

# Komplexe Analysis

Prof. Dr. Dirk Ferus

Sommersemester 2010



Version vom 13.07.2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Holomorphe Funktionen</b>	<b>7</b>
1.1 Die komplexen Zahlen . . . . .	7
1.2 Differenzierbarkeit . . . . .	8
1.3 Komplexe und reelle Differenzierbarkeit . . . . .	11
1.4 Konforme Abbildungen . . . . .	16
<b>2 Möbiustransformationen</b>	<b>18</b>
<b>3 Integration</b>	<b>27</b>
3.1 “One-dimensional” integrals . . . . .	27
3.2 “Two-dimensional” integrals . . . . .	29
3.3 The Cauchy theorem . . . . .	31
3.4 Generalizations. Homology. . . . .	32
<b>4 Cauchyscher Integralsatz</b>	<b>35</b>
4.1 Der Integralsatz . . . . .	35
4.2 Die Integralformel . . . . .	40
<b>5 Anwendungen des Integralsatzes</b>	<b>41</b>
<b>6 Die Poissonformel und das Dirichlet-Problem im Kreis</b>	<b>54</b>
<b>7 Singularitäten</b>	<b>59</b>
7.1 Typen isolierter Singularitäten, meromorphe Funktionen . . . . .	59
7.2 Laurentreihen. Funktionsverlauf bei isolierten Singularitäten . . . . .	61
<b>8 Analytische Fortsetzung</b>	<b>69</b>
8.1 Analytische Fortsetzung längs Kurven . . . . .	69
8.2 Homotopie . . . . .	74
8.3 Die riemannsche Fläche eines Funktionskeims . . . . .	80
<b>9 Umlaufzahl und Homologie</b>	<b>85</b>
<b>10 Residuensatz</b>	<b>92</b>
<b>11 Folgen holomorpher Funktionen</b>	<b>101</b>
11.1 Kompakte Konvergenz . . . . .	101
11.2 Unendliche Produkte . . . . .	105
<b>12 Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung</b>	<b>109</b>
12.1 Partialbruchzerlegung des Cotangens . . . . .	109
12.2 Produktdarstellung des Sinus . . . . .	112
12.3 Die Gammafunktion . . . . .	113
12.4 Satz von Mittag-Leffler . . . . .	116

12.5 Weierstraßscher Produktsatz . . . . .	118
<b>13 Riemannscher Abbildungssatz</b>	<b>120</b>
<b>14 Elliptische Funktionen</b>	<b>123</b>
14.1 Periodische Funktionen und Periodengitter . . . . .	123
14.2 Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion . . . . .	127
14.3 Der Körper der elliptischen Funktionen . . . . .	132
14.4 $\wp$ -Funktion und elliptische Integrale . . . . .	134
14.5 $\wp$ -Funktion und Abbildungssatz . . . . .	135
14.6 Die Module elliptischer Funktionen . . . . .	136

## Literatur

Ganz kurz, ganz toll:

**K. Jänich:** Funktionentheorie, Springer-Lehrbuch, 3. Aufl. 1993

Klassiker:

**L. Ahlfors:** Complex Analysis, McGraw-Hill 1953

**H. Behnke/F. Sommer:** Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Studienausgabe vom Nachdruck der 3. Auflage, Springer 1976

**E. Freitag/R. Busam:** Funktionentheorie 1, 4. Auflage, Springer 2006

**J. B. Conway:** Functions of One Complex Variable, 2. Auflage, Springer Graduate Text 2002 (Insbesondere zum Thema *Analytische Fortsetzung*)

Viele schöne Erklärungen:

**T. Needham:** Visual Complex Analysis, Clarendon Press, Oxford 1997

Skripten

**A. Bobenko:** Skriptum Komplexe Analysis SS 2005, über die Homepage von A. Bobenko

**D. Ferus:** Skripten zur Analysis und zur Topologie über meine Homepage  
<http://www.math.tu-berlin.de/~ferus/>

Spezielle Themen

**R. Remmert:** Funktionentheorie II, Springer zum Riemannschen Abbildungssatz

**S. Kobayashi:** Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, 1970 und

**H. Grauert, H. Reckziegel:** Math. Z. 89 (1965), 108-125 zum Satz von Picard

Zur Geschichte der Komplexen Analysis

**F. Klein:** Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Reprint, Springer 1979

**Dieter Gaier:** Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland von 1890 bis 1950, in: Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV Aus der Reihe: Dokumente zur Geschichte der Mathematik.

## Vorbemerkung zur Version SS 2010

Nachdem im SS 2008 diese Vorlesung als "Ferus letzte Vorlesung" angeboten war, liefere ich in diesem Semester auf Bitten meiner Kollegen aus der Geometrie noch ein op. posth.

Im Rahmen der Berlin Mathematical School findet die Vorlesung auf Englisch statt, was mir Spaß macht, für dieses Skriptum aber chaotische Folgen hat. Ich korrigiere offensichtliche Schwachstellen, die es auch nach zwei Durchläufen mit durchaus sehr kritischen Lesern immer noch gibt, und ersetze insbesondere das ehemals wenig gelungene Kapitel über den Zusammenhang zwischen den Sätzen von Cauchy und Stokes durch eine hoffentlich verständlichere Version - auf Englisch.

Dirk Ferus



# 1 Holomorphe Funktionen

- Zwei Minuten Erinnerung an die komplexen Zahlen
- Komplexe Differentiation (Definition "wie in der Schule")
- Elementare Beispiele, Potenzreihen sind komplex differenzierbar
- Zusammenhang zwischen komplexer und reeller Differenzierbarkeit
- Holomorphe Funktionen als Abbildungen: Konformität

## 1.1 Die komplexen Zahlen

Die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  sei der  $\mathbb{R}^2$  mit der üblichen  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur und der Multiplikation

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Damit wird  $\mathbb{C}$  bekanntlich zu einem Körper, der  $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  als einen zu  $\mathbb{R}$  isomorphen Unterkörper enthält. Wir schreiben für reelles  $x$  statt  $(x, 0)$  einfach  $x$ . Weiter bezeichnen wir wie üblich die imaginäre Einheit mit

$$i := (0, 1)$$

und erhalten

$$(x, y) = x + iy \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Die Projektionen von  $\mathbb{R}^2$  auf die beiden Faktoren heißen *Realteil* und den *Imaginärteil*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} : (x, y) &\mapsto x, & \operatorname{Im} : (x, y) &\mapsto y \\ z &= \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z & \text{für } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Die Euklidische Norm  $\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}$  definiert eine *Topologie* auf  $\mathbb{C}$  und damit Begriffe wie *Umgebung*, *Konvergenz* oder *Stetigkeit*. Wir schreiben  $|\cdot|$  statt  $\|\cdot\|$ :

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Jeder Vektor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  der Länge 1 hat eine Darstellung

$$(x, y) = (\cos \phi, \sin \phi)$$

mit einer Zahl  $\phi \in \mathbb{R}$ , die bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  eindeutig bestimmt ist. Daher besitzt jede Zahl  $z \in \mathbb{C}$  eine Darstellung

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Die Zahl  $\phi \in \mathbb{R}$  heißt das *Argument* von  $z$ . Das Argument ist aber für  $z \neq 0$  nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  eindeutig – und für  $z = 0$  nach Geschmack beliebig oder nicht definiert.

Nach der Formel von Euler gilt für die komplexe Exponentialfunktion  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ , also hat man eine Darstellung

$$z = |z|e^{i\phi}.$$

Wichtig ist noch die  $\mathbb{R}$ -lineare Konjugation

$$x + iy \mapsto \overline{x + iy} := x - iy.$$

Mit ihr gilt

$$|z|^2 = z\bar{z} \text{ für } z \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

## 1.2 Differenzierbarkeit

**Definition 1.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung und  $z_0 \in G$ . Dann heißt  $f$  in  $z_0$  (*komplex*) differenzierbar, wenn

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.  $f'(z_0)$  heißt dann die *Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .

Ist  $f$  in jedem Punkt von  $G$  differenzierbar, so heißt  $f$  *holomorph* oder (*komplex-*)*analytisch*.

Viele Rechenregeln für die Differentiation sehen im Komplexen genauso aus, wie im Reellen, und die Beweise sind wörtlich dieselben. Das betrifft insbesondere die Differentiation von Summen und Produkten sowie die Kettenregel. Deshalb sind zum Beispiel **Polynome**

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

differenzierbar mit der offensichtlichen Ableitung. Ebenso sind **rationale Funktionen**, also Quotienten von Polynomen auf dem Komplement der Nullstellen des Nenners holomorphe Funktionen, deren Ableitung man mit der Quotientenregel berechnen kann. Die holomorphen Funktionen auf einer festen offenen Menge  $G$  bilden einen Ring.

Allerdings gibt es für die komplexen Zahlen keine Anordnung, und auch der Mittelwertsatz gilt nicht. Man kann nur *Beträge* abschätzen. Manchmal muss man deshalb andere Beweise suchen, wie der Vergleich des folgenden Satzes mit dem Satz 268 aus meinem Skriptum *Analysis I* zeigt.

**Satz 2 (Potenzreihen).** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $0 < R \leq \infty$  und  $f : \{z \mid |z - z_0| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$  die dadurch definierte Funktion. Dann gilt

(i) Die Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$  hat denselben Konvergenzradius  $R$  und definiert deshalb eine Funktion  $g : \{z \mid |z - z_0| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ .

(ii) Die Funktion  $f$  ist holomorph mit Ableitung  $g$ .

Kurz: Auch komplexe Potenzreihen darf man gliedweise differenzieren.

*Beweis.* Zu (i). Das geht genauso wie im Reellen.

Zu (ii). Überlegen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass man sich auf den Fall  $z_0 = 0$  beschränken kann. Das macht das folgende Argument übersichtlicher. Sei also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Wir wollen zeigen: Ist  $z_1 \in \mathbb{C}$  mit  $|z_1| < R$ , so gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - g(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - k z_1^{k-1} \right) = 0. \quad (1)$$

Wir wählen dazu ein  $r$  mit  $|z_1| < r < R$ . Dann gilt für  $|z| < r$  (und nur solche  $z$  müssen wir für unseren Beweis berücksichtigen)

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} \right| &= |z^{k-1} + z^{k-2} z_1 + \dots + z z_1^{k-2} + z_1^{k-1}| \\ &\leq |z^{k-1}| + |z^{k-2} z_1| + \dots + |z z_1^{k-2}| + |z_1^{k-1}| \leq k r^{k-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Die Reihe  $\sum_k k|a_k|r^{k-1}$  ist konvergent, daher gibt es zu gegebenem  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1} < \frac{\epsilon}{3}. \quad (3)$$

Nun gilt für  $|z| < r$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^N \left| a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \left| \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k||z_1|^{k-1}. \\ & \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{k=0}^N \left| a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1}. \\ & \leq \sum_{k=0}^N \left| a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| + 2\frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist eine endliche Summe, deren Terme wegen der Ableitungsformel für  $z^k$  gegen Null gehen, wenn  $z \rightarrow z_1$ . Insgesamt gibt es also ein  $\delta > 0$  (mit  $\delta < r - |z_1|$ ), so dass

$$|z - z_1| < \delta \quad \implies \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| < \epsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung (1). □

**Korollar 3 (Identitätssatz für Potenzreihen).** *Ist  $f$  durch eine konvergente Potenzreihe gegeben:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

so gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Insbesondere haben zwei Potenzreihen um  $z_0$  dieselben Koeffizienten, wenn sie auf einer Umgebung von  $z_0$  dieselbe Funktion bestimmen.

*Beweis.* Durch wiederholte Anwendung des letzten Satzes ergibt sich

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(z-z_0)^{k-m}$$

und

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1a_m. \quad \square$$

**Beispiel 4.** Hier sind bekannte auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktionen:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, & \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cosh z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos(iz), & \sinh z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -i \sin(iz). \end{aligned}$$

□

**Definition 5 (Ganze Funktionen).** Eine auf ganz  $\mathbb{C}$  definierte und holomorphe Funktion nennt man eine *ganze Funktion*.

**Beispiel 6 (Eine Warnung).** Nicht alle Sachverhalte lassen sich ins Komplexe übertragen: Der Abelsche Grenzwertsatz besagt, dass eine reelle Potenzreihe, die in einem Randpunkt des Konvergenzintervalls noch konvergiert, eine auch dort noch stetige Funktion definiert. Die offensichtliche Verallgemeinerung auf komplexe Potenzreihen ist falsch, vgl. Skriptum *Analysis I, Anhang 2*.

□

### 1.3 Komplexe und reelle Differenzierbarkeit

Die Definition der komplexen Ableitung kann man (so wie die der reellen) auch so interpretieren:  $f$  ist differenzierbar in  $z_0$ , wenn es sich bei  $z_0$  gut linear approximieren lässt, d.h. wenn es eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, so dass

$$f(z) = f(z_0) + F(z - z_0) + \alpha(z) \text{ mit } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha(z)}{z - z_0} = 0.$$

Aber eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung von  $\mathbb{C}$  in sich ist einfach die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, eben  $f'(z_0)$ . Betrachtet man  $f$  nun als Abbildung vom  $\mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^2$ , so ist die Definition der reellen Differenzierbarkeit in  $z_0$  genau dieselbe mit dem kleinen Unterschied, dass  $F$  nur  $\mathbb{R}$ -linear sein muss, nicht  $\mathbb{C}$ -linear – was ja eine stärkere Forderung ist. Jede komplex differenzierbare Funktion ist also auch differenzierbar als Abbildung des  $\mathbb{R}^2$  in sich.

