügt es aber, den folgenden Fall zu betrachten:

$$\tilde{G} = G_{n-\alpha_j}, \quad \tilde{C} = C(\bar{\alpha} \setminus \{\alpha_j\}, \bar{\beta}), \quad \tilde{C}' = C(\alpha \setminus \{\alpha_j\}, \beta, \gamma)$$

und

$$\tilde{L}' \cong {G_m}^F \times \mathrm{GL}_{\lambda_1}(q) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\lambda_{t-1}}(q).$$

Diesen Schritt kann man so oft wiederholen, bis man bei einer kuspidalen unipotenten Konjugiertenklasse einer kleineren Gruppe $\tilde{G}$ angekommen ist.

Nehme also im folgenden an, daß $C = C(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ kuspidal ist. Es sei $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, $I = \{1, \dots, r\}$, $u \in C^F$, und für $J \subseteq I$ sei die Untergruppen A_J von $A_G(u)$ wie oben gegeben.

„$\Longrightarrow$“: Wegen Lemma 3.4.4 ist λ eine Teilpartition von $\bar{\alpha}$. Es bleibt also zu zeigen, daß für $\alpha_j \in \bar{\alpha} \cap \lambda$ auch $\alpha_j \in \alpha$ gilt. Gibt es ein $\alpha_j \in \bar{\alpha} \cap \lambda$ mit $\alpha_j \notin \alpha$, dann liegt nach

Konstruktion von α das zu C' gehörende Element $x_{C'} \in A_G(u)$ nicht in $A_{I\setminus\{j\}}$. Definiere also $J := \{i \in I \mid \alpha_i \notin \lambda\}$, dann ist $J \subseteq I \setminus \{j\}$, und damit gilt

$$x_{C'} \notin A_J \subseteq A_{I\setminus\{j\}}.$$

Nach Lemma 3.4.3 gilt also nicht $C' \hat{\in} L_J$. Da offenbar $L' \cong L_J$ ist, gilt wegen Lemma 3.1.1 auch nicht $C' \hat{\in} L'$, und folglich ist $C' \cap L' = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

„$\Longleftarrow$“: Es sei nun $\lambda = \alpha$ und $J := \{i \in I \mid \alpha_i \notin \alpha\}$. Nach Konstruktion von J gilt dann $L_J \cong L'$, und wegen Lemma 3.1.1 bleibt zu zeigen, daß $C' \cap L_J \neq \emptyset$. Nach Konstruktion von α ist $x_{C'} \in A_{I\setminus\{j\}}$ für alle $j \in I \setminus J$, also

$$x_{C'} \in \bigcap_{j \in I\setminus J} A_{I\setminus\{j\}} = A_J.$$

Mit Lemma 3.4.3 folgt daraus die Behauptung. ■

In Lemma 2.3.6 wurde gezeigt, daß der Schnitt einer unipotenten Konjugiertenklasse von G^F mit einer im Sinne von Lemma 2.3.6 (i) minimalen Leviuntergruppe L von G aus lauter kuspidalen Klassen von L^F besteht. Nun wäre es natürlich wünschenswert, jeder unipotenten Konjugiertenklasse von G^F genau eine kuspidale unipotente Klasse einer bis auf Konjugation eindeutigen Untergruppe L^F zuzuordnen. Bei den hier betrachteten Gruppen gelingt das, da der Schnitt einer unipotenten Konjugiertenklasse mit einer minimalen Levi-Untergruppe L^F eine einzelne Konjugiertenklasse von L^F ist, die nach Lemma 2.3.6 kuspidal ist.

Satz 3.5.2 *Ist C' eine unipotente Konjugiertenklasse von G^F und L eine im Sinne von Lemma 2.3.6 (i) minimale F-stabile Levi-Untergruppe von G mit $C' \cap L \neq \emptyset$, dann ist $C' \cap L^F$ eine kuspidale Konjugiertenklasse von L^F.*

Beweis. Nach Lemma 2.3.6 bleibt noch zu zeigen, daß je zwei Elemente aus $C' \cap L^F$ in L^F zueinander konjugiert sind. Es seien also $g, h \in C' \cap L^F$. Dann gilt $g, h \hat{\in} L$, da die beiden Elemente sonst in entsprechend kleineren Levi-Untergruppen von G lägen. Aus Lemma 3.2.5 folgt nun

$$g \sim_L h.$$

Es sei also $l \in L$ mit $g = h^l$. Da g und h in G^F zueinander konjugiert sind, ist

$$l^{-1}F(l) \in C_G(g)^0 \cap L.$$

Nach [23, (1.4)] ist

$$C_G(g)^0 \cap L = C_L(g)^0,$$

und folglich sind g und h sogar in L^F zueinander konjugiert. ■

Ist C' eine unipotente Konjugiertenklasse von G^F, dann gibt es nach Theorem 3.5.1 (2) eine bis auf Konjugation eindeutige minimale Levi-Untergruppe von G, die nicht-leeren Schnitt mit C' hat. Mit Hilfe des Theorems und Satz 3.5.2 kann man also der Klasse C' eine eindeutige kuspidale Klasse einer bis auf Konjugation eindeutigen Levi-Untergruppe zuordnen.

Folgerung 3.5.3 (*) *Es sei C' eine unipotente Konjugiertenklasse vom Typ (α, β, γ) von G^F mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Dann sind die minimalen Levi-Untergruppen von G, die nichtleeren Schnitt mit C' haben, gerade die, die isomorph zu*

$$G_m \times \mathrm{GL}_{\alpha_1}(k) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{\alpha_r}(k)$$

sind. Insbesondere ist C' genau dann kuspidal, wenn α die leere Partition ist.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der in Theorem 3.5.1 beschriebenen Eigenschaft (2). ■

3.6 Die 2-modularen Brauercharaktere der endlichen symplektischen und orthogonalen Gruppen

In diesem Abschnitt werden die 2-modularen unipotenten Brauercharaktere der Gruppen $SO_{2n+1}(q)$ und $CSp_{2n}(q)$ behandelt. Wann immer im folgenden von Brauercharakteren die Rede ist, sollen 2-modulare Brauercharaktere gemeint sein. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei $p_\infty(m)$ die Anzahl der Partitionen von m, mit $p_2(m)$ wird die Anzahl der 2-regulären Partitionen von m bezeichnet. Eine Partition heißt 2-regulär, wenn sie aus lauter verschiedenen Teilen besteht.

Nach [13, Proposition 2.4.] gibt es eine Bijektion zwischen den irreduziblen unipotenten 2-modularen Brauercharakteren und den unipotenten Konjugiertenklassen von G^F. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß sogar die Anzahl der kuspidalen unipotenten 2-modularen Brauercharaktere von G^F der Anzahl der kuspidalen unipotenten Konjugiertenklassen von G^F entspricht.

Theorem 3.6.1 (*) *Es gibt eine Bijektion zwischen den kuspidalen unipotenten 2-modularen Brauercharakteren von G^F und den kuspidalen unipotenten Konjugiertenklassen von G^F.*

Für den Beweis wird das folgende Lemma benötigt, das in [16, Proposition 4.5.] nachgelesen werden kann.

Lemma 3.6.2 *Die Werte der unipotenten 2-modularen Brauercharaktere von G^F sind ganzzahlig.*

Im folgenden wird gezeigt, wie man die Anzahl der kuspidalen unipotenten Brauercharaktere von ${G_n}^F$ rekursiv bestimmen kann. Da die Anzahl aller unipotenten Brauercharaktere nach [13, Proposition 2.4.] und Lemma 3.2.3 bekannt ist, genügt es, die Anzahl der nicht-kuspidalen unipotenten Brauercharaktere von G_n mit Hilfe der Anzahlen von kuspidalen unipotenten Brauercharakteren kleinerer Gruppen $G_{m'}$ mit $m' < n$ auszudrücken. Das gelingt mit Hilfe der in Abschnitt 1.3 eingeführten Harish-Chandra-Serien.

Es sei L eine Levi-Untergruppe von G^F und X ein L-Modul, der zu einem kuspidalen unipotenten Brauercharakter von L gehört. Dann gibt es also ganze Zahlen m, m' mit $n = m' + m$ und eine Partition $\lambda \vdash m$, die nach [15, (4.2)(ii)] die Form

$$\lambda = (1^{m_0}, 2^{m_1}, (2^2)^{m_2}, (2^3)^{m_3}, \ldots)$$

besitzt, so daß

$$L \cong {G_{m'}}^F \times \mathrm{GL}_1(q)^{m_0} \times \mathrm{GL}_2(q)^{m_1} \times \mathrm{GL}_4(q)^{m_2} \times \dots$$

gilt. Um die Anzahl der nicht-kuspidalen unipotenten Brauercharaktere von G^F bestimmen zu können, interessiert man sich nun für die Anzahl der Charaktere, die in der zu dem Paar (L, X) gehörenden Harish-Chandra-Serie liegen. Diese entspricht nach Theorem 1.3.4(ii) der Anzahl der einfachen Moduln von $H(L, X)$, wobei $H(L, X)$ die Endomorphismen-Algebra des Harish-Chandra-induzierten Moduls $R_L^G X$ ist.

Lemma 3.6.3 *Die Anzahl der einfachen Moduln der Endomorphismen-Algebra $H(L, X)$ ist durch*

$$p_2(m_0) \cdot p_2(m_1) \cdot p_2(m_2) \cdot \dots$$

gegeben.