Wie hängen  $\mathbb{R}$ -Linearität und  $\mathbb{C}$ -Linearität zusammen? Sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Aus der  $\mathbb{R}$ -Linearität folgt, dass  $F$  als Abbildung von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  genau dann  $\mathbb{C}$ -linear ist, wenn

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F(i) = iF(1) = iF \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ist. Dann ist

$$F(x + iy) = xF(1) + iyF(1) = F(1)(x + iy),$$

$F$  wirkt also einfach durch Multiplikation mit der komplexen Zahl  $F(1)$ .

Ist  $F$  gegeben durch eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , so bedeutet die  $\mathbb{C}$ -Linearität

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix},$$

die Matrix von  $F$  ist also von der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Wir zerlegen nun eine Abbildung  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  in Real- und Imaginärteil, d.h. wir schreiben

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

für  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und reellwertige Funktionen  $u$  und  $v$ . Die Funktionalmatrix von  $f$  ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir

**Satz 7 (Reelle und komplexe Differenzierbarkeit).**  $f$  ist in  $z_0 \in G$  genau dann komplex differenzierbar, wenn es reell differenzierbar ist und eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen gilt

(i) Das Differential  $d_{z_0}f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist komplex linear.

(ii) Es gelten in  $z_0$  die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

In diesem Fall ist

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Aus (i) dieses Satzes ergeben sich die Rechenregeln für die Differentiation komplexer Funktionen aus denen für Abbildungen des  $\mathbb{R}^2$ , die in der Analysis II bewiesen wurden.

**Beispiel 8.** Die Funktion  $f(z) := \bar{z}$  ist reell gegeben durch  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ . Die Funktionalmatrix ist  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , also sind die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen nirgends erfüllt und  $f$  ist nicht holomorph.

Die Funktion  $g(z) := \bar{z}^2$  ist reell gegeben durch  $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$ . Die Funktionalmatrix ist  $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$ , also sind die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen nur für  $z = 0$  erfüllt. Nur in diesem Punkt ist  $g$  komplex differenzierbar, es ist nicht holomorph.

□

Eine reelle Funktion auf einem Intervall mit überall verschwindender Ableitung ist konstant. Das ist eine Folge aus dem Mittelwertsatz, der im Komplexen nicht gilt. Andererseits gibt es eine Verallgemeinerung des Konstanzkriteriums auf Funktionen mehrerer Variablen: Eine differenzierbare Funktion mit überall verschwindendem Differential auf einer offenen und *zusammenhängenden* Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist konstant. Weil aus der komplexen aber die reelle Differenzierbarkeit folgt, gilt

**Satz 9.** Ist  $f$  holomorph auf der offenen und zusammenhängenden Menge  $G \subset \mathbb{C}$  mit überall verschwindender Ableitung  $f'$ , so ist  $f$  konstant.

Offene und zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{C}$  kommen in der komplexen Analysis ständig vor und verdienen deshalb einen abkürzenden Namen. Man nennt sie *Gebiete*. Wir werden der Einfachheit halber oft voraussetzen, dass die betrachteten Funktionen *holomorph auf einem Gebiet  $G$*  sind, auch wenn der Zusammenhang in der konkreten Situation vielleicht keine Rolle spielt.

**Korollar 10.** Ist  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf dem Gebiet  $G$  und reellwertig, so ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Wenn  $f = u + iv$  reellwertig ist, ist der Imaginärteil  $v = 0$  und nach den Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen sind die partiellen Ableitungen von  $u$  ebenfalls 0. Also ist  $f$  konstant. □

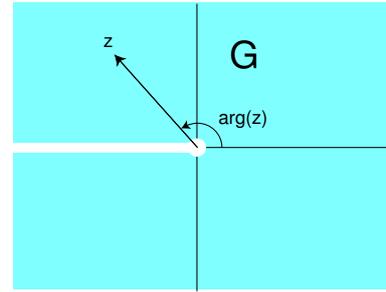
**Definition 11 (Argumentfunktion).** Im Komplement der abgeschlossenen negativen reellen Halbachse, also in

$$G := \{z = re^{i\phi} \mid r > 0, -\pi < \phi < \pi\} \quad (4)$$

definiert  $\arg(re^{i\phi}) := \phi$  eine wohlbestimmte differenzierbare Funktion

$$\arg : G \rightarrow ]-\pi, +\pi[,$$

die wir *Argumentfunktion* nennen wollen. Natürlich ist  $\arg$  keine analytische Funktion, vgl. das vorstehende Korollar.



Beachten Sie: Ohne Einschränkung auf den Bereich  $G$  ist das Argument einer komplexen Zahl nur bis auf ein Vielfaches von  $2\pi$  bestimmt. Legt man sich willkürlich etwa auf den Bereich  $]-\pi, +\pi]$  fest, so erhält man eine auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  definierte Funktion, die aber auf der negativen reellen Achse unstetig ist. Deshalb schränken wir uns auf das ‘‘Schlitzgebiet’’  $G$  ein.

Die Beschreibung dieser Funktionen durch Arcus-Funktionen auf dem gesamten Definitionsbereich ist nicht so ganz einfach. Zum Beispiel ist

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0, \\ + \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y > 0, \\ - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y < 0, \end{cases}$$

Daraus folgt, dass  $\arg$  stetige partielle Ableitungen hat, nämlich

$$\frac{\partial \arg}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \arg}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (5)$$

insbesondere also reell differenzierbar ist.

Ist  $z = |z|e^{i\phi}$  in dem Schlitzgebiet  $G$  und  $-\pi < \phi < \pi$ , so folgt durch ‘‘Logarithmieren’’:

$$\log z = \log |z| + i\phi, \quad z \in G$$

wobei  $\log |z|$  den natürlichen Logarithmus bezeichnen soll. Für positives reelles  $z$  ist  $\phi = 0$ ,  $\log |z| = \log z$  und diese Gleichung folgt aus der Analysis I. Für komplexes  $z$  ist der Logarithmus aber bisher gar nicht erklärt, so dass ‘‘Logarithmieren’’ bisher sinnlos ist. Aber wir benutzen diese heuristische Überlegung zur Motivation für folgende

**Definition 12 (Komplexer Logarithmus).** Für  $z$  im Schlitzgebiet (4) definieren wir mit dem (reellen) natürlichen Logarithmus  $\ln$  den (*komplexen Hauptwert*)*logarithmus* durch

$$\log(z) := \ln |z| + i \arg(z). \quad (6)$$

Das ist also eine Funktion  $\log : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Beispiel 13.** Die Logarithmusfunktion ist holomorph. Sie ist nämlich reell stetig differenzierbar und wir prüfen die Cauchy-Riemannschen Gleichungen für  $u(x, y) = \ln r, v(x, y) = \arg$ , wobei  $r(z) := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Mit (5) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{r^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Daher ist  $\log z$  eine holomorphe Funktion auf  $G$  mit Ableitung

$$\log'(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

Es gilt

$$e^{\log(z)} = e^{\log|z|} e^{i \arg(z)} = |z| e^{i \arg(z)} = z.$$

□

**Harmonische Funktionen.** Wenn wir annehmen, dass die holomorphe Funktion  $f = u + iv$  reell sogar zweimal differenzierbar ist<sup>1</sup>, so folgt aus den Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen nach dem Satz von Schwarz

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}{\partial x} + \frac{\partial(-\frac{\partial v}{\partial x})}{\partial y} = 0$$

und ebenso  $\Delta v = 0$ . Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind also sogenannte *harmonische Funktionen*, zweimal differenzierbare Funktionen, deren Laplacesche verschwindet.

Ist  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Funktion, so kann man umgekehrt fragen, ob es eine Funktion  $v : G \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, für die

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{7}$$

ist. In diesem Fall wäre  $f := u + iv$  holomorph. In der Analysis lernt man, dass die notwendige Bedingung, nämlich

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

die bei harmonischem  $u$  ja erfüllt ist, auf zum  $\mathbb{R}^2$  diffeomorphen Gebieten (insbesondere also lokal) auch hinreichend ist (Poincarésches Lemma). Zum Beispiel dann, wenn  $G$  eine offene Kreisscheibe oder das Schlitzgebiet aus vorstehendem Beispiel ist. Auf solchem  $G$  ist jede harmonische Funktion der Realteil einer holomorphen Funktion.

**Beispiel 14.** Die Funktion  $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  ist auf  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  harmonisch, wie man direkt nachrechnen kann. Also gibt es auf dem Schlitzgebiet eine harmonische Funktion  $v$ , so dass  $f = u + iv$  holomorph ist.  $v$  ist durch (7) charakterisiert, also durch

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Das legt  $v$  natürlich nur bis auf eine additive Konstante fest. Wählen wir diese so, dass  $v(1, 0) = 0$ , so erhalten wir  $v = \arg$ .

□

Harmonische Funktionen sind wegen  $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$  gerade die Potentiale von Divergenz- oder quellfreien Vektorfeldern und spielen daher in der Potentialtheorie eine wichtige Rolle. Die Funktionentheorie ist deshalb ein wichtiges Hilfsmittel der zweidimensionalen Potentialtheorie.

<sup>1</sup> Wir werden später sehen, dass das immer der Fall ist!

Wir vermerken noch:

**Satz 15.** *Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $h : f(G) \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch, so ist  $h \circ f$  ebenfalls harmonisch: Harmonische Funktionen von holomorphen Funktionen sind harmonisch.*

*Beweis.* Auf einer offenen Umgebung von  $f(z_0)$  ist  $h$  der Realteil einer holomorphen Funktion  $H$  und nach der Kettenregel ist  $H \circ f$  holomorph auf einer Umgebung von  $z_0$ . Also ist  $h \circ f$  als Realteil einer holomorphen Funktion auf einer Umgebung von  $z_0$  harmonisch.  $\square$

## 1.4 Konforme Abbildungen

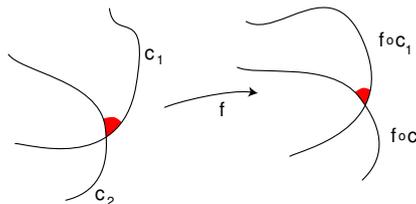
Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und sei  $c : [a, b] \rightarrow G$  eine differenzierbare Kurve. Dann ist  $f \circ c$  die Bildkurve unter  $f$ , und für den Tangentialvektor an diese gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = f'(c(t))\dot{c}(t).$$

Ist  $f'(c(t)) = re^{i\phi} \neq 0$ , so wird der Tangentialvektor von  $c$  durch  $f$  also um den Faktor  $r$  gestreckt und um den Winkel  $\phi$  gedreht. Die Tangentialvektoren zweier Kurven  $c_1, c_2$ , die sich in einem Punkt

$$c_1(t_1) = c_2(t_2)$$

schneiden, werden unter  $f$  um denselben Winkel  $\phi$  gedreht: Der Schnittwinkel  $\angle(\dot{c}_1(t_1), \dot{c}_2(t_2))$  der Kurven bleibt unter  $f$  erhalten. Man nennt diese Eigenschaft *Konformität*.



**Satz 16.** *Holomorphe Abbildungen ohne Nullstellen der Ableitung sind konforme Abbildungen.*

**Beispiel 17.** Die holomorphe Abbildung  $f(z) = z^2$  bildet die Gerade  $c : t \mapsto te^{i\phi}$  durch den Nullpunkt in die Gerade  $f \circ c : t \mapsto t^2e^{2i\phi}$  ab, der Schnittwinkel der Geraden mit der reellen Achse verdoppelt sich also. Warum ist das kein Widerspruch zum Satz?

□

Die vorstehende Satz gestattet eine Umkehrung. Ist  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine winkeltreue  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, so ist insbesondere für alle  $z \in \mathbb{R}^2$

$$\langle F(z), F(iz) \rangle = 0$$

und deshalb

$$\langle F(1), F(i) \rangle = 0 \text{ und } \langle F(1+i), F(-1+i) \rangle = 0.$$

Daraus folgt weiter

$$0 = -\langle F(1), F(1) \rangle + \langle F(i), F(i) \rangle = |F(i)|^2 - |F(1)|^2,$$

so dass also  $F(1)$  und  $F(i)$  von gleicher Länge sind und senkrecht aufeinander stehen. Deshalb ist  $F(i) = \pm iF(1)$ . Das Vorzeichen wird bestimmt durch das Orientierungsverhalten von  $F$ , denn

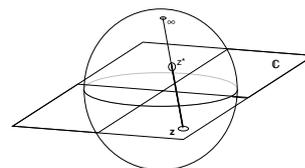
$$\det(F(1), F(i)) = \det(F(1), \pm iF(1)) = \pm \underbrace{\det(F(1), iF(1))}_{>0}.$$

Ist  $F$  also auch noch orientierungstreu, so ist  $F$  komplex linear. Damit folgt:

**Satz 18.** *Eine reell differenzierbare Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eines Gebiets  $G \subset \mathbb{C}$  mit überall winkel- und orientierungstreuer Ableitung ist holomorph.*

Daher hängt die Theorie konformer Abbildungen von  $\mathbb{C}$  in sich eng mit der komplexen Analysis zusammen.

Konforme Abbildungen sind besonders interessant. Zum Beispiel kann man zeigen, dass es keine längentreue Abbildung der Kugelfläche in die Ebene gibt, was offenbar ein angeborenes Handycap der Kartographie darstellt. Aber es gibt immerhin noch konforme Abbildungen, zum Beispiel die stereographische Projektion.