Beweis. Nach [15, Proposition 4.4] ist die Algebra $H(L, X)$ isomorph zu einer Iwahori-Hecke-Algebra, die zu der Gruppe $W(L)$ aus Abschnitt 1.4 gehört. Mit Lemma 3.6.2 folgt nun aus Theorem 1.5.6, daß $H(L, X)$ sogar isomorph zu der Gruppenalgebra von $W(L)$ ist. Man muß also die Anzahl der irreduziblen 2-modularen Brauercharaktere von $W(L)$ bestimmen. Nach [15, (4.2)(iii)] und [5, Proposition 11.4.2.] ist

$$W(L) \cong \mathbb{Z}_2 \wr S_{m_0} \times \mathbb{Z}_2 \wr S_{m_1} \times \mathbb{Z}_2 \wr S_{m_2} \times \dots$$

Die gesuchte Anzahl ist folglich das Produkt der Anzahlen der irreduziblen Brauercharaktere der Gruppen $\mathbb{Z}_2 \wr S_{m_i}$. Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \wr S_{m_i}$ enthält einen Normalteiler der Form ${\mathbb{Z}_2}^{m_i}$, und der Faktor nach diesem Normalteiler ist isomorph zu S_{m_i}. Die 2-Gruppe ${\mathbb{Z}_2}^{m_i}$ liegt im Kern jedes Brauercharakters von $\mathbb{Z}_2 \wr S_{m_i}$, man kann also diese Brauercharaktere als Charaktere der Gruppe S_{m_i} auffassen. Die Anzahl der irreduziblen 2-modularen Brauercharaktere von S_{m_i} entspricht der Anzahl der $2'$-Klassen von S_{m_i}. Diese Anzahl ist nach [20, Lemma 6.1.2] durch $p_2(m_i)$ gegeben. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Mit Hilfe dieser Lemmata kann jetzt Theorem 3.6.1 bewiesen werden:

Beweis. Im folgenden wird für $m' \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der kuspidalen unipotenten Brauercharaktere von ${G_{m'}}^F$ mit $kusp(m')$ bezeichnet. Die Anzahl der nicht-kuspidalen unipotenten Brauercharaktere von $G^F = {G_n}^F$ beträgt wegen Lemma 3.6.3, Lemma 3.1.1 und der Aussage von [15, (4.2)(ii)]

$$\sum_{\substack{n=m'+m \\ m>0}} kusp(m') \sum_{(m_0,m_1,m_2,\dots)} (p_2(m_0)p_2(m_1)p_2(m_2)\dots),$$

wobei in der zweite Summe über alle Folgen $(m_0, m_1, m_2, \dots)$ summiert wird, die der Bedingung $m = m_0 + 2m_1 + 2^2 m_2 + \dots$ genügen. Nach [15, Lemma 2.6] gilt aber

$$p_\infty(m) = \sum_{(m_0,m_1,m_2,\dots)} (p_2(m_0)p_2(m_1)p_2(m_2)\dots),$$

also erhält man für die Anzahl der nicht-kuspidalen unipotenten Brauercharaktere von G^F

$$\sum_{\substack{n=m'+m \\ m>0}} kusp(m')p_\infty(m).$$

Für $m' \in \mathbb{N}_0$ sei im folgenden $kusp'(m')$ die Anzahl der kuspidalen unipotenten Konjugiertenklassen der Gruppe ${G_{m'}}^F$. Die Anzahl der nicht-kuspidalen unipotenten Konjugiertenklassen von ${G_n}^F$ beträgt dann nach Folgerung 3.5.3

$$\sum_{\substack{n=m'+m\\ m>0}} kusp'(m')p_\infty(m).$$

Man erhält also für $kusp(n)$ und für $kusp'(n)$ dieselbe Rekursionsformel. Es bleibt daher nur noch zu zeigen, daß $kusp(0) = kusp'(0)$ ist, daraus folgt dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichheit $kusp(n) = kusp'(n)$. Im Fall (b) ist ${G_0}^F$ die triviale Untergruppe, also gilt in diesem Fall $kusp(0) = kusp'(0) = 1$. Im Fall (c) ist ${G_0}^F \cong \mathrm{GL}_1(q)$, also ist $kusp'(0) = 1$ und nach [14, §7] gilt auch $kusp(0) = 1$. ■

Mit Hilfe von Theorem 3.6.1 und Folgerung 3.5.3 kann man sofort die Anzahl der kuspidalen unipotenten Brauercharaktere von G^F abzählen. Leider scheint es keinen „einfachen" Ausdruck für diese Anzahl zu geben.

In [16, 4.6.] stellen Geck und Malle die Frage, ob ein Brauercharakter $\phi = \phi_{(u)}$ in einer Harish-Chandra-Serie liegt, die durch ein Paar (L, ψ) gegeben ist, wobei L mit der Eigenschaft $L^F \cap (u)_{G^F} \neq \emptyset$ minimal ist und ψ ein kuspidaler unipotenter Brauercharakter von L^F ist. Diese Frage kann jetzt eindeutig mit nein beantwortet werden. Es gibt nämlich zu jeder F-stabilen Levi-Untergruppe L von G ein unipotentes Element $u \in L^F$, so daß L mit der Eigenschaft $L^F \cap (u)_{G^F} \neq \emptyset$ minimal ist. Nach [14, (6.9) und Theorem 7.6] gibt es aber nicht zu jeder F-stabilen Levi-Untergruppe L einen kuspidalen unipotenten Brauercharakter von L^F. Die Situation wird anhand des Beispiels aus dem nächsten Abschnitt deutlicher (betrachte eine Levi-Untergruppe, die isomorph zu $CSp_0(q) \times \mathrm{GL}_3(q)$ ist).

3.7 Ein Beispiel: $CSp_6(q)$

In diesem Abschnitt sei $G = CSp_6(k)$ und damit $G^F \cong CSp_6(q)$, wobei q wie oben eine Potenz der Primzahl $p \neq 2$ ist. Nach Abschnitt 3.1 ist jede Levi-Untergruppe von G^F isomorph zu einer der folgenden Gruppen

$$CSp_0(q) \times \mathrm{GL}_1(q)^3, \quad CSp_0(q) \times \mathrm{GL}_1(q) \times \mathrm{GL}_2(q), \quad CSp_0(q) \times \mathrm{GL}_3(q),$$
$$CSp_2(q) \times \mathrm{GL}_1(q)^2, \quad CSp_2(q) \times \mathrm{GL}_2(q), \quad CSp_4(q) \times \mathrm{GL}_1(q), \quad CSp_6(q).$$

Dabei soll wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt $CSp_0(q) \cong \mathrm{GF}(q)^*$ gelten. Nach Theorem 3.5.1 besitzt G^F genau 10 unipotente Konjugiertenklassen, die durch die folgenden Tripel von Partitionen (α, β, γ) parametrisiert werden:

$$((1,1,1),(),()), \quad ((1,2),(),()), \quad ((3),(),()), \quad ((1,1),(2),()), \quad ((2),(2),()),$$
$$((1),(4),()), \quad ((1),(2),(2)), \quad ((),(6),()), \quad ((),(2,4),()), \quad ((),(2),(4)).$$

Nach [13, Proposition 2.4.] gibt es also auch genau 10 unipotente 2-modulare Brauercharaktere. Nach Folgerung 3.5.3 sind die kuspidalen unipotenten Konjugiertenklassen genau die, die zu den Partitionen

$$((),(6),()), \quad ((),(2,4),()) \text{ und } ((),(2),(4))$$

gehören. Nach Theorem 3.6.1 gibt es also auch genau 3 kuspidale unipotente 2-modulare Brauercharaktere.

In der folgenden Tabelle sind für alle möglichen Isomorphietypen von Levi-Untergruppen die kuspidalen unipotenten Konjugiertenklassen und die Anzahl der kuspidalen unipotenten 2-modularen Brauercharaktere angegeben. Die aufgelisteten Ergebnisse folgen unmittelbar aus den letzten beiden Abschnitten.

<table>
<tr><th>Levi-Untergruppe</th><th colspan="3">kuspidale unipotente Klassen</th><th># kuspidale unip. 2-mod. Brauerchar.</th></tr>
<tr><td>$CSp_0(q) \times \mathrm{GL}_1(q)^3$</td><td colspan="3">$\alpha = (1,1,1)$
$\beta = ()$
$\gamma = ()$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$CSp_0(q) \times \mathrm{GL}_1(q) \times \mathrm{GL}_2(q)$</td><td colspan="3">$\alpha = (1,2)$
$\beta = ()$
$\gamma = ()$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$CSp_0(q) \times \mathrm{GL}_3(q)$</td><td colspan="3">$\alpha = (3)$
$\beta = ()$
$\gamma = ()$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$CSp_2(q) \times \mathrm{GL}_1(q)^2$</td><td colspan="3">$\alpha = (1,1)$
$\beta = (2)$
$\gamma = ()$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$CSp_2(q) \times \mathrm{GL}_2(q)$</td><td colspan="3">$\alpha = (2)$
$\beta = (2)$
$\gamma = ()$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$CSp_4(q) \times \mathrm{GL}_1(q)$</td><td>$\alpha = (1)$
$\beta = (4)$
$\gamma = ()$</td><td colspan="2">$\alpha = (1)$
$\beta = (2)$
$\gamma = (2)$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$CSp_6(q)$</td><td>$\alpha = ()$
$\beta = (6)$
$\gamma = ()$</td><td>$\alpha = ()$
$\beta = (2,4)$
$\gamma = ()$</td><td>$\alpha = ()$
$\beta = (2)$
$\gamma = (4)$</td><td>3</td></tr>
</table>

Nach Lemma 3.6.3 enthält die Harish-Chandra-Serie, die zu dem kuspidalen Brauercharakter der Levi-Untergruppe $CSp_0(q) \times \mathrm{GL}_1(q)^3$ gehört, genau zwei Brauercharaktere, alle anderen Serien enthalten genau einen Brauercharakter. Die Gruppe $CSp_6(q)$ besitzt also 10 unipotente 2-modulare Brauercharaktere, die in 9 Harish-Chandra-Serien aufgeteilt sind.