Eine intensiv studierte Frage ist deshalb die, welche Gebiete der Ebene sich auf welche konform (und bijektiv) abbilden lassen. Wir lernen dazu später den Riemanschen Abbildungssatz kennen.

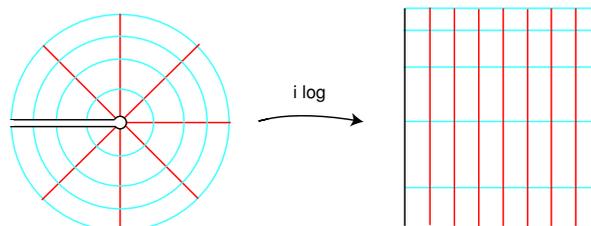
**Bemerkung: Die Riemannsche Zahlenkugel.** Die oben skizzierte Abbildung

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1-\zeta}(\xi + i\eta)$$

kann man benutzen, um die komplexe Ebene mit der im “Nordpol” punktierten Einheitskugel  $\Sigma$  zu identifizieren. Mit dieser Identifikation kann man Abbildungen in die komplexe Ebene auch deuten als Abbildungen in die Sphäre, und dadurch zum Beispiel der Aussage  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  eine anschauliche Bedeutung gegeben: In der Sphäre ist der Grenzwert eben der “Nordpol”. Die volle Sphäre entspricht dann also der um einen Punkt  $\infty$  ergänzten komplexen Ebene  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Das eine wie das andere bezeichnet man dann auch als die *Riemannsche Zahlenkugel*. Diese Erweiterung der komplexen Ebene ist ein in der komplexen Analysis häufig verwendetes Modell, wie Sie im nächsten Abschnitt schon sehen werden.

Neben der Anschaulichkeit des Kugelmodells ist ein weiterer Vorteil gegenüber der einfach mengentheoretisch gebildeten Vereinigung  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , dass man auf der erweiterten Ebene nicht erst eine Topologie erklären muss: Die ist auf der Sphäre seit *Analysis II* bereits vorhanden.

Die stereographische Projektion bildet das Netz der Längen- und Breitenkreise auf der Sphäre (= Erdoberfläche) winkeltreu ab auf das ebene Netz der Strahlen aus dem Ursprung und der Kreise um den Ursprung. Schlitzt man die Ebene längs der negativen reellen Achse auf und wendet darauf den komplexen Logarithmus oder besser die Abbildung  $z \mapsto i \log(z)$  an, so wird das Netz wiederum winkeltreu(!) abgebildet auf ein Netz orthogonaler Geraden.



Die Komposition der stereographischen Projektion mit  $i \log$  ist der für Seekarten verwendete Mercator<sup>2</sup>-Entwurf der Kartographie. (Konstante Kompass-Weisung = Gerade auf der Karte = Loxodrome).

<sup>2</sup> Nach dem Kartographen Gerhard Mercator (1512-1594), nicht zu verwechseln mit dem Entdecker der  $\ln(1+x)$ -Reihe Nikolaus Mercator (1620-1687).

## 2 Möbiustransformationen

- Eine Klasse einfacher, aber interessanter Funktionen=Abbildungen
- Die Riemannsche Zahlenkugel
- Möbiustransformationen sind kreistreu
- Die 6-Punkteformel
- Das Doppelverhältnis als Möbiusinvariante

Wenn man komplexe Funktionen geometrisch als Abbildungen der komplexen Ebene in sich untersucht, bilden die holomorphen Funktionen der Gestalt

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , die sogenannten gebrochen-linearen Abbildungen, eine interessante Klasse. Diese Funktionen sind einerseits so einfach, dass man sie gut “verstehen” kann, andererseits gibt es aber genug von ihnen, um interessante Dinge damit zu machen.

Falls  $ad = bc$  und  $d \neq 0$ , ist

$$f(z) = \frac{adz + bd}{d(cz + d)} = \frac{bcz + bd}{d(cz + d)} = \frac{b}{d},$$

also  $f$  konstant. Das gilt auch, wenn  $ad = bc$  und  $c \neq 0$ , also immer, wenn  $ad = bc$  und der Nenner nicht 0 ist. Wir schließen diesen Fall aus und definieren

**Definition 19 (Möbiustransformationen).** Eine *Möbiustransformation* der komplexen Ebene ist eine Funktion der Form

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0. \quad (8)$$

Beachten Sie, dass Multiplikation von  $a, b, c, d$  mit einem gemeinsamen Faktor  $\neq 0$  dieselbe Möbiustransformation liefert, so dass man sich auf den Fall  $ad - bc = 1$  beschränken kann (aber nicht muss). Die Möbiustransformationen hängen von 3 komplexen Parametern ab.

Unter “Transformationen” versteht man gemeinhin bijektive Abbildungen, und tatsächlich erhält man durch Auflösen von  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  nach  $z$  die Umkehrabbildung:

**Satz 20 (Umkehrtransformation).** Die Möbiustransformation (8) ist injektiv und die Umkehrabbildung ist

$$f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a},$$

also wieder eine Möbiustransformation.

Etwas unbefriedigend ist, dass (8) für  $cz + d = 0$ , also für  $z = -\frac{d}{c}$  nicht definiert ist. Hier erweist sich die am Ende des letzten Abschnitts erklärte Erweiterung der komplexen Ebene durch ein Punkt  $\infty$  zur Riemannschen Zahlenkugel

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

als hilfreich. Erweitert man die Möbiustransformation (8) zu einer (wieder mit  $f$  bezeichneten) Abbildung  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , indem man

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \quad f(\infty) := \frac{a + \frac{b}{\infty}}{c + \frac{d}{\infty}} := \frac{a}{c}$$

setzt, so wird das eine bijektive Abbildung von  $\hat{\mathbb{C}}$  in sich, und der letzte Satz liefert die Umkehrabbildung.

**Satz 21.** Die Möbiustransformationen bilden eine Untergruppe der Gruppe der Bijektionen von  $\hat{\mathbb{C}}$  auf sich.

*Beweis.* Dafür muss man nur noch zeigen, dass die Komposition von zwei Möbiustransformationen wieder eine solche ist. Ist

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

so findet man

$$f \circ g = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

Es ist klar, dass  $f \circ g$  nicht konstant ist. □

Der Beweis zeigt mehr als der Satz behauptet, nämlich dass

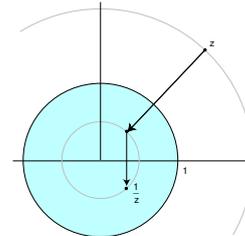
$$\Phi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

ein Homomorphismus der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ , der Gruppe der komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante 1, auf die Gruppe der Möbiustransformationen ist. Der Kern ist  $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Wir gehen darauf nicht näher ein, halten nur fest, dass man die Koeffizienten der Komposition zweier Möbiustransformationen einfach durch Matrizenmultiplikation finden kann.

**Beispiel 22 (Inversion).** Die Möbiustransformation  $f(z) = \frac{1}{z}$  (also  $a = d = 0, b = c = 1$ ) heißt die *Inversion am Einheitskreis*. Es ist

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} : z \mapsto \frac{z}{|z|^2} \mapsto \overline{\left( \frac{z}{|z|^2} \right)}$$

Erst wird also die Länge von  $z$  auf das Reziproke gestaucht bzw. gestreckt und danach das Ergebnis an der reellen Achse gespiegelt. Der Punkt  $\infty$  geht nach 0 und umgekehrt.



**Achtung.** In der Geometrie betrachtet man die *Spiegelung* (auch *Inversion*) an einem Kreis. Speziell für den Einheitskreis ist das die Abbildung  $z \mapsto \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$ , also der Vektor in Richtung  $z$  mit reziproker Länge – ohne die nachfolgende Spiegelung an der reellen Achse. Diese Abbildung ist geometrisch noch einfacher als die Abbildung  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , hat aber für die Analysis den Nachteil, nicht holomorph zu sein.

Für spätere Verwendung wollen wir eine besondere Eigenschaft der Inversion festhalten: Sie bildet Kreise in Kreise ab. Der Kreis um  $a$  vom Radius  $r$  erfüllt die Gleichung

$$r^2 = |z - a|^2 = (z - a)\overline{(z - a)} = z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}$$

Die Bildwerte  $w = \frac{1}{z}$  erfüllen dann  $r^2 = \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{\bar{a}}{w} - \frac{a}{\bar{w}} + a\bar{a}$  oder

$$r^2 - a\bar{a} = \frac{1 - \bar{a}\bar{w} - aw}{w\bar{w}}.$$

Wir nehmen zunächst an, dass der Kreis nicht durch 0 geht, d.h. dass  $r^2 - a\bar{a} \neq 0$  ist. Dann folgt

$$w\bar{w} - \bar{b}w - b\bar{w} + b\bar{b} = \frac{r^2}{(r^2 - a\bar{a})^2} \text{ mit } b = \frac{\bar{a}}{a\bar{a} - r^2},$$

und das ist wieder eine Kreisgleichung. Erfüllt  $w$  diese Gleichung, so erfüllt  $z = \frac{1}{w}$  die Ausgangsgleichung, so dass das Bild des Kreises wieder ein ganzer Kreis ist.

Was passiert, wenn  $r^2 = |a|^2 > 0$  ist. Dann erhält man

$$1 - \bar{a}\bar{w} - aw = 0$$

Die linke Seite ist reell, und wenn man die Gleichung mit  $a = \alpha + i\beta, w = x + iy$  reell ausschreibt, erhält man

$$2\alpha x - 2\beta y = 1.$$

Das ist eine Gerade, die nicht durch den Ursprung geht. Und jede solche Gerade kann man auf diese Weise erhalten, nämlich aus dem Kreis um  $a = \alpha + i\beta$  mit Radius  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Geraden durch den Ursprung werden bei der Inversion einfach an der reellen Achse gespiegelt, gehen also in wieder in Ursprungsgeraden über. Und weil die Inversion ihr eigenes Inverses ist, bildet sie umgekehrt alle Geraden in Geraden oder Kreise ab.

Es ist deshalb praktisch, auch Geraden als Kreise (durch  $\infty$ ) zu deklarieren, und nur dann stimmt die oben gemachte Behauptung, dass die Inversion Kreise in Kreise abbildet.

Unter der stereographischen Projektion entsprechen übrigens Geraden und Kreise gleichermaßen Kreisen auf der Kugelfläche: solchen die durch den Nordpol gehen, und solchen, die das nicht tun.

Beachten Sie: Der Mittelpunkt eines Kreises gehen bei der Inversion i.a. *nicht* in den Mittelpunkt des Bildkreises über!

□

**Lemma 23.** Eine Möbiustransformation  $f$  ist durch die Werte  $f(0), f(1), f(\infty)$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Ist  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , so ist

$$f(0) = \frac{b}{d}, \quad f(1) = \frac{a+b}{c+d}, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}.$$

1. Fall:  $c = 0$ . Dann ist nach Definition der Möbiustransformation  $d \neq 0$ . Wir erhalten

$$f(1) = \frac{a}{d} + \frac{b}{d}$$

und

$$f(z) = (f(1) - f(0))z + f(0).$$

2. Fall:  $d = 0$ . Dann ist  $c \neq 0$ ,

$$f(1) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

und

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \frac{1}{z} = f(\infty) + (f(1) - f(\infty)) \frac{1}{z}.$$

3. Fall:  $c \neq 0 \neq d$ . Dann ist

$$f(z) = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{f(\infty)z + f(0)\frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

und

$$f(1) = \frac{f(\infty) + f(0)\frac{d}{c}}{1 + \frac{d}{c}}.$$

Aber die rechte Seite kann man lesen als eine Möbiustransformation angewendet auf  $\frac{d}{c}$  (beachte  $f(0) - f(\infty) \neq 0$ ), und wegen der Injektivität ist dann  $\frac{d}{c}$  durch deren Wert  $f(1)$  bestimmt.

□

**Satz 24 (6-Punkte-Satz).** Sind  $(z_1, z_2, z_3)$  und  $(w_1, w_2, w_3)$  zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte, so gibt es genau eine Möbiustransformation  $f$  mit  $f(z_k) = w_k$  für  $k = 1, 2, 3$ . Diese erhält man durch Auflösen der "6-Punkte-Formel" nach  $w$ :

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)} \quad (9)$$

*Beweis.* Die rechte Seite von (9) ist eine gebrochen-lineare Abbildung,  $R(z)$  mit

$$R(z_1) = 0, \quad R(z_2) = 1, \quad R(z_3) = \infty,$$

insbesondere also nicht konstant und damit eine Möbiustransformation. Entsprechendes gilt für die linke Seite  $L(w)$ , und daher ist

$$f = L^{-1} \circ R$$

eine Möbiustransformation mit  $f(z_k) = w_k$ . Damit ist die Existenz gezeigt. Die Möbiustransformation  $f \circ R^{-1}$  bildet dann  $0, 1, \infty$  auf  $(w_1, w_2, w_3)$  ab und ist nach dem Lemma eindeutig bestimmt. Daraus folgt die Eindeutigkeit von  $f$ . □

**Bemerkung.** Ist einer der  $z$ - und oder  $w$ -Werte  $\infty$ , so kürzt man diesen heraus, und die Formel (9) gilt immer noch. Zum Beispiel für  $w_3 = \infty$  erhält man auf der linken Seite

$$\frac{(w - w_1)\left(\frac{w_2}{w_3} - 1\right)}{(w_1 - w_2)\left(1 - \frac{w}{w_3}\right)} = \frac{(w - w_1)(0 - 1)}{(w_1 - w_2)(1 - 0)} = \frac{w - w_1}{w_2 - w_1}. \quad (10)$$

**Lemma 25.** Jede Möbiustransformation ist Komposition  $f = f_1 \circ \dots \circ f_6$  von Möbiustransformationen  $f_k$  der folgenden einfachen Formen

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + b && (\text{Translation}), \\ z &\mapsto az && (\text{Drehstreckung mit } a \neq 0), \\ z &\mapsto \frac{1}{z} && (\text{Inversion}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir betrachten den Fall  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $d \neq 0$ . Den Fall  $d = 0$  überlasse ich Ihnen. Betrachten Sie folgende Kompositionen:

$$\begin{aligned} z &\mapsto \frac{1}{z} \mapsto d \frac{1}{z} = \frac{d}{z} \mapsto \frac{d}{z} + c = \frac{cz+d}{z} \mapsto \frac{z}{cz+d} \\ &\mapsto \frac{1}{d} (ad-bc) \frac{z}{cz+d} = \frac{az - \frac{bc}{d}z}{cz+d} \mapsto \frac{az - \frac{bc}{d}z}{cz+d} + \frac{b}{d} = \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

□

Weil Translationen und Drehstreckungen offenbar Kreise und Geraden in Kreise und Geraden abbilden, folgt zusammen mit dem Beispiel 22, wenn wir wieder Geraden auch als Kreise betrachten,

**Satz 26 (Kreistreue).** *Möbiustransformationen bilden Kreise in Kreise ab.*

**Bemerkung.** Das Komplement  $\mathbb{C} \setminus K$  eines Kreises oder einer Geraden besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten, die durch die (stetige!) Möbiustransformation  $f$  auf zusammenhängende Mengen, also wegen der Bijektivität jeweils auf eine der Zusammenhangskomponenten von  $f(K)$  abgebildet werden. Welche Komponente auf welche abgebildet wird, testet man leicht durch Wahl eines Punktes und Berechnung seines Bildes. Oder man bemerkt folgendes: Versieht man den Kreis mit einem Durchlaufungssinn durch Wahl einer Parametrisierung  $c : [0, 2\pi] \rightarrow K$  mit  $|\dot{c}| > 0$ , so liegt  $c(t) + \epsilon i \dot{c}(t)$  für kleine  $\epsilon$  in einer der beiden Zusammenhangskomponenten, der “linken Seite” des Kreises. Wegen der Konformität von  $f$  liegt dann  $f(c(t)) + \epsilon D_{c(t)} f(i \dot{c}(t)) = f(c(t)) + \epsilon i D_{c(t)} f(\dot{c}(t))$  auf der linken Seite der mit  $f \circ c$  parametrisierten Bildkurve. Die Möbiustransformation ist also (wie jede holomorphe Transformation) *orientierungstreu*.

**Beispiel 27.** Bei der graphischen Darstellung physikalischer Größen mit großer Variation der Werte sind logarithmische Skalen hilfreich. Einen anderen Weg geht man in der Hochfrequenztechnik, wo es um die Darstellung komplexer Widerstände  $Z = R + iX$  mit  $R > 0$  geht. Die Werte von  $Z$  liegen also in der rechten Halbebene und variieren stark. Zur graphischen Darstellung benutzt man eine Möbiustransformation, die die rechte Halbebene in den Einheitskreis transformiert. Um eine solche zu finden, gibt man für 3 Punkte auf dem Rand der rechten Halbebene, also auf der imaginären Achse, ihre Werte auf dem Einheitskreis vor:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{b}{d} = -1 \\ f(i) &= \frac{ai+b}{ci+d} = i \\ f(-i) &= \frac{-ai+b}{-ci+d} = -i \end{aligned}$$

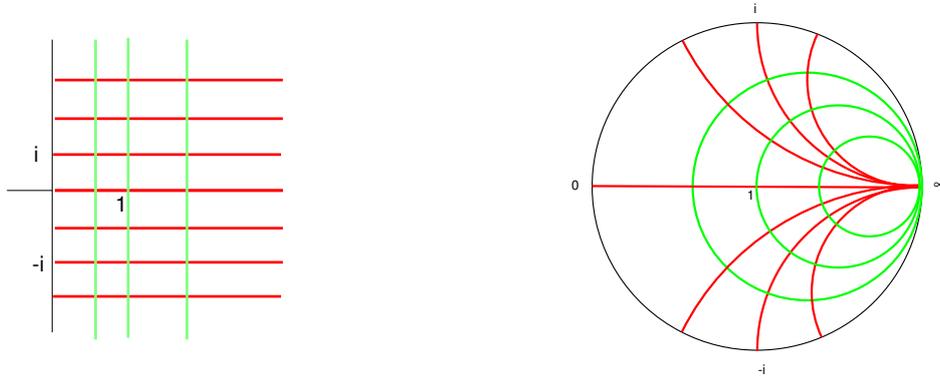
Auflösen des linearen Gleichungssystems für  $a, b, c, d$  liefert

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Diese Transformation bildet also die imaginäre Achse auf einen Kreis durch  $-1, i, -i$ , also auf den Rand des Einheitskreises ab. Nach der obigen Bemerkung geht die rechte Halbebene dabei in das Innere des Einheitskreises über.

Die Transformation erhält wesentliche Strukturen. Die reelle Achse geht offenbar in sich über. Die Geraden von konstantem Wirkwiderstand  $R$  sind Geraden senkrecht zur reellen Achse und gehen deshalb in Kreise durch  $f(\infty) = 1$  über, die die reelle Achse senkrecht

schneiden, während die Geraden konstanten Blindwiderstands, also die Geraden senkrecht zur imaginären Achse, in Kreise durch  $f(\infty) = 1$  übergehen, die den Einheitskreis senkrecht schneiden.



Das hier erklärte Einheitskreis-Diagramm läuft in der Hochfrequenztechnik unter dem Namen *Smith-Diagramm*. □

**Beispiel 28.** Welche Möbiustransformationen bilden die obere Halbebene

$$\mathbb{H} := \{z \mid \text{Im } z > 0\}$$

auf sich ab? Jede solche Transformation bildet die reelle Achse auf sich ab. Also sind zum Beispiel  $f(-1), f(0), f(1)$  reell, und die aus der 6-Punkte-Formel bestimmten Koeffizienten von  $f$  sind ebenfalls reell. Hat man umgekehrt eine Möbiustransformation mit reellen  $a, b, c, d$ , so geht die reelle Achse in sich über und es ist

$$f(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{1}{c^2 + d^2} (ai + b)(d - ic) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Die obere Halbebene genau dann geht in sich über, wenn  $\text{Im } f(i) > 0$ , d.h wenn  $ad - bc > 0$ . Nach Normierung von  $ad - bc$  erhält man also:

Die Möbiustransformationen, die die obere Halbebene auf sich abbilden, sind genau die Transformationen mit  $ad - bc = 1$ , für die  $a, b, c, d$  sämtlich reell sind. □

Es ist offensichtlich, dass Möbiustransformationen ein gutes Hilfsmittel zum Studium von Kreisen in der Ebene sind. Ein fundamentales Problem dabei ist die Entscheidung, ob vier vorgegebene paarweise verschiedene Punkte  $z_1, z_2, z_3, z_4$  der Ebene auf einem Kreis liegen. Die Möbiustransformationen liefern dafür ein bequemes Kriterium.  $f(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z)}$  bildet  $z_2, z_3, z_4$  auf  $0, 1, \infty$  ab, also den durch die drei Punkte eindeutig bestimmten Kreis  $K$  auf die reelle Achse. Der Punkt  $z_1$  liegt genau dann auf  $K$ , wenn  $f(z_1)$  auch auf der reellen Achse liegt. Wir erhalten

**Satz 29 (und Definition: Doppelverhältnis).** Die vier paarweise verschiedenen Punkte  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  liegen genau dann auf einem Kreis, wenn

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}$$

reell ist. Die Zahl  $DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$  heißt das Doppelverhältnis der vier Punkte.

Aus der 6-Punkte-Formel folgt unmittelbar die Invarianz des Doppelverhältnisses unter Möbiustransformationen

**Satz 30.** Für je vier paarweise verschieden Punkte  $z_1, z_2, z_3, z_4$  und für jede Möbiustransformation  $f$  gilt

$$DV(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = DV(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

**Satz 31.** Die Möbiustransformationen, welche die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

bijektiv auf sich abbilden, sind genau die Transformationen der Form

$$f(z) = e^{i\phi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (11)$$

mit  $|z_0| < 1$  und  $\phi \in \mathbb{R}$ . Für diese gilt

$$|f'(z)| = \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} = \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \quad (12)$$

*Beweis.* Für jede Transformation der Form (11) und  $|z| = 1$  gilt

$$|f(z)|^2 = \frac{z\bar{z} - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + z_0\bar{z}_0}{1 - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + z_0\bar{z}_0z\bar{z}} = 1.$$

Also bildet  $f$  den Rand des Einheitskreises auf sich und wegen  $f(z_0) = 0$  auch das Innere von  $\mathbb{D}$  auf sich ab.

Um zu sehen, dass umgekehrt jede Möbiustransformation  $f = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , von der angegebenen Form ist, betrachten wir die Transformation

$$g(z) = \frac{iz + 1}{iz - 1} = \frac{-iz - 1}{-iz + 1}.$$

Das ist die Abbildung  $z \mapsto -iz$  komponiert mit der Möbiustransformation aus Beispiel 27, bildet also die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  auf den Einheitskreis  $\mathbb{D}$  ab. Die Inverse ist gegeben durch

$$g^{-1}(w) = \frac{w + 1}{iw - i}.$$

Die Möbiustransformation

$$h := g^{-1} \circ f \circ g$$

bildet dann die obere Halbebene auf sich ab, ist also nach dem Beispiel von der Form  $h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  mit  $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$  ist. Wir finden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\gamma - \beta) + i(\alpha + \delta) & (\beta + \gamma) + i(\alpha - \delta) \\ -(\beta + \gamma) + i(\alpha - \delta) & -(\gamma - \beta) + i(\alpha + \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$f(z) = \frac{az + b}{-bz - \bar{a}}.$$

Wäre  $a = 0$ , so  $f(0) = \infty$  im Widerspruch zu  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ . Mit  $z_0 := -\frac{b}{a}$  erhalten wir

$$f(z) = \frac{a}{-\bar{a}} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Weil  $\left| \frac{a}{-\bar{a}} \right| = 1$ , gibt es  $\phi$  mit  $\frac{a}{-\bar{a}} = e^{i\phi}$ , und weil  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , ist  $z_0 = f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ .

Die zweite Aussage des Satzes rechnet man einfach nach:

$$\begin{aligned} \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} &= \frac{1 - \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{1 - z_0 \bar{z}}}{1 - |z|^2} = \frac{1 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2 |z|^2 - |z|^2 - |z_0|^2 + z_0 \bar{z} + \bar{z}_0 z}{|1 - \bar{z}_0 z|^2 (1 - |z|^2)} \\ &= \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2 (1 - |z|^2)} = \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \end{aligned}$$

und

$$f'(z) = e^{i\phi} \frac{1 - \bar{z}_0 z + (z - z_0)\bar{z}_0}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} = e^{i\phi} \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2}.$$

□

**Beispiel 32.** In diesem Beispiel wollen wir zeigen, dass es zu zwei disjunkten Kreisen immer eine Möbiustransformation gibt, die diese Kreise auf ein Paar konzentrischer Kreise abbildet. Durch Translation und Streckung, also durch Möbiustransformationen, können wir erreichen, dass der erste Kreis der Einheitskreis ist. Ohne Einschränkung liegt der zweite Kreis  $K$  im Inneren des Einheitskreises, sonst wenden wir eine Inversion an. Nach einer geeigneten Drehung liegt der Mittelpunkt  $a$  von  $K$  auf der nicht-negativen reellen Achse, schneidet diese also senkrecht. Ist  $a = 0$ , sind wir fertig, also o.E.  $0 < a < 1$  und für den Radius  $r$  von  $K$  gilt  $0 < r < 1 - a$ . Die Möbiustransformationen

$$f(z) = \frac{z - t}{1 - tz} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

bilden die Einheitskreislinie und die reelle Achse jeweils auf sich und  $K$  auf einen Kreis  $f(K)$  ab, der die reelle Achse senkrecht schneidet in den Punkten  $f(a - r)$  und  $f(a + r)$ . Wir berechnen den Mittelpunkt von  $f(K)$  für den Fall dass  $f(K)$  wirklich ein Kreis, also  $1 - t(a \pm r) \neq 0$  ist.

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(a - r) + f(a + r)}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{(a - r) - t}{1 - t(a - r)} + \frac{(a + r) - t}{1 - t(a + r)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(a - r - t)(1 - t(a + r)) + (a + r - t)(1 - t(a - r))}{\text{Nenner}} \\ &= \frac{at^2 - (a^2 - r^2 + 1)t + a}{\text{Nenner}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Gibt es ein  $t$  mit  $1 - t(a \pm r) \neq 0$ , für das  $m = 0$  ist? Aus  $0 < r < 1 - a$  folgt durch Quadrieren

$$a^2 - r^2 + 1 > 2a, \tag{14}$$

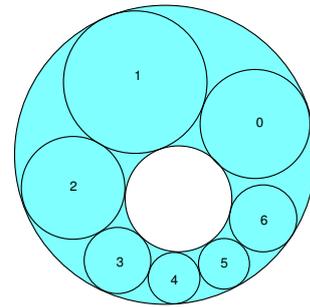
und deshalb hat

$$a(1 + t^2) - t(a^2 - r^2 + 1)$$

für  $t = -1$  und  $t = +1$  verschiedenes Vorzeichen. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also eine Nullstelle in  $] -1, +1[$ . Für ein solches  $t \notin \{0, \pm 1, \frac{1}{a \pm r}\}$  bildet dann die Möbiustransformation  $f$  auch den Kreis  $K$  auf einen Kreis mit Mittelpunkt 0 ab, und die Behauptung ist gezeigt.