Die Levi-Untergruppe $CSp_0(q) \times \mathrm{GL}_3(q)$ veranschaulicht den am Ende des letzten Abschnittes beschriebenen Sachverhalt. Diese Levi-Untergruppe besitzt nämlich keinen kuspidalen unipotenten 2-modularen Brauercharakter, sie besitzt aber wie jede Levi-Untergruppe eine kuspidale unipotente Konjugiertenklasse.

Kapitel 4

Vertretersysteme für unipotente Klassen von symplektischen und orthogonalen Gruppen

In diesem Kapitel sei $p \neq 2$ eine Primzahl, q eine p-Potenz und $\bar{k}$ der algebraische Abschluß des Körpers $\mathrm{GF}(p)$. Weiter sei k ein beliebiger Teilkörper von $\bar{k}$, der den Körper $\mathrm{GF}(q)$ enthält. Zunächst werden einige Schreibweisen eingeführt, die in den nächsten Abschnitten häufiger gebraucht werden. Mit E_n wird die Einheitsmatrix der Größe n bezeichnet. Wie in Kapitel 3 seien für $n \in \mathbb{N}$ die $n \times n$-Matrix H_n und die $2n \times 2n$-Matrix X_{2n} gegeben durch

$$H_n := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad X_{2n} := \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & 0 & & & \iddots & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \iddots & & & 0 & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Dann ist für eine beliebige $n \times n$-Matrix A die Matrix A^{tr^*} gegeben durch $H_n \cdot A^{tr} \cdot H_n$. In den folgenden Abschnitten werden einige Matrizengruppen benötigt, die hier definiert werden sollen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$Sp_{2n}(k) := \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid A \cdot X_{2n} \cdot A^{tr} = X_{2n}\},$$

$$CSp_{2n}(k) := \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid A \cdot X_{2n} \cdot A^{tr} = \lambda X_{2n} \text{ für ein } \lambda \in k^*\},$$

$$SO_n(k) := \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid A \cdot H_n \cdot A^{tr} = H_n \text{ und } \det(A) = 1\}.$$

Im folgenden werden noch einige Matrizen definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ seien die $n \times n$-Matrizen J_n und J'_n gegeben durch

$$J_n := \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad J'_n := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei K_n die $n \times n$-Matrix, deren erste Spalte aus lauter Einsen und deren restliche Spalten aus lauter Nullen bestehen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\tilde{J}_{2n+1}$ eine Matrix aus der orthogonalen Gruppe $SO_{2n+1}(q)$ mit Elementarteiler $(x-1)^{2n+1}$. Die Existenz dieser Matrix folgt aus Lemma 3.2.1, außerdem gilt

$$\tilde{J}_n = (\tilde{J}_n^{-1})^{tr^*}.$$

4.1 Der Zentralisator von unipotenten Elementen symplektischer Gruppen

Für eine Partition $\beta = (2\beta_1, 2\beta_2, \ldots, 2\beta_h)$ mit $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_h$ und $|\beta| = m$ sei die $m \times m$-Matrix $\mathcal{C}_\beta$ gegeben durch

$$\mathcal{C}_\beta := \begin{pmatrix} J'_{\beta_h} & 0 & \cdots\cdots\cdots & & & 0 & K_{\beta_h} \\ & J'_{\beta_{h-1}} & \ddots & & & \iddots \quad K_{\beta_{h-1}} & 0 \\ & & \ddots \; 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ & & J'_{\beta_1} & K_{\beta_2} & 0 & & \vdots \\ & & & J_{\beta_1} & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & J_{\beta_{h-1}} & 0 \\ & & & & & & J_{\beta_h} \end{pmatrix}.$$

Für zwei Partitionen β und γ sei $\beta \cup \gamma$ die Partition, die man aus der Vereinigung der beiden Partitionsmengen erhält. Dann entstehe für einen Skalar δ die Matrix $\mathcal{C}_{\beta,\gamma}(\delta)$ aus der Matrix $\mathcal{C}_{\beta\cup\gamma}$, indem man die Untermatrizen der Form K_{γ_i} durch δK_{γ_i} ersetzt. Wenn man speziell für γ die leere Partition ϕ einsetzt, so erhält man $\mathcal{C}_{\beta,\phi}(\delta) = \mathcal{C}_\beta$.

Für drei Partitionen α, β und γ, wobei β und γ wieder aus geraden Teilen bestehen sollen, sei

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta) := \operatorname{diag}(\tilde{J}_{\alpha_1}, \ldots, \tilde{J}_{\alpha_l}, \mathcal{C}_{\alpha'\cup\alpha'\cup\beta,\gamma}(\delta), \tilde{J}_{\alpha_l}, \ldots, \tilde{J}_{\alpha_1}).$$

Dabei sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 2\alpha'_1, \ldots, 2\alpha'_{l'})$ mit ungeraden α_i, die der Größe nach angeordnet sind, und $\alpha' := (2\alpha'_1, \ldots, 2\alpha'_{l'})$.

Ist nun $0 \neq \delta \in \mathrm{GF}(q)$ und $2|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 2n$, dann rechnet man leicht nach, daß die unipotente Matrix $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ in der symplektischen Gruppe $Sp_{2n}(k)$ liegt und die Elementarteiler

$$(x-1)^{\alpha_1}, (x-1)^{\alpha_1}, \ldots, (x-1)^{\alpha_t}, (x-1)^{\alpha_t},$$
$$(x-1)^{2\beta_1}, \ldots, (x-1)^{2\beta_h}, (x-1)^{2\gamma_1}, \ldots, (x-1)^{2\gamma_d}$$

besitzt mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, $\beta = (2\beta_1, \ldots, 2\beta_h)$ und $\gamma = (2\gamma_1, \ldots, 2\gamma_d)$. Die γ_i seien im folgenden paarweise verschieden, für $i \in \mathbb{N}$ sei r_i die Anzahl der Elementarteiler, die gleich $(x-1)^i$ sind.

Wie in Abschnitt 4.3 gezeigt werden wird, bilden gewisse Matrizen vom Typ $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ ein Vertretersystem für die unipotenten Konjugiertenklassen der Gruppe $CSp_{2n}(q)$. Um das beweisen zu können, interessieren wir uns zunächst für den Zentralisator

$$H := C_{Sp_{2n}(k)}(\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)).$$

Nach [2, IV, 2.23] ist H das semidirekte Produkt von $R_u(H)$ und einer Untergruppe U' von H. Nach [2, IV, 2.25] gilt außerdem

$$U' \cong \prod_{i \text{ ungerade}} Sp_{r_i}(k) \times \prod_{i \text{ gerade}} O_{r_i}(k),$$

wobei $O_{r_i}(k)$ eine orthogonale Matrizengruppe vom Grad r_i ist. Im folgenden wird die Untergruppe U' von H explizit angegeben werden. Dazu sei zunächst i ungerade und $r_i = 2r > 0$, dann hat $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ nach Konstruktion die Form

$$\begin{pmatrix} * & & & & & & & & \\ & \tilde{J}_i & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & 0 & \cdots & \tilde{J}_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde{J}_i & \cdots & 0 & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{J}_i & \\ & & & & & & & & * \end{pmatrix}.$$

Es sei nun $(a_{j,k}) = A \in Sp_{2r}(k)$ und $A_{j,k} := a_{j,k} \cdot E_i$, dann liegt die Matrix

$$\begin{pmatrix} E_* & & & & & & & & \\ & A_{1,1} & \cdots & A_{1,r} & 0 & A_{1,r+1} & \cdots & A_{1,2r} & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & A_{r,1} & \cdots & A_{r,r} & 0 & A_{r,r+1} & \cdots & A_{r,2r} & \\ & 0 & \cdots & 0 & E_* & 0 & \cdots & 0 & \\ & A_{r+1,1} & \cdots & A_{r+1,r} & 0 & A_{r+1,r+1} & \cdots & A_{r+1,2r} & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & A_{2r,1} & \cdots & A_{2r,r} & 0 & A_{2r,r+1} & \cdots & A_{2r,2r} & \\ & & & & & & & & E_* \end{pmatrix}$$

in H. Die Matrizen von diesem Typ bilden also eine Untergruppe U_i von H, die isomorph zu $Sp_{r_i}(k)$ ist. Es sei nun i gerade und $r := r_i > 0$, dann besitzt $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ die Form

$$\begin{pmatrix}
* & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * \\
 & J'_{\frac{i}{2}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & K_{\frac{i}{2}} & 0 \\
 & & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 & \vdots \\
 & & & J'_{\frac{i}{2}} & 0 & \delta' K_{\frac{i}{2}} & \iddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & * & 0 & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & J_{\frac{i}{2}} & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & 0 & \vdots \\
 & & & & & & & J_{\frac{i}{2}} & 0 \\
 & & & & & & & & *
\end{pmatrix},$$

wobei $\delta' = \delta$ gilt, falls i ein Bestandteil von γ ist, und $\delta' = 1$ sonst. Im folgenden sei nun $(a_{j,k}) = A \in GL_r(k)$ und $A \cdot Y(\delta') \cdot A^{tr} = Y(\delta')$ mit

$$Y(\delta') := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \delta' \end{pmatrix} \in k^{r \times r}.$$

Weiter sei $(\tilde{a}_{j,k}) = \tilde{A} := (A^{-1})^{tr^*}$ und $A_{j,k} := a_{j,k} \cdot E_{i/2}$, bzw. $\tilde{A}_{j,k} := \tilde{a}_{j,k} \cdot E_{i/2}$. Dann liegt die Matrix

$$\begin{pmatrix}
E_* & & & & & & & & \\
 & A_{1,1} & \cdots & A_{1,r} & & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & A_{r,1} & \cdots & A_{r,r} & & & & & \\
 & & & & E_* & & & & \\
 & & & & & \tilde{A}_{1,1} & \cdots & \tilde{A}_{1,r} & \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & \tilde{A}_{r,1} & \cdots & \tilde{A}_{r,r} & \\
 & & & & & & & & E_*
\end{pmatrix}$$

in H. Die Matrizen von diesem Typ bilden also eine Untergruppe U_i von H, die isomorph zu $O^-_{r_i}(k)$ ist, falls r_i gerade und δ' kein Quadrat in k ist, und andernfalls isomorph zu $O^+ r_i(k)$ ist. Näheres dazu findet man beispielsweise bei Aschbacher [1, Kapitel 22] oder bei Carter [4, 1.4].