Dieses Ergebnis hat eine hübsche von Steiner<sup>3</sup> entdeckte Anwendung:

In das Ringgebiet zwischen zwei ineinander enthaltenen Kreisen fügt man einen Anfangskreis ein, der beide berührt. Dann setzt man diesen zu einer Kette fort, indem man Kreise hinzufügt, die jeweils die Randkreise des Ringgebietes und den vorangehenden berühren. Dann ist es möglich, dass sich die Kette schließt, also periodisch wird, oder nicht. Welcher Fall eintritt, hängt anscheinend vom Ringgebiet *und* der Wahl des Anfangskreises ab. Wird allerdings das Ringgebiet von konzentrischen Kreisen berandet, so spielt aus Symmetriegründen der Anfangskreis dabei keine Rolle.



Sind die Randkreise nicht konzentrisch, so kann man aber nach dem obigen Satz eine Möbiustransformation auf konzentrische Kreise vornehmen, die offenbar die Kettenkonstruktion erhält! Also ist Schließungsbedingung nur eine Bedingung an das Ringgebiet und *unabhängig* vom gewählten Anfangskreis.

□

---

<sup>3</sup> Jakob Steiner war von 1825 bis 1835 Lehrer an der Städtischen Gewerbeschule Berlin, die später in der heutigen TU Berlin aufging.

### 3 Integration

A very important chapter of complex analysis is the *integration of holomorphic functions along curves*, leading to the central *Cauchy integral theorem*. This theorem, however, is a special case of a prominent theorem in real vector analysis, the *Stokes integral theorem*. I feel that a course on complex analysis should explain this connection. It is almost trivial, if you assume familiarity with Stokes' theorem in the optimal (and only appropriate) setting of integration theory for differential forms on manifolds, a familiarity that many students at this level do not have. Therefore I only assume the knowledge of a special version of the Stokes, namely Green's theorem, avoiding explicit mention of differential forms.

But there remains a technical difficulty about the curves along which the integrals are formed. Quite often they are closed curves or collections of curves, that form the boundary of "something". Restriction to boundary curves of nice geometric objects like disks or annuli allows many applications, but misses a point that, I think, must be addressed in the context of complex analysis: the relation between *homology* and *homotopy*. In particular, the notion of homology for curves should be explained. To do this on the background of integration is the second major objective of this chapter.

#### 3.1 "One-dimensional" integrals

**Definition 33.** Let  $P, Q : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous functions on a region  $G$ , and let  $c : [a, b] \rightarrow G$  be a continuously differentiable curve with  $c(t) = (x(t), y(t))$ . We define

$$\int_c Pdx + Qdy := \int_a^b (P(c(t))\dot{x}(t) + Q(c(t))\dot{y}(t)) dt. \quad (15)$$

**Definition 34.** Let  $f : \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  be continuous on the region  $G$ , and let  $c : [a, b] \rightarrow G$  be a continuously differentiable curve. We define

$$\int_c f(z)dz := \int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)dt. \quad (16)$$

Remember that the integral of a complex-valued function is simply taken separately on real and imaginary part. If we decompose into real and imaginary part, then the two definitions fit together: If

$$f = u + iv, \quad dz = dx + idy,$$

then

$$\begin{aligned} \int_c f(z)dz &= \int_a^b (u(c(t)) + iv(c(t)))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))dt \\ &\stackrel{(15)}{=} \int_c (udx - vdy) + i \int_c (udy + vdx). \end{aligned} \quad (17)$$

**Example.** Let  $c(t) = e^{2\pi it}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Then

$$\int_c \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{2\pi i e^{2\pi it}}{e^{2\pi it}} dt = 2\pi i. \quad (18)$$

**Lemma 35.** *If we reverse orientation of the curve, then the integral changes sign. Orientation-preserving re-parametrization does not affect the value of the integral.*

This allows the definition of curve-integrals, where “curve” means a subset of the complex plane that can be “parametrized”, and has a prescribed orientation. We shall not discuss this in detail, but shall use it in obvious geometrical situations. For instance, we write

$$\int_{|z-a|=r} f(z)dz := \int_c f(z)dz$$

$$c(t) := a + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

or, equivalently,

$$c(t) := a + re^{2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

An estimate for complex integrals:

**Theorem 36.** *Let  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  be continuous on the region  $G$ ,  $c : [a, b] \rightarrow G$  continuously differentiable, and  $M \in \mathbb{R}$  with  $|f \circ c| \leq M$ . Then*

$$\left| \int_c f(z)dz \right| \leq M \underbrace{\int_a^b |\dot{c}(t)|dt}_{:=L(c)}. \quad (19)$$

$L(c)$  is the length of  $c$ .

*Proof.* If  $J := \int_c f(z)dz = 0$ , then the assertion is obvious. Otherwise

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\int_c f(z)dz}{J} = \operatorname{Re} \frac{\int_c f(z)dz}{J} = \operatorname{Re} \int_a^b \frac{f(c(t))\dot{c}(t)}{J} dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \frac{f(c(t))\dot{c}(t)}{J} dt \leq \int_a^b \frac{M|\dot{c}(t)|}{|J|} dt = \frac{M}{|J|} L(c). \end{aligned}$$

□

Sometimes it is convenient to represent curves in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  using polar coordinates. The following theorem guaranties the existence of such.

**Theorem 37.** *Let  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  be continuously differentiable, and assume  $c(0) = r_0 e^{i\phi_0}$  with  $r_0 > 0$  and  $\phi_0 \in \mathbb{R}$ . Then*

$$\phi(t) := \phi_0 + \operatorname{Im} \int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z} = \phi_0 + \operatorname{Im} \int_0^t \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} d\tau$$

defines a continuously differentiable function such that

$$\phi(0) = \phi_0, \quad (20)$$

$$c(t) = |c(t)| e^{i\phi(t)} \quad \text{for all } t. \quad (21)$$

$\phi$  is the only continuous function with (20), (21) Equation (21). determines it up to an additive constant of the form  $2\pi ik$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Proof.* We compute

$$\frac{d}{dt} \left( c(t) e^{-\int_0^t \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} d\tau} \right) = e^{-\int_0^t \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} d\tau} \left( \dot{c}(t) - c(t) \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \right) = 0.$$

Hence

$$\begin{aligned}
 c(t) &= \text{const} e^{\int_0^t \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} d\tau} = c(0) e^{\int_0^t \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} d\tau} \\
 &= r_0 e^{i\phi_0} e^{\int_0^t \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} d\tau} = r_0 e^{\operatorname{Re} \int_0^t \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} d\tau} e^{i\phi_0 + i \operatorname{Im} \int_0^t \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} d\tau} \\
 &= r_0 e^{\operatorname{Re} \int_0^t \frac{\dot{c}(\tau)}{c(\tau)} d\tau} e^{i\phi(t)} = |c(t)| e^{i\phi(t)}.
 \end{aligned}$$

The rest follows from the  $2\pi i$ -periodicity and continuity of the exponential function.  $\square$

### 3.2 “Two-dimensional” integrals

Similar to curves, i.e. mappings of a one-dimensional interval, we consider “surfaces”, let us call them *patches*, as mappings of a rectangle into the plane. (The official terminology is *singular rectangle*.)

**Definition 38.** Let  $R : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  be continuous on the region  $G$ , and let

$$C : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow G$$

be a continuously differentiable patch. Then we define

$$\int_C R dx dy := \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} R(C(s, t)) \det \left( \frac{\partial C}{\partial s}, \frac{\partial C}{\partial t} \right) dt ds. \quad (22)$$

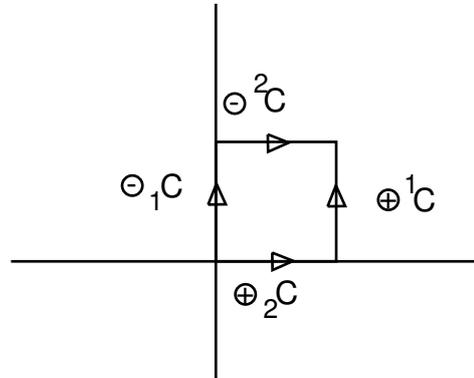
If  $C$  is an orientation-preserving imbedding (think of a linear map, that transforms the rectangle into a parallelogram), and  $R = 1$ , then the left-hand side should produce the area of the image of  $C$ : which it does, according to the transformation rule. This is the origin of the functional determinant or Jacobian in (22). It makes the definition invariant with respect to orientation-preserving re-parametrizations.

If we consider a continuously differentiable patch  $C : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  (where we restrict to the unit square for simplicity), then the intuitive definition of the *boundary curve* of  $C$  would be a piecewise continuously differentiable curve consisting of four parts, the four *sides* or edges of  $C$ , all of which we reparametrize on  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned}
 t &\mapsto C(1, t) \\
 t &\mapsto C(1 - t, 1) \\
 t &\mapsto C(0, 1 - t) \\
 t &\mapsto C(t, 1)
 \end{aligned}$$

We stick to the standard convention using a simpler parametrization, and putting a formal sign mark on each of the four curves that indicates, which sign to choose for the corresponding integral:

$$\begin{array}{ll}
 {}^1C : t \mapsto C(1, t) & \text{with sign } \oplus, \\
 {}^2C : t \mapsto C(t, 1) & \text{with sign } \ominus, \\
 {}_1C : t \mapsto C(0, 1 - t) & \text{with sign } \ominus, \\
 {}_2C : t \mapsto C(t, 1) & \text{with sign } \oplus.
 \end{array}$$



We formally write the boundary  $\partial C$  of  $C$  as a *chain*

$$\partial C = \oplus^1 C \ominus {}_1 C \ominus {}^2 C \oplus {}_2 C$$

meaning e.g.

$$\int_{\partial C} f dz = + \int_{{}_1 C} f dz - \int_{{}_1 C} f dz - \int_{{}^2 C} f dz + \int_{{}_2 C} f dz.$$

### Examples

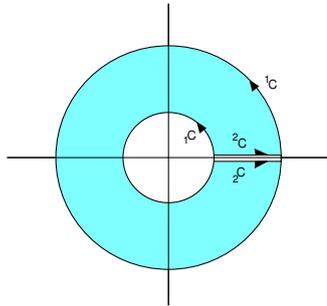
1. **Annulus.** Let  $0 < r < R$  and define  $C : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  by

$$C(s, t) := (r + s(R - r))e^{2\pi i t}$$

Then, for example,

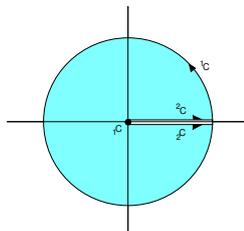
$${}_1 C(t) = (r + 1(R - r))e^{2\pi i t} = R e^{2\pi i t}.$$

Find the other sides.



Since  ${}_2 C = {}^2 C$ , and in the boundary definition they occur with opposite signs, the “relevant” boundary for integration consist of the two circles that you intuitively consider as the boundary of the annulus. Both are parametrized counter-clockwise, but the outer circle counts positive, the inner negative.

2. **Disk.** If in the preceding example we put  $r = 0$ , the image of the unit square under  $C$  becomes a disk of radius  $R$  around the origin. For integration, again the two radial curves cancel, while the “inner circle” degenerates to a point that does not contribute to the integral.

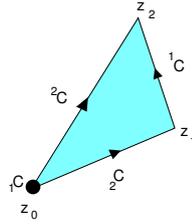


The “relevant” boundary is again the intuitive one, a circle of radius  $R$ .

3. **Triangle.** Let  $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Define

$$C(s, t) := (1 - s)z_0 + s((1 - t)z_1 + tz_2)$$

The image of  $C$  is a triangle with vertices the  $z_k$ . The side  ${}_1 C$  again degenerates to a point, the others form the edges of the triangle. Integration over the boundary chain amounts to the integral taken around the edges from  $z_0$  to  $z_1$  to  $z_2$  and back to  $z_0$ .



### 3.3 The Cauchy theorem

With the above definitions we can formulate the simplest form of Stokes' theorem:

**Theorem 39 (Green).** *Let  $G \subset \mathbb{C}$  be a region, let  $P, Q : G \rightarrow \mathbb{R}$  be continuously differentiable functions, and let  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$  be a continuously differentiable patch. Then*

$$\int_C \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\partial C} (P dx + Q dy). \quad (23)$$

For the proof I refer to the regular Analysis class, or to my Skriptum "Komplexe Analysis". The proof is not difficult, the basic ingredients are the Fubini theorem (successive integration), and the fundamental theorem of calculus, which can be considered as the baby version of Stokes' theorem.

The following **Integral Theorem of Cauchy** is the most important theorem of complex analysis, though not in its strongest form. We discuss it here to stress its coincidence with (a special case of) the most important theorem of real vector analysis: the **Stokes' theorem**. We shall later give an independent proof of Cauchy's theorem, based on weaker assumptions.