Da Elemente aus verschiedenen Untergruppen U_i offenbar kommutieren, ist das Erzeugnis U der Untergruppen U_i in H das direkte Produkt der U_i. Das unipotente Radikal $R_u(U)$ ist trivial, da sowohl die symplektischen als auch die orthogonalen Gruppen keine nicht-trivialen unipotenten Normalteiler enthalten. Folglich gilt $U \cap R_u(H) = \{1\}$, d.h. U und $R_u(H)$ bilden ein semidirektes Produkt in H. Es bleibt noch zu zeigen, daß $R_u(H) \cdot U = H$.

Für $|H| < \infty$ folgt dies aus Ordnungsgründen. Es sei $F = F_q : Sp_{2n}(k) \to Sp_{2n}(k)$ die Frobenius-Abbildung, die jeden Matrixeintrag in die q-te Potenz hebt. Dann ist H als

Zentralisator eines Elements aus $Sp_{2n}(k)^F$ offenbar F-stabil. Auch $R_u(H)$ ist F-stabil, da es eine charakteristische Untergruppe von H ist, und U ist F-stabil, da die U_i nach Konstruktion F-stabil sind. Also gilt $F(R_u(H) \cdot U) \subseteq R_u(H) \cdot U$, und die Behauptung folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 4.1.1 *Es sei G eine Matrizengruppe über dem Körper k mit Frobenius-Abbildung $F : G \to G$. Ist $N \leq G$ mit $F(N) \subseteq N$ und gilt $|N^{F^n}| = |G^{F^n}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $N = G$.*

Beweis. Falls $N < G$, dann gibt es ein $g \in G \setminus N$. Da die Einträge in der natürlichen Matrixdarstellung von g in einer endlichen Körpererweiterung von $\mathrm{GF}(q)$ liegen, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F^n(g) = g$. Dann gilt aber $g \in G^{F^n} = N^{F^n} \subseteq N$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. ■

Die Voraussetzungen des Lemmas sind für unseren Fall $R_u(H) \cdot U \leq H$ erfüllt, denn

$$\begin{aligned} |(R_u(H) \cdot U)^{F^n}| &= |R_u(H)^{F^n} \cdot U^{F^n}| \\ &= |R_u(H)^{F^n}| \cdot |U^{F^n}| \\ &= |R_u(H)^{F^n}| \cdot |U'^{F^n}| \\ &= |H^{F^n}|. \end{aligned}$$

Die erste und die letzte Gleichheit folgen aus dem nächsten Lemma:

Lemma 4.1.2 *Es sei G eine Matrizengruppe über dem Körper k mit Frobenius-Abbildung $F : G \to G$ und $n \in \mathbb{N}$. Ist G das semidirekte Produkt der beiden F-stabilen Untergruppen M und N, so ist G^{F^n} das semidirekte Produkt von M^{F^n} und N^{F^n}.*

Beweis. Es sei $g \in G^{F^n}$, dann gibt es eindeutig bestimmte $h \in M$ und $u \in N$ mit $g = h \cdot u$. Es gilt

$$h \cdot u = g = F^n(g) = F^n(h) \cdot F^n(u),$$

und aus der Eindeutigkeit der Darstellung folgt $h = F^n(h)$ und $u = F^n(u)$. Ist $N \trianglelefteq G$, so ist offenbar auch $N^{F^n} \trianglelefteq G^{F^n}$. ■

4.2 Die Zusammenhangskomponenten des Zentralisators

Im folgenden werden die Schreibweisen aus dem letzten Abschnitt verwendet, speziell sei $k = \bar{k}$ der algebraische Abschluß von $\mathrm{GF}(p)$. Um die Zusammenhangskomponenten des Zentralisators H zu beschreiben, möchte man sich auf die in Abschnitt 4.1 eingeführte Untergruppe U von H beschränken. Das folgende Lemma liefert die dazu nötigen Voraussetzungen.

Lemma 4.2.1 *Es sei G eine affine algebraische Gruppe über k, M eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von G und N eine abgeschlossene Untergruppe von G. Falls $G = M \cdot N$ ist und M oder N ein Normalteiler von G ist, so gilt $G^0 = M \cdot N^0$.*

Beweis. Nach Abschnitt 2.1 hat N^0 endlichen Index in N, also hat $M \cdot N^0$ endlichen Index in $G = M \cdot N$, und mit [24, 2.2.1.(iii)] folgt $M \cdot N^0 \supseteq G^0$, da $M \cdot N^0$ nach [24, 6.1(ii)] abgeschlossen ist. Andererseits folgt aus [24, 6.1(i)], daß $M \cdot N^0$ zusammenhängend ist, also $M \cdot N^0 \subseteq G^0$. ■

Da $R_u(H)$ nach Definition des unipotenten Radikals zusammenhängend ist, gilt mit Lemma 4.2.1

$$H/H^0 = (R_u(H) \cdot U)/(R_u(H) \cdot U^0) \cong U/U^0 \cong \prod_i U_i/U_i^0 \cong \prod_{i \text{ gerade}} \mathbb{Z}_2,$$

denn die symplektischen Gruppen sind zusammenhängend, und die orthogonalen Gruppen zerfallen in zwei Zusammenhangskomponenten, die durch die Matrizen mit Determinante 1 und die mit Determinante -1 gebildet werden (siehe dazu [24, 6.6.]). Folglich liegen zwei Matrizen aus U in derselben Zusammenhangskomponente von H, wenn deren Hauptuntermatrizen, die zu den U_i mit geradem i gehören, jeweils die gleichen Determinanten besitzen.

Etwas komplizierter ist die Situation in der Gruppe $CSp_{2n}(k)$. Offenbar gilt

$$CSp_{2n}(k) = Sp_{2n}(k) \cdot D,$$

wobei D die Gruppe aller Skalarmatrizen ist. Es sei $H' := C_{CSp_{2n}(k)}(\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta))$, dann ist

$$H' = H \cdot D = R_u(H) \cdot U \cdot D.$$

Da $R_u(U \cdot D) = \{1\}$, kann man H' als semidirektes Produkt

$$H' = R_u(H') \cdot (U \cdot D)$$

schreiben. Da D isomorph zu k^* ist, ist D zusammenhängend, und folglich gilt nach Lemma 4.2.1

$$H'^0 = R_u(H') \cdot (U \cdot D)^0 = R_u(H') \cdot (U^0 \cdot D).$$

Daraus folgt also

$$H'/H'^0 \cong (U \cdot D)/(U^0 \cdot D).$$

Betrachte nun zwei Fälle. Im ersten Fall gebe es kein gerades i mit ungeradem r_i. Offenbar gilt dann

$$U \cap D \cong \{1, -1\} \quad \text{und} \quad U^0 \cap D \cong \{1, -1\},$$

denn gemäß der Charakterisierung der Zusammenhangskomponenten von U liegt die Skalarmatrix -1 in U^0, falls alle orthogonalen Gruppen $O_{r_i}(k)$ geraden Grad haben. Damit gilt also

$$(U^0 \cdot D) \cap U = U^0,$$

und man erhält

$$H'/H'^0 \cong (U \cdot D)/(U^0 \cdot D) \cong U/U^0 \cong \prod_{i \text{ gerade}} \mathbb{Z}_2 \,.$$

In diesem Fall liegen zwei Matrizen aus U genau dann in derselben Zusammenhangskomponente von H', wenn sie in derselben Zusammenhangskomponente von H liegen. Nun sei j gerade mit ungeradem r_j, dann gilt

$$U \cap D \cong \{1, -1\} \quad \text{und} \quad U^0 \cap D = \{1\},$$

und daraus erhält man

$$(U^0 \cdot D) \cap U = U^0 \times \mathbb{Z}_2 .$$

Also folgt

$$H'/H'^0 \cong (U \cdot D)/(U^0 \cdot D) \cong U/(U^0 \times \mathbb{Z}_2) \cong \prod_{\substack{i \text{ gerade} \\ i \neq j}} \mathbb{Z}_2 .$$

In diesem Fall liegen zwei Matrizen $u_1, u_2 \in U$ genau dann in derselben Zusammenhangskomponente von H', wenn sie in derselben Zusammenhangskomponente von H liegen oder wenn $-u_1$ und u_2 in derselben Zusammenhangskomponente von H liegen.

4.3 Ein Vertretersystem für die unipotenten Konjugiertenklassen der Gruppen $CSp_{2n}(k)$ und $CSp_{2n}(q)$

Es sei $k = \bar{k}$ der algebraische Abschluß des Körpers GF(p), G die affine algebraische Gruppe $CSp_{2n}(k)$ und $F = F_q : G \to G$ der Frobenius-Morphismus, der jeden Matrixeintrag in die q-te Potenz hebt.

Nach Lemma 3.2.1 werden die unipotenten Klassen von G durch Paare von Partitionen (α, β) parametrisiert, für die gilt, daß $2|\alpha| + |\beta| = 2n$ und daß die Teile von β paarweise verschieden und gerade sind. Ein unipotentes Element der Klasse vom Typ (α, β) besitzt in der natürlichen Matrixdarstellung vom Grad $2n$ die Elementarteiler

$$(x-1)^{\alpha_1}, (x-1)^{\alpha_1}, \ldots, (x-1)^{\alpha_t}, (x-1)^{\alpha_t}, (x-1)^{2\beta_1}, \ldots, (x-1)^{2\beta_h}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ und $\beta = (2\beta_1, \ldots, 2\beta_h)$.

Satz 4.3.1 *Die Matrizen der Form $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\phi}(1)$ aus Abschnitt 4.1 bilden ein Vertretersystem für die unipotenten Konjugiertenklassen der Gruppe G.*

Beweis. Nach Abschnitt 4.1 besitzt die Matrix $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\phi}(1)$ genau die Elementarteiler eines Elements der Klasse vom Typ (α, β) und liegt in G. ■

In der endlichen Gruppe $G^F = CSp_{2n}(q)$ zerfallen diese Klassen wie in Kapitel 3 beschrieben. Nach Theorem 3.5.1 können die unipotenten Klassen von G^F durch Tripel von Partitionen (α, β, γ) parametrisiert werden, für die die folgenden drei Eigenschaften gelten müssen:

(i) $2|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 2n$.

(ii) Die Teile der Partition β sind paarweise verschieden und gerade. Dasselbe gilt für die Partition γ.

(iii) Sind β und γ verschieden, so liegt die kleinste Zahl, in der sie sich unterscheiden, in β und nicht in γ.

Theorem 4.3.2 *Es sei δ ein Erzeuger der zyklischen Gruppe* $\mathrm{GF}(q)^*$, *dann bilden die Matrizen der Form $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$, wobei das Tripel (α,β,γ) die Eigenschaften (i) bis (iii) erfüllt, ein Vertretersystem der unipotenten Konjugiertenklassen von $G^F = CSp_{2n}(q)$.*

Beweis. Nach Abschnitt 4.1 liegen die Matrizen $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ in G^F. Es bleibt also noch zu zeigen, daß die Matrizen paarweise nicht zueinander konjugiert sind. Betrachte also die Matrizen $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ und $\mathcal{C}_{\alpha',\beta',\gamma'}(\delta)$, wobei α,β,γ bzw. α',β',γ' die Bedingungen (i)-(iii) erfüllen sollen. Diese Matrizen haben genau dann dieselben Elementarteiler, wenn

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(1) = \mathcal{C}_{\alpha',\beta',\gamma'}(1) =: \mathcal{C}_0,$$

also genügt es, diesen Fall zu betrachten. Es seien

$$(x-1)^{i_1},\ldots,(x-1)^{i_t},(x-1)^{j_1},\ldots,(x-1)^{j_h}$$

mit ungeraden i_l und geraden j_l die verschiedenen Elementarteiler der beiden Matrizen, und r_{i_l} bzw. r_{j_l} seien die Vielfachheiten der Elementarteilers $(x-1)^{i_l}$ bzw. $(x-1)^{j_l}$. Außerdem seien die i_l und j_l der Größe nach geordnet. In der Gruppe G sind die Matrizen $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ und $\mathcal{C}_{\alpha',\beta',\gamma'}(\delta)$ zu der Matrix $\mathcal{C}_0$ konjugiert. Es sei nämlich

$$\begin{aligned} g := \operatorname{diag}(& \overbrace{1,\ldots,1}^{\sum_{l=1}^t i_l\cdot\frac{r_{i_l}}{2}}, \overbrace{E_{\frac{j_h}{2}},\ldots,E_{\frac{j_h}{2}},\eta_h\cdot E_{\frac{j_h}{2}}}^{r_{j_h}},\ldots,\overbrace{E_{\frac{j_1}{2}},\ldots,E_{\frac{j_1}{2}},\eta_1\cdot E_{\frac{j_1}{2}}}^{r_{j_1}}, \\ & \underbrace{\eta_1^{-1}\cdot E_{\frac{j_1}{2}},E_{\frac{j_1}{2}},\ldots,E_{\frac{j_1}{2}}}_{r_{j_1}},\ldots,\underbrace{\eta_h^{-1}\cdot E_{\frac{j_h}{2}},E_{\frac{j_h}{2}},\ldots,E_{\frac{j_h}{2}}}_{r_{j_h}}, \underbrace{1,\ldots,1}_{\sum_{l=1}^t i_l\cdot\frac{r_{i_l}}{2}}\ ) \end{aligned}$$

mit

$$\eta_l := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad j_l \text{ nicht in } \gamma \\ \sqrt{\delta} & \text{falls} \quad j_l \text{ in } \gamma \end{cases} .$$

Dabei soll $\sqrt{\delta}$ ein Element aus k bezeichnen, dessen Quadrat δ ist (beachte, daß $\sqrt{\delta}$ offenbar nicht aus $\mathrm{GF}(q)$ gewählt werden kann). Dann ist $g \in G$ und $g\cdot\mathcal{C}_0\cdot g^{-1} = \mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$. Nun gilt

$$\sqrt{\delta}\cdot(\sqrt{\delta}^{-1})^q = \delta^{\frac{q-1}{2}} = -1,$$

und folglich erhält man

$$\begin{aligned} g\cdot F(g^{-1}) = \operatorname{diag}(& \overbrace{1,\ldots,1}^{\sum_{l=1}^t i_l\cdot\frac{r_{i_l}}{2}}, \overbrace{E_{\frac{j_h}{2}},\ldots,E_{\frac{j_h}{2}},\sigma_h\cdot E_{\frac{j_h}{2}}}^{r_{j_h}},\ldots,\overbrace{E_{\frac{j_1}{2}},\ldots,E_{\frac{j_1}{2}},\sigma_1\cdot E_{\frac{j_1}{2}}}^{r_{j_1}}, \\ & \underbrace{\sigma_1\cdot E_{\frac{j_1}{2}},E_{\frac{j_1}{2}},\ldots,E_{\frac{j_1}{2}}}_{r_{j_1}},\ldots,\underbrace{\sigma_h\cdot E_{\frac{j_h}{2}},E_{\frac{j_h}{2}},\ldots,E_{\frac{j_h}{2}}}_{r_{j_h}}, \underbrace{1,\ldots,1}_{\sum_{l=1}^t i_l\cdot\frac{r_{i_l}}{2}}\ ) \end{aligned}$$

mit

$$\sigma_l := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad j_l \text{ nicht in } \gamma \\ -1 & \text{falls} \quad j_l \text{ in } \gamma \end{cases}$$

(beachte, daß σ_1 wegen der Bedingung (iii) immer 1 ist, falls es ein j_l mit ungeradem r_{j_l} gibt). Die Matrix $g \cdot F(g^{-1})$ liegt also in der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Untergruppe U von $C_G(\mathcal{C}_0)$, und die Determinanten der Hauptuntermatrizen, die zu den Untergruppen U_{j_l} von U gehören, haben die Werte σ_l.

Dieselben Überlegungen kann man für die Matrix $\mathcal{C}_{\alpha',\beta',\gamma'}(\delta)$ anstellen. Dann erhält man eine Matrix $g' \in G$ mit $g' \cdot \mathcal{C}_0 \cdot {g'}^{-1} = \mathcal{C}_{\alpha',\beta',\gamma'}(\delta)$ und $g' \cdot F({g'}^{-1}) \in U \leq C_G(\mathcal{C}_0)$. Analog zu oben haben die Determinanten der Hauptuntermatrizen von $g' \cdot F({g'}^{-1})$, die zu den Untergruppen U_{j_l} von U gehören, die Werte σ'_l mit

$$\sigma'_l := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad j_l \text{ nicht in } \gamma' \\ -1 & \text{falls} \quad j_l \text{ in } \gamma' \end{cases} .$$

Aus der in Abschnitt 4.2 hergeleiteten Bedingung folgt jetzt, daß die Matrizen $g \cdot F(g^{-1})$ und $g' \cdot F({g'}^{-1})$ genau dann in derselben Zusammenhangskomponente der Gruppe $C_G(\mathcal{C}_0)$ liegen, wenn $\gamma = \gamma'$. Das bedeutet, daß $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ und $\mathcal{C}_{\alpha',\beta',\gamma'}(\delta)$ genau dann zueinander konjugiert sind, wenn $\gamma = \gamma'$. Da die beiden Matrizen auch dieselben Elementarteiler besitzen, folgt daraus sofort $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$, also $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta) = \mathcal{C}_{\alpha',\beta',\gamma'}(\delta)$. ∎

4.4 Zum Beweis der Vermutung 3.4.1

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe von Theorem 4.3.2 noch die Vermutung 3.4.1 für den in Kapitel 3 betrachteten Fall (c) bewiesen werden.

Es sei also $G = G_n = CSp_{2n}(k)$ mit zugehörigem Frobenius-Morphismus $F = F_q$ und $C = C(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ eine kuspidale unipotente Konjugiertenklasse von G mit $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ wie in Lemma 3.2.4. Weiter sei C' eine Konjugiertenklasse von G^F mit $C' \subseteq C^F$ und $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ der Vertreter der Klasse C' aus Theorem 4.3.2.