**Theorem 40 (Cauchy, Version 0).** *Let  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  be holomorphic in the region  $G$ , and let  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$  be continuously differentiable. Assume moreover that*

$$f' \text{ is continuous.} \quad (24)$$

Then

$$\int_{\partial C} f(z) dz = 0. \quad (25)$$

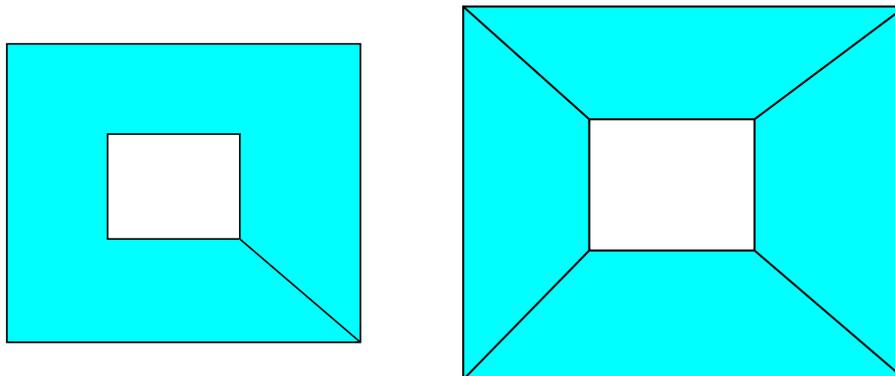
*Proof.* We decompose  $f = u + iv$  into real and imaginary part.

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} f(z) dz &= \int_{\partial C} (u dx - v dy) + i \int_{\partial C} (u dy + v dx) \\ &= \int_C \left( -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial(-v)}{\partial x} \right) dx dy + i \int_C \left( -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

by the Cauchy-Riemann equations. □

### 3.4 Generalizations. Homology.

When we consider integration over the boundary of a square or rectangle, it is recommended not to work out a continuously differentiable parametrization of the complete boundary quadrangle (which is possible), but use the idea of a *chain* consisting of four linearly parametrized line segments with proper signs for the integral. Similarly, the parametrization of more complicated areas in the plane is often simpler, when using several patches instead of one: There exists a continuously differentiable parametrization of the “rectangular annulus” by the unit square, which is similar to the parametrization of the circular annulus above, but nobody ever wants to explicitly write it down. Much simpler is a parametrization using four trapezoidal patches, which can be obtained conveniently by linear maps, see the figures.



This leads to the concept of *chains of patches*, which by definition are formal linear combinations of patches defined on the unit square with integer coefficients (mostly, but not necessarily, 0 or  $\pm 1$ ). For brevity, we call them *2-chains*. It is helpful to also generalize the concept of chains of curves, or *1-chains*, admitting formal linear combinations of curves (defined on  $[0, 1]$ ) with arbitrary integer coefficient.

**Integration over a chain** is done by integrating over its curves or patches and counting each integral with the multiplicity given by the integer coefficient of that patch or curve.

A chain in  $G$  may look as follows:

$$3C_1 \oplus C_2 \ominus 5C_3,$$

where the  $C_j$  are curves or patches, respectively.

**Remark.** Chains are “formal” linear combinations. The signs and coefficients are only used as information how to weigh the integrals. Since the values of the  $C_j$  lie in the vector space  $\mathbb{C}$ , you could be tempted to take the *linear combination of the values*, and obtain again a map  $[0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  (not necessarily with values in  $G$ ). This is not meant(!), and therefore we speak of “formal” linear combinations.

Using integer coefficients other than  $\pm 1$ , which reflect the “orientation”, seems strange. The motivation is given by the fact, that with the obvious “formal” addition and subtraction the 1-chains or the 2-chains in  $G$  form an abelian group, allowing the use of algebraic methods. In particular, for a fixed continuous function  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

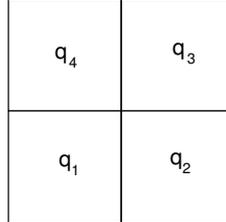
$$c \mapsto \int_c f(z) dz$$

is a homomorphism of the 1-chain group in  $G$  to (the additive group)  $\mathbb{C}$ . In other words, the integral operator is *extended as a homomorphism* to the (free) abelian group of chains generated by the curves in  $G$ . Similarly the boundary operator is extended to a homomorphism of the 2-chain group in  $G$  to the 1-chain group in  $G$ .

**Example.** Each of the maps

$$\begin{aligned} q_1(s, t) &= \frac{1}{2}(s, t), & q_2(s, t) &= \frac{1}{2}(1 + s, t) \\ q_3(s, t) &= \frac{1}{2}(1 + s, 1 + t), & q_4(s, t) &= \frac{1}{2}(s, 1 + t) \end{aligned}$$

maps the unit square onto a quarter of it.



If you compute  $\partial(q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 \oplus q_4)$ , the interior curves cancel, and it remains a chain of eight curves on the boundary of the unit square, such that with

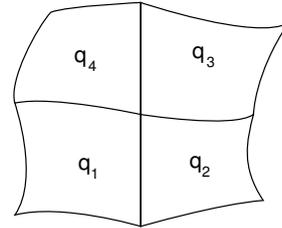
$$q : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (s, t) \mapsto (s, t)$$

we get

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\partial q_k} f(z) dz = \int_{\partial(q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 \oplus q_4)} f(z) dz = \int_{\partial q} f(z) dz.$$

More generally, we have for any patch  $C$  in some  $G$  and continuous  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\partial(C \circ q_k)} f(z) dz = \int_{\partial(C \circ q)} f(z) dz.$$



**Definition 41.** A 1-chain  $c$  in a region  $G \subset \mathbb{C}$  is called *0-homologous in  $G$* , if it is the boundary of a 2-chain  $C$  in  $G$  up to a 1-chain of constant curves.

$$c = \partial C \oplus n_1 c_1 \oplus n_2 c_2 \oplus \dots \oplus n_k c_k,$$

for some  $k \geq 0$ , and  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$  and constant curves  $c_1, \dots, c_k$ .

Two 1-chains  $c_1$  and  $c_2$  are called *homologous in  $G$* , if their (formal) difference is 0-homologous in  $G$ . We denote this by

$$c_1 \underset{G}{\sim} c_2.$$

**Example.** If  $0 < r < R$ , then the 1-chains consisting each of the single curve

$$\begin{aligned} c_1 : [0, 1] &\rightarrow G, \quad t \mapsto Re^{2\pi it}, \text{ and} \\ c_2 : [0, 1] &\rightarrow G, \quad t \mapsto re^{2\pi it}, \text{ respectively,} \end{aligned}$$

are homologous to each other in  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , compare the annulus example above. On the other hand, in  $G = \mathbb{C}$  the curve  $c_1$  is homologous to the constant curve of value 0, see the disk example above. Therefore  $c_1 \underset{\mathbb{C}}{\sim} 0$ .

By the homomorphism property of integration and boundary operation the following generalization is obvious:

**Theorem 42 (Cauchy, Version 1).** *Let  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  be holomorphic in the region  $G$ , and let  $c$  be a continuously differentiable 1-chain, which is 0-homologous in  $G$ . Assume moreover that  $f'$  is continuous. Then*

$$\int_c f(z)dz = 0. \tag{26}$$

**Example.**  $c(t) = e^{2\pi it}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  is a curve (or 1-chain) in  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . But it is not 0-homologous in this set, because

$$\int_c \frac{dz}{z} \neq 0,$$

compare (18).

## 4 Cauchyscher Integralsatz

- Ein anderer Beweis mit weniger Voraussetzungen (Goursat)
- Nullhomologe Zyklen, Definition und die Last mit den Beispielen
- Die überraschende Integralformel

### 4.1 Der Integralsatz

Wir geben nun einen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes unter Verzicht auf die stetige Differenzierbarkeit.

**Lemma 43.** *Besitzt  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  auf dem Gebiet  $G$  eine Stammfunktion, d.h. gibt es eine holomorphe Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F' = f$ , so gilt für jede Kurve  $c : [a, b] \rightarrow G$*

$$\int_c f(z) dz = F(c(b)) - F(c(a)).$$

Insbesondere ist  $\int_c f(z) dz = 0$  für jede geschlossene Kurve. Allgemeiner ist

$$\int_{\partial C} f(z) dz = 0$$

für jede 2-Kette in  $G$ .

*Beweis.* Für Kurven: Kettenregel und Analysis I. Für den Rand von 2-Ketten: Selbst.  $\square$

**Satz 44 (Cauchyscher Integralsatz).** *Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$ , und sei  $C$  eine stetig differenzierbare 2-Kette in  $G$ . Dann gilt*

$$\int_{\partial C} f dz = 0.$$

Weil das Integral über konstante Kurven 0 ist, gilt etwas allgemeiner

$$\int_c f dz = 0$$

für jede in  $G$  nullhomologe 1.Kette  $c$ .

*Beweis des Integralsatzes von Cauchy nach É. Goursat (1834).* Es genügt, den Satz für ein singuläres Quadrat  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$  zu zeigen. Für 2-Ketten ergibt er sich dann aus der Definition des Integrals über Ketten. Wir bezeichnen  $[0, 1]^2 =: W$ . Weil  $C$  stetig differenzierbar auf dem kompakten  $W$  ist, existiert

$$\mu := \max_{(s,t) \in W} \|d_{(s,t)} C\| < \infty,$$

wobei  $\|d_{(s,t)} C\|$  die Norm der Ableitung von  $C$  oder der Jacobimatrix bezeichnet. Nach dem Schrankensatz der Analysis II gilt dann für alle  $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in [0, 1]^2$

$$|C(s_1, t_1) - C(s_2, t_2)| \leq \mu \|(s_1, t_1) - (s_2, t_2)\|. \quad (27)$$

Wir vierteln nun das Quadrat wie im Beispiel im letzten Abschnitt und wählen ein Teilquadrat  $C_1 := C \circ q_k$ , für welches  $|\int_{\partial(C \circ q_k)} f(z) dz|$  maximal wird. Dann haben wir

$$\begin{aligned} C_1(W) &\subset C(W) \subset G, \\ \text{Durchmesser } C_1(W) &\leq \mu \frac{\text{Durchmesser}(W)}{2}, \\ \text{Länge } \partial C_1 &\leq \mu \frac{\text{Länge}(\text{Rand } W)}{2}, \\ \left| \int_{\partial C} f dz \right| &\leq 4 \left| \int_{\partial C_1} f dz \right|. \end{aligned}$$

Wir wiederholen nun diese Verteilung mit  $C_1$  statt  $C$  und dann weiter rekursiv. Wir erhalten eine Folge  $C_k : W \rightarrow G$  mit

$$\begin{aligned} C_{k+1}(W) &\subset C_k(W) \subset G, \\ \text{Durchmesser } C_k(W) &\leq \mu \frac{\text{Durchmesser}(W)}{2^k}, \\ \text{Länge } \partial C_k &\leq \mu \frac{\text{Länge}(\text{Rand } W)}{2^k}, \\ \left| \int_{\partial C} f dz \right| &\leq 4^k \left| \int_{\partial C_k} f dz \right|. \end{aligned}$$

Die  $C_k(W)$  bilden eine geschachtelte Folge kompakter Mengen mit gegen 0 konvergierendem Durchmesser ist. Daher besteht  $\bigcap C_k(W)$  aus genau einem Punkt  $z_0$ .

Nach Definition der Differenzierbarkeit gibt es eine stetige Funktion  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha(z)}{z - z_0} = 0.$$

Sei nun  $\epsilon > 0$  und sei  $\delta > 0$  so gewählt, dass

$$|z - z_0| \leq \delta \implies |\alpha(z)| \leq \epsilon |z - z_0|.$$

Sei weiter  $k \in \mathbb{N}$  so groß, dass Durchmesser  $C_k(W) < \delta$ . Dann gilt

$$\left| \int_{\partial C} f dz \right| \leq 4^k \left| \int_{\partial C_k} f dz \right| = 4^k \left| \int_{\partial C_k} f(z_0) dz + \int_{\partial C_k} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{\partial C_k} \alpha(z) dz \right|$$

Die ersten beiden Integrale verschwinden nach Lemma 43, weil  $f(z_0)$  die Stammfunktion  $zf(z_0)$  und  $f'(z_0)(z - z_0)$  die Stammfunktion  $\frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$  besitzt. Weil  $C_k(W)$  im Kreis vom Radius  $\delta$  um  $z_0$  liegt, ist für  $z \in C_k(W)$

$$|\alpha(z)| \leq \epsilon |z - z_0| \leq \epsilon \mu \frac{\text{Durchmesser}(W)}{2^k}.$$

Und weil

$$\text{Länge}(\partial C_k) \leq \mu \frac{\text{Länge}(\text{Rand } W)}{2^k},$$

bleibt

$$\left| \int_{\partial C} f dz \right| \leq 4^k \left| \int_{\partial C_k} \alpha(z) dz \right| \leq \epsilon \mu^2 \text{Länge}(\text{Rand } W) \text{Durchmesser}(W).$$

Nun war  $\epsilon > 0$  beliebig, also ist  $\int_{\partial C} f dz = 0$ . □

**Beispiel 45.** Sei  $f$  holomorph auf der offenen Menge  $G$  und

$$A = \{z \mid r \leq |z - z_0| \leq R\} \subset G$$

ein abgeschlossener Kreisring in  $G$  mit  $0 \leq r < R$ . Nach dem ‘annulus example’ gibt

$$C(s, t) = z_0 + ((s - 1)r + sR)e^{2\pi it}$$

ein singuläres Quadrat, dessen Rand sich mit

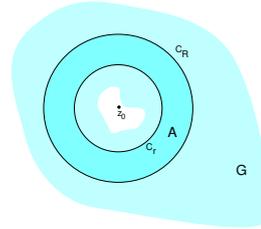
$$c_r(t) = z_0 + re^{2\pi it}, \quad c_R(t) = z_0 + Re^{2\pi it},$$

schreibt als  $\partial C = c_R \ominus c_r$ . Deshalb ist

$$\int_{\partial A} f(z) dz = \int_{\partial C} f(z) dz = 0$$

oder

$$\int_{c_r} f(z) dz = \int_{c_R} f(z) dz.$$



Für  $r = 0$  ist der kleine Kreis zu einer konstanten Kurve geschrumpft und man hat

$$\int_{c_R} f(z) dz = 0,$$

vorausgesetzt natürlich, dass in diesem Fall die ganze Kreisscheibe  $A = \{z \mid |z - z_0| \leq R\}$  in  $G$  liegt!