Wegen Lemma 3.4.2 interessiert man sich dafür, in welchen Fällen die Klasse C' nichtleeren Schnitt mit gewissen Levi-Untergruppen von G hat. Es sei $i := \alpha_j \in \bar{\alpha}$, dann ist nach Lemma 3.2.4 das i gerade, und die Matrix $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ besitzt die Form

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots\cdots\cdots & & 0 & * \\ & J'_{\frac{i}{2}} & \ddots & \iddots & K_{\frac{i}{2}} & 0 \\ & & J'_{\frac{i}{2}} \quad 0 & \delta' K_{\frac{i}{2}} & \iddots & \vdots \\ & & * & 0 & & \vdots \\ & & & J_{\frac{i}{2}} & \ddots & \vdots \\ & & & & J_{\frac{i}{2}} & 0 \\ & & & & & * \end{pmatrix},$$

wobei $\delta' = \delta$, falls i ein Bestandteil von γ ist, und $\delta' = 1$ sonst. Zunächst interessiert also die Frage, welche der beiden folgenden $2i \times 2i$-Matrizen

$$M_1 := \begin{pmatrix} J'_{\frac{i}{2}} & 0 & 0 & K_{\frac{i}{2}} \\ & J'_{\frac{i}{2}} & K_{\frac{i}{2}} & 0 \\ & & J_{\frac{i}{2}} & 0 \\ & & & J_{\frac{i}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 := \begin{pmatrix} J'_{\frac{i}{2}} & 0 & 0 & K_{\frac{i}{2}} \\ & J'_{\frac{i}{2}} & \delta K_{\frac{i}{2}} & 0 \\ & & J_{\frac{i}{2}} & 0 \\ & & & J_{\frac{i}{2}} \end{pmatrix}$$

in einer Konjugiertenklasse von $CSp_{2i}(q)$ liegt, die mit der Standard-Levi-Untergruppe $L' \cong \mathrm{GL}_i(q)$ von $CSp_{2i}(q)$ nicht-leeren Schnitt hat. Dazu muß man entscheiden, welche der beiden Matrizen in $CSp_{2i}(q)$ zu der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} \tilde{J}_i & 0 \\ 0 & \tilde{J}_i \end{pmatrix}$$

aus der Standard-Levi-Untergruppe L' von $CSp_{2i}(q)$ konjugiert ist. Für das folgende ist nur wichtig, daß wegen Theorem 4.3.2 genau eine der beiden Matrizen M_1 und M_2 zu M konjugiert ist.

Lemma 4.4.1 *Es sei L die Standard-Levi-Untergruppe von G mit $L \cong G_{n-i} \times \mathrm{GL}_i(k)$. Dann gilt $C' \mathrel{\hat{\in}} L$ genau dann, wenn die oben dargestellte Hauptuntermatrix von $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ zu der Matrix M in $CSp_{2i}(q)$ konjugiert ist.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, zeige also die andere Richtung. Es gelte o.B.d.A., daß M_1 und nicht M_2 zu M konjugiert ist. Es sei $C' \mathrel{\hat{\in}} L$, und die erwähnte Hauptuntermatrix von $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ sei M_2. Da $C' \mathrel{\hat{\in}} L$, gibt es eine Blockdiagonalmatrix M' in $CSp_{2n}(q)$, die zu $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ konjugiert ist und die Form

$$M' = \mathrm{diag}(\tilde{J}_i, \mathcal{C}_{\alpha',\beta',\gamma'}(\delta), \tilde{J}_i)$$

besitzt. Da aber die Hauptuntermatrix M von M' in $CSp_{2i}(q)$ zu der Matrix M_1 konjugiert ist, ist wiederum M' in $CSp_{2n}(q)$ zu einem Klassenvertreter $\mathcal{C}_{\alpha'',\beta'',\gamma''}(\delta)$ konjugiert, der eine Hauptuntermatrix der Form M_1 enthält. Also gilt

$$\mathcal{C}_{\alpha'',\beta'',\gamma''}(\delta) \neq \mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta),$$

was zum Widerspruch führt, da sowohl $\mathcal{C}_{\alpha'',\beta'',\gamma''}(\delta)$ als auch $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ in $CSp_{2n}(q)$ zu der Matrix M' konjugiert sind. ■

Aus Lemma 4.4.1 folgt offenbar sofort die Behauptung von Lemma 3.4.2 und damit der Beweis der Vermutung 3.4.1.

Leider entspricht die Parametrisierung des Vertretersystems aus Theorem 4.3.2 nicht in allen Fällen der Parametrisierung der unipotenten Klassen von $CSp_{2n}(q)$ aus Theorem 3.5.1, da die dort beschriebene Eigenschaft (2) nicht allgemein erfüllt ist.

Betrachtet man in Abschnitt 4.1 den Aufbau der Matrizen $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$, dann ist offenbar die entscheidende Frage, welche der beiden oben eingeführten $2i \times 2i$-Matrizen M_1 und M_2

zu der Matrix M aus der Standard-Levi-Untergruppe $L \cong \mathrm{GL}_i(q)$ von $CSp_{2i}(q)$ konjugiert ist. Vermutlich gilt

$$M \sim_{CSp_{2i}(q)} \begin{cases} M_1 & : \quad 4 \text{ teilt } q-1 \\ M_2 & : \quad 4 \text{ teilt nicht } q-1 \end{cases} .$$

Diese Bedingung kommt daher, daß es ein Element $a \in \mathrm{GF}(q)$ mit $a^2 = -1$ geben muß, falls $M \sim_{CSp_{2i}(q)} M_1$. Wird also $q-1$ von 4 geteilt, so besitzt die durch das Vertretersystem aus Theorem 4.3.2 gegebene Parametrisierung der unipotenten Klassen von $CSp_{2n}(q)$ die Eigenschaft aus Theorem 3.5.1 (2).

Es ist auffällig, daß hier eine ähnliche Bedingung eingeht, nämlich 4 teilt (nicht) $q-1$, wie sie Shoji in [22, §3] zur Charakterisierung der sogenannten *distinguished elements* angegeben hat. Vermutlich besteht ein Zusammenhang zwischen den hier eingeführten Matrizen und den *distinguished elemenets* von Shoji.

Andernfalls ist ein Vertreter der unipotenten Konjugiertenklasse vom Typ (α, β, γ) (bzgl. der Parametrisierung aus Theorem 3.5.1 (2)) durch die Matrix $\mathcal{C}_{\alpha',\beta',\gamma'}(\delta)$ gegeben, wobei die Partitionen $(\alpha', \beta', \gamma')$ durch (α, β, γ) wie folgt bestimmt sind: In der Partition α' liegen alle Teile von α, die entweder ungerade sind oder auch in β oder in γ vorkommen. Weiter sind alle Teile von β, die auch in γ liegen, Bestandteile von α'. Die Partition β' besteht aus allen Teilen von β, die nicht in γ liegen, und aus den geraden Teilen von α, die weder in β noch in γ liegen. Die Partition γ' besteht aus allen Teilen von γ, die nicht in β liegen, und aus den geraden Teilen von α, die weder in β noch in γ liegen.

Diese Sachverhalte sollen hier ohne genaueren Beweis angegeben werden, es muß im wesentlichen die Konstruktion der Partitionen α, β und γ im Beweis von Theorem 3.5.1 nachvollzogen werden.

4.5 Der Zentralisator von unipotenten Elementen orthogonaler Gruppen

Im folgenden werden wieder die am Anfang dieses Kapitels eingeführten Notationen verwendet. Zusätzlich werden einige weitere Schreibweisen für Matrizen benötigt.

Definiere für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in 2\,\mathbb{N}$ die folgenden $nm \times nm$-Matrizen:

$$K_{n,m} := \begin{pmatrix} -K_n & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -K_n & & & \\ & & & K_n & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & K_n \end{pmatrix},$$

$$J_{n,m} := \begin{pmatrix} J_n & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}, \qquad J'_{n,m} := \begin{pmatrix} J'_n & & \\ & \ddots & \\ & & J'_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist die $2nm \times 2nm$-Matrix

$$\begin{pmatrix} J'_{n,m} & K_{n,m} \\ 0 & J_{n,m} \end{pmatrix}$$

ein Element der Gruppe SO_{2nm} und besitzt die Elementarteiler

$$\underbrace{(x-1)^{2n}, \ldots, (x-1)^{2n}}_{m\text{-mal}}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sei die $n \times n$-Matrix M_n gegeben durch