□

Das letzte Beispiel zeigt: Die Randkurve eines in  $G$  liegenden abgeschlossenen Kreises oder die beiden richtig ‘bewerteten’ Randkurven eines ganz in  $G$  liegenden abgeschlossenen Kreisrings sind in  $G$  nullhomolog. Wir geben nun noch drei weitere Beispiele für nullhomologe 1-Zyklen, eines im Detail und zwei, die wir anschaulich beschreiben, ohne die mühsamen Details auszuführen. Dabei wird später wichtig sein, dass die 1-Zyklen nicht nur in  $G$  nullhomolog sind, sondern sogar im Komplement  $G \setminus \{z_0\}$  eines Punktes  $z_0$  von  $G$ .

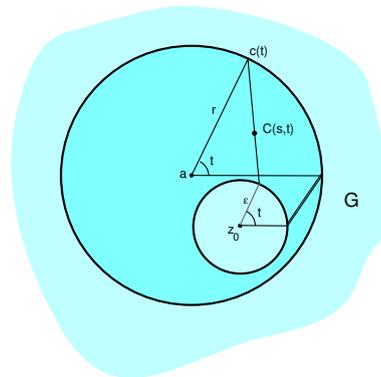
**Beispiel 46 (Schiefer Kreisring).** Sei  $K \subset G$  ein abgeschlossener Kreis vom Radius  $r$  um  $a$ , der ganz im Gebiet  $G$  liegt.

Sei  $z_0$  ein Punkt im Inneren von  $K$  und sei  $\epsilon > 0$ , so dass die abgeschlossene  $\epsilon$ -Umgebung von  $z_0$  im Inneren von  $K$  liegt. Definiere

$$c(t) := a + re^{2\pi it}, \quad c_\epsilon(t) = z_0 + \epsilon e^{2\pi it}$$

und

$$C(s, t) = sc(t) + (1 - s)c_\epsilon(t).$$



Dann gilt  $C([0, 1]^2) \subset G \setminus \{z_0\}$ .

Beweis: Es ist  $|z_0 - a| < r - \epsilon$ . Daher ist für alle  $t$  das Euklidische Skalarprodukt

$$\langle (a + re^{2\pi it}) - (z_0 + \epsilon e^{2\pi it}), e^{2\pi it} \rangle = \langle a - z_0, e^{2\pi it} \rangle + (r - \epsilon) \geq 0.$$

Der Verbindungsvektor zwischen Punkten gleichen Parameters vom kleinen zum großen Kreis zeigt also aus dem kleinen Kreis heraus.

Wie im “annulus example” sieht man, dass

$$\partial C = c \ominus c_\epsilon,$$

Also ist der 1-Zyklus  $c \ominus c_\epsilon$  nicht nur nullhomolog in  $G$ , sondern auch nullhomolog in  $G \setminus \{z_0\}$ .

Für eine in  $G \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion  $g$  ist deshalb

$$\int_c g(z) dz = \int_{c_\epsilon} g(z) dz.$$

Das werden wir demnächst brauchen. □

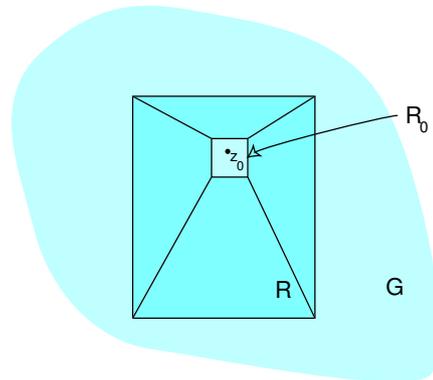
**Beispiel 47 (Rechteckring).** Seien  $R$  ein abgeschlossenes Rechteck in der offenen Menge  $G$ ,  $R_0$  ein abgeschlossenes Rechteck im Innern von  $R$  und  $z_0$  ein innerer Punkt von  $R_0$ .

Das ist also eine “eckige Variante” des letzten Beispiels. Hier ist es sinnvoll,  $R$  und  $R_0$  als singuläre Quadrate und den Zwischenbereich als 2-Kette  $C$  mit 4 singulären Quadraten aufzufassen. Dann ist klar, dass

$$\partial C = \partial R \ominus \partial R_0, \quad (28)$$

gilt. Also ist  $\partial R \ominus \partial R_0$  in  $G \setminus \{z_0\}$  nullhomolog. Für eine in  $G \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion  $g$  ist deshalb

$$\int_{\partial R} g(z) dz = \int_{\partial R_0} g(z) dz.$$



□

□

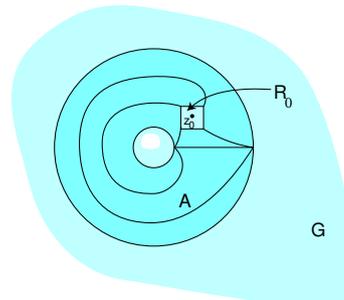
**Beispiel 48 (Gelochter Kreisring).** In diesem Beispiel betrachten wir einen abgeschlossenen Kreisring  $A$  in einer offenen Menge  $G$  und im Inneren von  $A$  ein kleines Rechteck  $R_0$  um  $z_0$  wie in der Abbildung. Wir fassen  $A$  als singuläres Quadrat

auf, und es ist klar, wie man  $R_0$  als singuläres Quadrat schreibt. Den Zwischenbereich zerlegt man als 2-Kette  $C$  mit 4 singulären Quadraten und findet

$$\partial C = \partial A \ominus \partial R_0.$$

Also ist  $\partial A \ominus \partial R_0$  nullhomolog in  $G \setminus \{z_0\}$ . Für eine in  $G \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion  $g$  ist deshalb

$$\int_{\partial A} g(z) dz = \int_{\partial R_0} g(z) dz.$$



□

Beim letzten Beispiel würde man die “krummen” singulären Quadrate der Kette  $C$  nicht gerne mehr explizit aufschreiben. Überhaupt würde sich die Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes natürlich wesentlich vereinfachen, wenn man ein bequemes Kriterium dafür hätte, wann ein gegebener 1-Zyklus *nullhomolog* ist, ohne dass man eine 2-Kette explizit aufschreiben muss, die man ja doch nicht benötigt. Ein solches Kriterium werden Sie in Satz 134 kennenlernen.

Wir werden aber zunächst sehen, dass man auch ohne ein solches Kriterium bereits sehr eindrucksvolle Konsequenzen aus dem Cauchyschen Integralsatz ziehen kann.

## 4.2 Die Integralformel

**Satz 49 (Cauchysche Integralformel).** Sei  $f$  holomorph in der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$ , sei  $K$  ein abgeschlossener Kreis in  $G$  und sei  $z_0$  ein innerer Punkt von  $K$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

*Beweis.* Sei  $K := \{z \mid |z - a| \leq R\}$ . Für  $\delta > 0$  mit  $|z_0 - a| + \delta < R$  definieren wir

$$c_\delta(t) := z_0 + \delta e^{2\pi i t}$$

und

$$C(s, t) = (1 - s)c_\delta(t) + s(a + Re^{2\pi i t}).$$

Dann ist  $C$  eine 2-Kette in  $G \setminus \{z_0\}$ , vgl. Beispiel 46, und  $\partial C = \partial K - c_\delta$ .

Weil  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  in  $G \setminus \{z_0\}$  holomorph ist, folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Sei nun  $\epsilon > 0$  beliebig und  $0 < \delta < R - |z_0 - a|$ , so dass  $|f(z) - f(z_0)| \leq \epsilon$  für alle  $z$  mit  $|z - z_0| \leq \delta$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{c_\delta} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{\delta} \text{Länge}(c_\delta) = \epsilon \end{aligned}$$

Weil  $\epsilon$  beliebig ist, folgt die Behauptung des Satzes.  $\square$

Über diesen Satz darf man schon staunen: Die Werte einer auf einem Kreis komplex differenzierbaren Funktion sind durch ihre Werte auf dem Rand des Kreises bereits vollständig festgelegt! Komplex differenzierbare Funktionen sind also viel "starrer" als reell differenzierbare Funktionen.

**Beispiel 50.** Der Beweis der Cauchyschen Integralformel beruht darauf, dass man das Integral über den Rand des Kreises nach dem Cauchyschen Integralsatzes umschreiben kann in das Integral über einen homologen sehr kleinen Kreis um die interessante Stelle  $z_0$ . Dabei ist es nicht wichtig, dass dieses zweite Integral über kleine Kreise geht, jede andere Familie von 1-Zyklen  $c_\delta$  tut es auch, wenn sie für  $\delta \rightarrow 0$  gegen  $z_0$  "konvergiert" und wenn

$$\int_{c_\delta} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i. \quad (29)$$

Deshalb gilt die Cauchysche Integralformel auch in der Situation der Beispiele 47 und 48, denn dafür gilt (29), und das kleine Rechteck, kann man beliebig klein machen. Ist also etwa  $f$  holomorph im Gebiet  $G$ ,  $A$  ein abgeschlossener Kreisring in  $G$  und  $z_0$  ein innerer Punkt dieses Kreisrings, so ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

$\square$

## 5 Anwendungen des Integralsatzes

Die schönsten Anwendungen haufenweise:

- Taylorentwicklung
- Einmal differenzierbar - immer differenzierbar
- Ganze Funktionen mit beschränktem Wachstum sind sehr speziell
- Ein einfacher Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra
- Existenz holomorpher Stammfunktionen
- Wie holomorphe Funktionen bei ihren Nullstellen aussehen
- Satz von der Gebietstreue
- Maximumprinzip
- Das Lemma von Schwarz-Pick und die biholomorphen Automorphismen von  $\mathbb{D}$
- Hyperbolische Geometrie
- Ein unkonventioneller Beweis zum Satz von Cayley-Hamilton

**Satz 51 (Taylorentwicklung).** Seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in G$  und die offene Kreisscheibe  $U = U_R(z_0)$  um  $z_0$  vom Radius  $R > 0$  enthalten in  $G$ . Dann gilt für alle  $z \in U$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}},$$

wo  $0 < r < R$  beliebig ist. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist insbesondere  $\geq R$ .

*Beweis.* Sei  $z_1 \in U$ . wähle ein  $r > 0$  mit  $|z_1 - z_0| < r < R$ . Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{z - z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^k \right) dz. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass  $\left| \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{|z_1 - z_0|}{r} < 1$ , wenn  $z$  auf dem Kreis  $c([0, 1])$  liegt. Deshalb konvergiert die geometrische Reihe. Und deshalb besitzt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} \left( \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^k$$

für  $|z - z_0| = r$  die konstante konvergente Majorante  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|}{r} \left( \frac{|z_1 - z_0|}{r} \right)^k$ . Also kann man die Summe aus dem Integral herausziehen<sup>4</sup>. Man erhält:

$$f(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} \right) (z_1 - z_0)^k.$$

<sup>4</sup>Folgt zum Beispiel aus dem Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue

Die Unabhängigkeit von  $r$  folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz für den Kreisring.  $\square$

**Korollar 52.** *Holomorphe Funktionen sind beliebig oft differenzierbar.*

**Korollar 53 (Umkehrsatz).** *Sind  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in G$  mit  $f'(z_0) \neq 0$ , so besitzt  $f$  lokal bei  $z_0$  ein holomorphes Inverses: Es gibt eine offene Umgebung  $U$  von  $z_0$  in  $G$ , so dass gilt:*

- (i)  $f|_U$  ist injektiv,
- (ii)  $f(U)$  ist offen,
- (iii)  $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph.

Holomorphe Abbildungen mit holomorphem Inversen nennt man auch *biholomorph*. Also sind holomorphe Abbildungen mit nicht-verschwindender Ableitung lokal biholomorph.