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ \vdots & & \iddots & -1 \\ 1 & -1 & \iddots & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix},$$

$$\text{d.h.} \quad M_n = (m_{ij}) \quad \text{mit} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & : \; j = 1 \quad \text{und} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ -1 & : \; j > 1 \quad \text{und} \quad i + j \in \{n+1, n+2\} \\ 0 & : \; \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und $m \leq n-2$ seien die $m \times n$-Matrix $R_{m,n}$ und die $n \times m$-Matrix $S_{n,m}$ gegeben durch

$$R_{m,n} := \begin{pmatrix} 1 & & & -1 & & 1 \\ \vdots & & \iddots & & & \vdots \\ 1 & -1 & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_{n,m} := \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & -1 \\ & \iddots & \\ -1 & & \end{pmatrix},$$

$$\text{d.h.} \quad R_{m,n} = (r_{ij}) \quad \text{mit} \quad r_{ij} = \begin{cases} 1 & : \; j \in \{1, n\} \\ -1 & : \; i + j = m + 2 \\ 0 & : \; \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und} \quad S_{n,m} = (s_{ij}) \quad \text{mit} \quad s_{ij} = \begin{cases} -1 & : \; i + j = n + 1 \quad \text{oder} \quad i = j = 1 \\ 0 & : \; \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist für $n \geq 2$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} J'_n & M_n \\ 0 & J_n \end{pmatrix}$$

ein Element der Gruppe SO_{2n} und besitzt die Elementarteiler $(x-1)$ und $(x-1)^{2n-1}$. Ist nun $n \geq 3$ und $m \leq n-2$, dann ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} J'_m & 0 & R_{m,n} & M_m \\ 0 & J'_n & M_n & S_{n,m} \\ 0 & 0 & J_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_m \end{pmatrix}$$

ein Element der Gruppe $SO_{2(n+m)}$ und besitzt die beiden Elementarteiler $(x-1)^{2m+1}$ und $(x-1)^{2n-1}$. Zur Abkürzung der Schreibweise sei

$$A_{2n-1,2m+1} := \begin{pmatrix} J'_m & 0 \\ 0 & J'_n \end{pmatrix}, \quad B_{2n-1,2m+1} := \begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & J_m \end{pmatrix},$$

$$C_{2n-1,2m+1} := \begin{pmatrix} R_{m,n} & M_m \\ M_n & S_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Es sei nun $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{2h+1})$ eine Partition mit ungeraden und paarweise verschiedenen β_i, die so geordnet sind, daß $\beta_1 > \ldots > \beta_{2h}$. Dann sei

$$\mathcal{B}_\beta := \begin{pmatrix} A_{\beta_1,\beta_2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & C_{\beta_1,\beta_2} \\ & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 \\ & & A_{\beta_{2h-1},\beta_{2h}} & 0 & C_{\beta_{2h-1},\beta_{2h}} & \iddots & \vdots \\ & & & \tilde{J}_{\beta_{2h+1}} & 0 & & \vdots \\ & & & & B_{\beta_{2h-1},\beta_{2h}} & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & B_{\beta_1,\beta_2} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat nach den Bemerkungen oben die Elementateiler

$$(x-1)^{\beta_1}, \ldots, (x-1)^{\beta_{2h+1}}$$

und liegt in der Gruppe $SO_{|\beta|}$. Ist $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2d})$ eine weitere Partition mit ungeraden Teilen, die nach absteigender Größe angeordnet sind, dann sei für $\delta \in k^*$ die Matrix $\mathcal{B}_{\beta,\gamma}(\delta)$ gegeben durch

$$\mathcal{B}_{\beta,\gamma}(\delta) := \begin{pmatrix} A_{\gamma_1,\gamma_2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \delta C_{\gamma_1,\gamma_2} \\ & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 \\ & & A_{\gamma_{2h-1},\gamma_{2h}} & 0 & \delta C_{\gamma_{2h-1},\gamma_{2h}} & \iddots & \vdots \\ & & & \mathcal{B}_\beta & 0 & & \vdots \\ & & & & B_{\gamma_{2h-1},\gamma_{2h}} & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & B_{\gamma_1,\gamma_2} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix liegt in der Gruppe $SO_{|\beta|+|\gamma|}(k)$ und besitzt die Elementarteiler

$$(x-1)^{\beta_1}, \ldots, (x-1)^{\beta_{2h+1}}, (x-1)^{\gamma_1}, \ldots, (x-1)^{\gamma_{2d}}.$$

Ist α eine weitere Partition der Form

$$\alpha = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{r'}, \underbrace{2\alpha_1, \ldots, 2\alpha_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{2\alpha_r, \ldots, 2\alpha_r}_{n_r})$$

mit ungeraden α'_i, die nach absteigender Größe angeordnet sind und nach absteigender Größe angeordneten α_j, dann sei für $\delta \in k^*$ die quadratische Matrix $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ der Größe $2|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
\tilde{J}_{\alpha'_1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \iddots & \vdots \\
 & & \tilde{J}_{\alpha'_{r'}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \vdots \\
 & & & J'_{\alpha_1,n_1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & K_{\alpha_1,n_1} & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & J'_{\alpha_r,n_r} & 0 & K_{\alpha_r,n_r} & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & \mathcal{B}_{\beta,\gamma}(\delta) & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & J_{\alpha_r,n_r} & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & J_{\alpha_1,n_1} & 0 & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & \tilde{J}_{\alpha'_{r'}} & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & \tilde{J}_{\alpha'_1}
\end{array}\right)$$

Schreibt man α abweichend von der oben gewählten Darstellung als $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ und ist $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{2h+1})$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2d})$, dann hat die Matrix $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ offenbar die Elementarteiler

$$\begin{gathered}
(x-1)^{\alpha_1}, (x-1)^{\alpha_1}, \ldots, (x-1)^{\alpha_t}, (x-1)^{\alpha_t} \\
(x-1)^{\beta_1}, \ldots, (x-1)^{\beta_{2h+1}}, (x-1)^{\gamma_1}, \ldots, (x-1)^{\gamma_{2d}}
\end{gathered}$$

und liegt in $SO_{2|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}$. Es sei r_i die Anzahl der Elementarteiler, die gleich $(x-1)^i$ sind und $2|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 2n$.

Gewisse Matrizen vom Typ $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ sind die Kandidaten für ein Vertretersystem der unipotenten Konjugiertenklassen der Gruppe $SO_{2n+1}(q)$. Daher interessieren wir uns zunächst für den Zentralisator $H := C_{O_{2n+1}(k)}(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\phi}(1))$. Nach [2, IV, 2.23] ist H das semidirekte Produkt von $R_u(H)$ und einer Untergruppe U' von H. Nach [2, IV, 2.25] gilt außerdem

$$U' \cong \prod_{i \text{ gerade}} Sp_{r_i}(k) \times \prod_{i \text{ ungerade}} O_{r_i}(k),$$

wobei $O_{r_i}(k)$ eine orthogonale Matrizengruppe vom Grad r_i ist. Im folgenden soll angedeutet werden, wie die Untergruppe U' in dem Zentralisator vorkommt. Es ist leider nicht gelungen, diese Untergruppe in vollständiger Form anzugeben, die wesentlichen Merkmale sind aber anhand der folgenden Betrachtung schon erkennbar.

Es sei zunächst i gerade und $r := r_i > 0$, dann besitzt $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\phi}(1)$ die Form

$$\begin{pmatrix}
* & 0 & \multicolumn{5}{c}{\dotfill} & 0 & * \\
 & J'_{\frac{i}{2}} & 0 & \cdots & 0 & -K_{\frac{i}{2}} & \cdots & 0 & 0 \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & J'_{\frac{i}{2}} & \ddots & & \ddots & K_{\frac{i}{2}} & \vdots \\
 & & & & * & \ddots & & 0 & \vdots \\
 & & & & & J_{\frac{i}{2}} & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & 0 & \vdots \\
 & & & & & & & J_{\frac{i}{2}} & 0 \\
 & & & & & & & & *
\end{pmatrix}.$$

Es sei nun $(a_{j,k}) = A \in Sp_r(k)$. Weiter sei $(\tilde{a}_{j,k}) = \tilde{A} := (A^{-1})^{tr^*}$ und $A_{j,k} := a_{j,k} \cdot E_{i/2}$, bzw. $\tilde{A}_{j,k} := \tilde{a}_{j,k} \cdot E_{i/2}$. Dann liegt die Matrix

$$\begin{pmatrix}
E_* & & & & & & & & \\
 & A_{1,1} & \cdots & A_{1,r} & & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & A_{r,1} & \cdots & A_{r,r} & & & & & \\
 & & & & E_* & & & & \\
 & & & & & \tilde{A}_{1,1} & \cdots & \tilde{A}_{1,r} & \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & \tilde{A}_{r,1} & \cdots & \tilde{A}_{r,r} & \\
 & & & & & & & & E_*
\end{pmatrix}$$

in H. Die Matrizen von diesem Typ bilden also eine Untergruppe U_i von H, die isomorph zu $Sp_{r_i}(k)$ ist.

Es sei nun i ungerade und $r_i > 0$. Zunächst wird der Fall betrachtet, daß $r_i = 2r$ gerade ist, d.h. i soll kein Teil von β sein. Dann besitzt $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\phi}(1)$ nach Konstruktion die Form

$$\begin{pmatrix}
* & & & & & & & & \\
 & \tilde{J}_i & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & 0 & \cdots & \tilde{J}_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & \\
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde{J}_i & \cdots & 0 & \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{J}_i & \\
 & & & & & & & & *
\end{pmatrix}.$$

Es sei $(a_{j,k}) = A \in O_{2r}(k)$ und $A_{j,k} := a_{j,k} \cdot E_i$, dann liegt die Matrix

$$\begin{pmatrix} E_* & & & & & & & & \\ & A_{1,1} & \cdots & A_{1,r} & 0 & A_{1,r+1} & \cdots & A_{1,2r} & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & A_{r,1} & \cdots & A_{r,r} & 0 & A_{r,r+1} & \cdots & A_{r,2r} & \\ & 0 & \cdots & 0 & E_* & 0 & \cdots & 0 & \\ & A_{r+1,1} & \cdots & A_{r+1,r} & 0 & A_{r+1,r+1} & \cdots & A_{r+1,2r} & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & A_{2r,1} & \cdots & A_{2r,r} & 0 & A_{2r,r+1} & \cdots & A_{2r,2r} & \\ & & & & & & & & E_* \end{pmatrix}$$

in H. Die Matrizen von diesem Typ bilden also eine Untergruppe U_i von H, die isomorph zu $O_{r_i}(k)$ ist.

Es sei nun i ungerade und $r_i = 2r+1$ ungerade, d.h. i ist ein Teil von β. Es sei β' eine Umordnung von β, so daß $\beta' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_{2h+1})$ mit $\beta'_1 > \ldots > \beta'_{2h}$ und $\beta'_{2h+1} = i$. Dann ist $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\phi}(1)$ nach Lemma 3.2.1 zu $\mathcal{B}_{\alpha,\beta',\phi}(1)$ konjugiert, da die beiden Matrizen dieselben Elementarteiler besitzen. $\mathcal{B}_{\alpha,\beta',\phi}(1)$ hat nach Konstruktion die Form

$$\begin{pmatrix} * & & & & & & & & & & \\ & \tilde{J}_i & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & 0 & \cdots & \tilde{J}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde{J}_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{J}_i & \cdots & 0 & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{J}_i & \\ & & & & & & & & & & * \end{pmatrix}.$$

Es sei $(a_{j,k}) = A \in O_{2r+1}(k)$ und $A_{j,k} := a_{j,k} \cdot E_i$, dann liegt die Matrix

$$\begin{pmatrix} E_* & & & & & & & & & & \\ & A_{1,1} & \cdots & A_{1,r} & 0 & A_{1,r+1} & 0 & A_{1,r+2} & \cdots & A_{1,2r+1} & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & A_{r,1} & \cdots & A_{r,r} & 0 & A_{r,r+1} & 0 & A_{r,r+2} & \cdots & A_{r,2r+1} & \\ & 0 & \cdots & 0 & E_* & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & A_{r+1,1} & \cdots & A_{r+1,r} & 0 & A_{r+1,r+1} & 0 & A_{r+1,r+2} & \cdots & A_{r+1,2r+1} & \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & E_* & 0 & \cdots & 0 & \\ & A_{r+2,1} & \cdots & A_{r+2,r} & 0 & A_{r+2,r+1} & 0 & A_{r+2,r+2} & \cdots & A_{r+2,2r+1} & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & A_{2r+1,1} & \cdots & A_{2r+1,r} & 0 & A_{2r+1,r+1} & 0 & A_{2r+1,r+2} & \cdots & A_{2r+1,2r+1} & \\ & & & & & & & & & & E_* \end{pmatrix}$$

in $H' = C_{O_{2n+1}(k)}(\mathcal{B}_{\alpha,\beta',\phi}(1))$. Folglich liegen dazu konjugierte Matrizen in H und bilden eine Untergruppe U_i von H, die isomorph zu $O_{r_i}(k)$ ist.

Leider ist im Gegensatz zu dem in Abschnitt 4.1 betrachteten symplektischen Fall nicht klar, daß die beschriebenen Untergruppen U_i von H ein direktes Produkt in H bilden, diese Vermutung liegt aber nahe.

4.6 Ein Vertretersystem für die unipotenten Konjugiertenklassen der Gruppe $SO_{2n+1}(k)$

Es sei $k = \bar{k}$ der algebraische Abschluß des Körpers GF(p), G die affine algebraische Gruppe $SO_{2n+1}(k)$ und $F = F_q : G \to G$ der Frobenius-Morphismus, der jeden Matrixeintrag in die q-te Potenz hebt.

Nach Lemma 3.2.1 werden die unipotenten Klassen von G durch Paare von Partitionen (α, β) parametrisiert, für die gilt, daß $2|\alpha| + |\beta| = 2n+1$ und daß die Teile von β paarweise verschieden und ungerade sind. Ein unipotentes Element der Klasse vom Typ (α, β) besitzt in der natürlichen Matrixdarstellung vom Grad $2n + 1$ die Elementarteiler

$$(x-1)^{\alpha_1}, (x-1)^{\alpha_1}, \ldots, (x-1)^{\alpha_t}, (x-1)^{\alpha_t}, (x-1)^{\beta_1}, \ldots, (x-1)^{\beta_h}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ und $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_h)$.

Satz 4.6.1 *Die Matrizen der Form $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\phi}(1)$ aus Abschnitt 4.5 bilden ein Vertretersystem für die unipotenten Konjugiertenklassen der Gruppe G.*

Beweis. Nach Abschnitt 4.5 besitzt die Matrix $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\phi}(1)$ genau die Elementarteiler eines Elements der Klasse vom Typ (α, β) und liegt in G. ■

In der endlichen Gruppe $G^F = SO_{2n+1}(q)$ zerfallen diese Klassen wie in Kapitel 3 beschrieben. Nach Theorem 3.5.1 können die unipotenten Klassen von G^F durch Tripel von Partitionen (α, β, γ) parametrisiert werden, für die die folgenden drei Eigenschaften gelten müssen:

(i) $2|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 2n + 1$.

(ii) Die Teile der Partition β sind paarweise verschieden und ungerade. Dasselbe gilt für die Partition γ.

(iii) Die Partition γ besteht aus einer geraden Anzahl von Teilen, d.h. $|\gamma|$ ist gerade.

Vermutung 4.6.2 *Es sei δ ein Erzeuger der zyklischen Gruppe* GF$(q)^*$*, dann bilden die Matrizen der Form $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$, wobei das Tripel (α, β, γ) die Eigenschaften (i) bis (iii) erfüllt, ein Vertretersystem der unipotenten Konjugiertenklassen von $G^F = SO_{2n+1}(q)$.*

Um diese Vermutung zu verifizieren, müßte man zunächst genauere Informationen über den in Abschnitt 4.5 betrachteten Zentralisator erhalten. Um mit Hilfe dieses Vertretersystems dann die Vermutung 3.4.1 für den in Kapitel 3 betrachteten Fall (b) beweisen zu können, müßte man ähnlich wie in Abschnitt 4.3 zeigen, daß die Zugehörigkeit einer Konjugiertenklasse zu einer Standard-Levi-Untergruppe schon an bestimmten Hauptuntermatrizen des Vertreters aus Vermutung 4.6.2 abgelesen werden kann. Das ist hier im Gegensatz zum symplektischen Fall aus Abschnitt 4.3 wesentlich schwieriger, da es keine einfachen Hauptuntermatrizen von $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta)$ gibt, die zu genau einem Elementarteiler gehören, sondern verschiedene Elementarteiler in einer Hauptuntermatrix der Form

$$\begin{pmatrix} J'_m & 0 & R_{m,n} & M_m \\ 0 & J'_n & M_n & S_{n,m} \\ 0 & 0 & J_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_m \end{pmatrix}$$

„verschränkt“ sind.

Literaturverzeichnis

[1] M. Aschbacher, *Finite group theory.* Cambridge studies in advanced mathematics 10, Cambridge University Press (1986).

[2] A. Borel et al., *Seminar on algebraic groups and related finite groups.* Lecture Notes in Mathematics no. 131, Springer (1970).

[3] M. Broué, J. Michel, *Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini.* J. Reine Angew. Math. 395, 56-67 (1989).

[4] R. W. Carter, *Simple Groups of Lie Type.* John Wiley, London (1972).

[5] R. W. Carter, *Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters.* John Wiley, New York (1985).

[6] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Pure and Applied Mathematics, John Wiley, New York (1962).

[7] C. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of Representation Theory, Vol. II. With applications to finite groups and orders.* Pure and Applied Mathematics, John Wiley, New York (1987).

[8] F. Digne, J. Michel, *On Lusztig's parametrization of characters of finite groups of Lie type.* Astérisque 181-182, 113-156 (1990).

[9] F. Digne, J. Michel, *Representations of Finite Groups of Lie Type.* London Math. Soc. Student Texts 21, Cambridge University Press (1991).

[10] R. Dipper, J. Du, *Harish-Chandra vertices.* J. reine angew. Math. 437, 101-130 (1993).

[11] R. Dipper, P. Fleischmann, *Modular Harish-Chandra theory I.* Math. Z. 211, 49-71 (1992).

[12] P. Fong, B. Srinivasan, *Brauer Trees in Classical Groups.* Journal of Algebra 131, 179-225 (1990).

[13] M. Geck, *Basic sets of Brauer characters of finite groups of Lie type, III.* Manuscripta Math. 85, 195-216 (1994).

[14] M. Geck, G. Hiß, G. Malle, *Cuspidal unipotent Brauer characters.* J. Algebra 168, 182-220 (1994).

[15] M. Geck, G. Hiß, G. Malle, *Towards a classification of the irreducible representations in non-describing characteristic of a finite group of Lie type.* Erscheint in Math. Z.

[16] M. Geck, G. Malle, *Cuspidal unipotent classes and cuspidal Brauer characters.* Erscheint in J. London Math. Soc.

[17] G. Hiss, *Zerlegungszahlen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nichtdefinierender Charakteristik.* Habilitationsschrift, RWTH Aachen (1990).

[18] G. Hiss, *Harish-Chandra series of Brauer characters in a finite group with a split BN-pair.* J. London Math. Soc. 48, 219-228 (1993).

[19] R. B. Howlett, G. I. Lehrer, *On Harish-Chandra induction for modules of Levi subgroups.* J. Algebra 165, 172-183 (1994).

[20] G. James, A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 16, Addison-Wesley, London (1981).

[21] G. Lusztig, *Characters of reductive groups over a finite field.* Annals of Math. Studies 107, Princeton University Press (1984).

[22] T. Shoji, *On the Green polynomials of classical groups.* Invent. Math. 74, 239-267 (1983).

[23] N. Spaltenstein, *On the generalized Springer correspondence for exceptional groups.* Advanced Studies in Pure Math. 6, 317-338 (1985).

[24] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups.* Birkhäuser, Boston (1981).