*Beweis.* Weil  $f$  reell stetig differenzierbar und die reelle Ableitung in  $z_0$  invertierbar ist, besitzt  $f$  nach dem Umkehrsatz lokal ein stetig differenzierbares Inverses. Ist die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  invertierbar und  $\mathbb{C}$ -linear, so ist auch  $A^{-1}$   $\mathbb{C}$ -linear (Beweis?). Daher ist die lokale Inverse von  $f$  ebenfalls holomorph.  $\square$

**Korollar 54.** *Sei  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Sei  $0 < r < R$  und sei  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z$  mit  $|z - z_0| \leq r$ . Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$*

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}. \quad (30)$$

*Beweis.*

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^k}.$$

$\square$

**Korollar 55 (Cauchysche Integralformel für die Ableitung).** *Sei  $f$  holomorph auf der offenen Menge  $G$  und  $K$  eine in  $G$  enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe. Dann gilt für alle  $z_0$  im Inneren von  $K$  und alle  $k \in \mathbb{N}$*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

*Beweis.* Falls  $z_0$  der Mittelpunkt von  $K$  ist, folgt das aus der Formel im Satz 51. Aber wie im Beweis der Cauchyschen Integralformel folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \int_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

für einen kleinen Kreis  $\tilde{K} \subset K$  mit Mittelpunkt  $z_0$ .  $\square$

**Lemma 56.** Sei  $p(z)$  ein Polynom vom Grad  $= n > 0$ . Dann gibt es  $R, A, B, C > 0$  mit

$$C|z|^n \leq |p(z)| \leq B|z|^n \text{ f\"ur alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R$$

und

$$|p(z)| \leq A + B|z|^n \text{ f\"ur alle } z \in \mathbb{C}.$$

*Beweis.* Zun\"achst l\"a\ss t sich  $p(z)$  schreiben als

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = z^n \left( \frac{a_0}{z^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_n}{1} \right) =: z^n(g(z) + a_n)$$

mit  $a_n \neq 0$ . Weil  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ , gibt es  $R > 0$  mit  $|g(z)| \leq \frac{|a_n|}{2}$  f\"ur alle  $|z| \geq R$ . Dann folgt f\"ur diese  $z$

$$\left( |a_n| - \frac{|a_n|}{2} \right) |z|^n \leq |p(z)| \leq \left( |a_n| + \frac{|a_n|}{2} \right) |z|^n.$$

Mit  $A := \max_{|z| \leq R} |p(z)|$  folgt die zweite Gleichung. □

Ganze Funktionen waren auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktionen. F\"ur sie gilt:

**Satz 57.** Seien  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ganz,  $A, B > 0$  und  $|f(z)| \leq A + B|z|^n$  f\"ur alle  $z$ . Dann ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$ .

*Beweis.* Nach Korollar 54 gilt f\"ur den  $k$ -ten Taylorkoeffizienten von  $f$  bei  $k > n$

$$|a_k| \leq \frac{A + Br^n}{r^k} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist  $a_k = 0$  f\"ur alle  $k > n$  und  $f$  ein Polynom. □

**Korollar 58 (Satz von Liouville).** Jede beschr\"ankte ganze Funktion ist konstant.

**Korollar 59 (Fundamentalsatz der Algebra).** Jedes nicht-konstante komplexe Polynom  $p(z)$  hat eine Nullstelle.

*Beweis.* Annahme:  $p$  hat keine Nullstelle. Dann ist  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$  eine ganze Funktion. Ist  $n$  der Grad von  $p$ , so folgt aus Lemma 56 mit den dortigen Bezeichnungen

$$|f(z)| \leq \frac{1}{C|z|^n} \leq \frac{1}{CR^n} \text{ f\"ur } |z| \geq R.$$

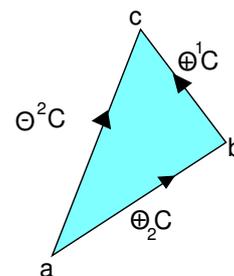
Weil  $f$  stetig ist, nimmt die Einschr\"ankung auf  $\{z \mid |z| \leq R\}$  ihr Maximum an. Damit ist  $f$  beschr\"ankt und nach dem Satz von Liouville konstant. Widerspruch! □

Ein Dreieck mit den Ecken  $a, b, c \in \mathbb{C}$  ist das singul\"are Quadrat mit

$$C(s, t) = (1-s)a + s(1-t)b + stc.$$

Beachten Sie: Die Koeffizienten sind  $\geq 0$  mit Summe = 1, deshalb ist die Bildmenge von  $C$  gerade die konvexe H\"ulle der drei Ecken.

Der Rand  $\partial C$  ist in der Abbildung skizziert, die Seite  ${}_1C$  ist auf den Punkt  $a$  zusammengeschrumpft.



**Satz 60 (Morera).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\int_{\partial C} f dz = 0$  für jedes Dreieck  $C$  in  $G$ . Dann ist  $f$  holomorph.

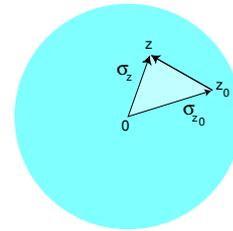
*Beweis.* Weil Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, genügt es den Satz für kreisförmiges  $G$  zu beweisen, und wir nehmen o.E. an, dass 0 der Mittelpunkt des Kreises ist. Wir definieren auf  $G$  eine Funktion

$$F(z) := \int_{\sigma_z} f(\zeta) d\zeta,$$

wo  $\sigma_z(t) := tz$  für  $0 \leq t \leq 1$  die Strecke von 0 nach  $z$  ist. Wir wollen zeigen, dass  $F$  holomorph mit Ableitung  $f$  ist. Dann ist auch  $f$  holomorph.

Sind  $z_0, z \in G$ , so gilt für das Dreieck  $C$  mit den Ecken 0,  $z_0$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned} {}^1C(t) &= (1-t)z_0 + tz, \\ {}_1C(t) &= 0, \\ {}^2C(t) &= tz = \sigma_z(t), \\ {}_2C(t) &= tz_0 = \sigma_{z_0}(t). \end{aligned}$$



Nach Voraussetzung ist

$$0 = \int_{\partial C} f(z) dz = \int_{{}^1C} f(z) dz - \int_{{}^2C} f(z) dz + \int_{{}_2C} f(z) dz.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \left( \int_{\sigma_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\sigma_{z_0}} f(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{z - z_0} \int_{{}^1C} f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)(z - z_0) dt = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) dt \\ &= f(z_0) + \int_0^1 (f((1-t)z_0 + tz) - f(z_0)) dt. \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von  $f$  folgt aus dem Schrankensatz 36, dass  $F$  holomorph mit  $F' = f$  ist. Also ist auch  $f$  holomorph.  $\square$

Ist  $f$  holomorph in  $G$ , so verschwindet nach dem Cauchyschen Integralsatz das Integral über den Rand eines jeden Dreiecks. Ist  $G$  konvex, so liefert der obige Beweis des Satzes von Morera die Existenz einer globalen Stammfunktion:

**Satz 61.** Jede holomorphe Funktion besitzt lokale Stammfunktionen. Jede holomorphe Funktion in einem konvexen Gebiet besitzt eine Stammfunktion.

**Korollar 62.** Jede ganze Funktion  $f$  ohne Nullstellen ist von der Form

$$f(z) = e^{h(z)}$$

mit einer ganzen Funktion  $h(z)$ .

*Beweis.* Aus  $f(z) = e^{h(z)}$  folgt durch Differenzieren  $f' = h'f$ , also  $h' = \frac{f'}{f}$ . Aber die holomorphe Funktion  $\frac{f'}{f}$  besitzt auf der konvexen Menge  $\mathbb{C}$  eine Stammfunktion  $h$ . Wir können diese außerdem so wählen, dass

$$e^{h(0)} = f(0) \tag{31}$$

ist. Dann ist

$$(fe^{-h})' = (f' - f\frac{f'}{f})e^{-h} = 0,$$

also  $f = \text{const} \cdot e^h$ , und wegen (31) ist die Konstante  $= 1$ . □

**Definition 63 (Nullstellenordnung).** Ist  $z_0$  eine Nullstelle der auf der offenen Menge  $G$  holomorphen Funktion  $f$ , so heißt

$$\text{Ord}(f, z_0) := \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0 \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

die *Ordnung* oder *Vielfachheit* der Nullstelle.

In einer Nullstelle  $z_0$  *unendlicher* Ordnung der holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  verschwinden also alle Ableitungen von  $f$ , und nach dem Satz von Taylor ist  $f = 0$  auf einer Umgebung von  $z_0$ . Die Menge der Nullstellen unendlicher Ordnung ist also offen.

Um eine Nullstelle der *endlichen* Ordnung  $n$  hat man nach Taylor eine Darstellung

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^k =: (z - z_0)^n g(z)$$

mit einer holomorphen Funktion  $g$ , für die  $g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0$ . Insbesondere gibt es um  $z_0$  eine Umgebung, in der  $z_0$  die einzige Nullstelle von  $f$  ist: Die Nullstellen endlicher Ordnung sind *isoliert*. Weil die Menge aller Nullstellen von  $f$  abgeschlossen in  $G$  ist, ist daher die Menge der Nullstellen unendlicher Ordnung ebenfalls abgeschlossen.

Wir erinnern daran, dass ein *Gebiet* eine zusammenhängende offene Menge ist, und fassen zusammen:

**Satz 64.** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Dann gilt

(i)  $n = \infty$  und  $f = 0$  oder

(ii)  $n$  ist endlich, und es gibt eine auf  $G$  holomorphe Funktion  $g$  mit

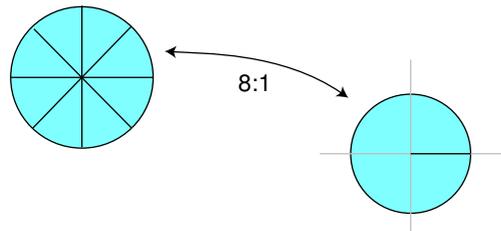
$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \text{ und } g(z_0) \neq 0, \tag{32}$$

Insbesondere ist  $z_0$  eine *isolierte* Nullstelle.

**Korollar 65 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen).** Sind  $f_1$  und  $f_2$  holomorph im Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und stimmen sie überein auf einer Teilmenge von  $G$ , die in  $G$  einen Häufungspunkt besitzt, so folgt  $f_1 = f_2$  auf  $G$ .

*Beweis.* Besitzen die Nullstellen von  $f_1 - f_2$  in  $G$  einen Häufungspunkt, so ist dieser aus Stetigkeitsgründen eine Nullstelle von  $f_1 - f_2$ , und offenbar keine isolierte, also eine Nullstelle unendlicher Ordnung. Daher ist  $f_1 - f_2 = 0$ .  $\square$

Die Formel (32) kann man so interpretieren, dass  $f$  in der Nähe einer Nullstelle  $z_0$  der Ordnung  $n$  "im Wesentlichen" so aussieht, wie die Abbildung  $(z - z_0)^n$ , die den punktierten Kreis  $\{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$   $n$ -mal auf den punktierten Kreis  $\{w \mid 0 < |w| < r^n\}$  aufwickelt:



Wir wollen das noch präzisieren. Dazu zunächst ein Lemma.

**Lemma 66 (Wurzelfunktionen).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und sei  $z_0 \in G$  ein Punkt mit  $f(z_0) \neq 0$ . Dann besitzt  $f$  auf einer Umgebung von  $z_0$  für jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  eine holomorphe  $n$ -te Wurzel.

Genauer: Ist  $a \in \mathbb{C}$  eine  $n$ -te Wurzel aus  $f(z_0)$  (wovon es  $n$  verschiedene gibt), so gibt es eine holomorphe Funktion  $g$  auf einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  mit

$$g^n = f|_U \text{ und } g(z_0) = a.$$

*Beweis.* Die Ableitung der holomorphen Abbildung  $z \mapsto z^n$  hat in  $a$  keine Nullstelle, also gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung  $W$  von  $f(z_0)$  und darauf eine holomorphe Funktion  $w : W \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $w(f(z_0)) = a$  und  $w^n(z) = z$  für alle  $z \in W$ . Weil  $f$  stetig ist, gibt es eine Umgebung  $U \subset G$  von  $z_0$  mit  $f(U) \subset W$ , und wir setzen  $g := w \circ f|_U$ . Dafür ist dann  $g^n = w^n \circ f|_U = f|_U$  und  $g(z_0) = a$ .  $\square$

**Satz 67 (Nullstellensatz).** Sei  $z_0$  eine Nullstelle der endlichen Ordnung  $n$  der holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

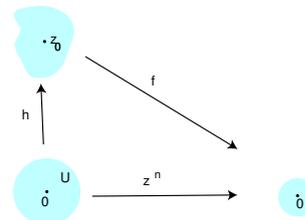
Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung

$$h : U \rightarrow V$$

einer offenen Kreisscheibe  $U$  vom Radius  $r$  um  $0$  auf eine offene Umgebung  $V$  von  $z_0$  in  $G$ , so dass auf  $U$

$$f(h(z)) = z^n.$$

Bis auf eine biholomorphe Transformation "sieht  $f$  bei  $z_0$  so aus wie  $z^n$  bei  $0$ ." Insbesondere nimmt  $f$  in  $V$  jeden Wert  $w$  mit  $0 < |w| < r^n$  genau  $n$ -mal an.



*Beweis.* Nach (32) und dem Lemma haben wir

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) = ((z - z_0)\tilde{g}(z))^n$$

mit einer holomorphen Funktion  $\tilde{g}$ . Die Abbildung

$$k(z) := (z - z_0)\tilde{g}(z)$$

hat Ableitung  $k'(z_0) = \tilde{g}(z_0) \neq 0$ , und nach dem Umkehrsatz bildet sie deshalb eine offene Umgebung von  $z_0$  biholomorph auf eine offene Umgebung  $U$  von  $k(z_0) = 0$  ab. Ohne Einschränkung ist  $U$  ein Kreis um 0. Aus  $f(z) = k(z)^n$  folgt für  $h := k^{-1}$  die Behauptung.  $\square$

**Korollar 68 (Satz von der Gebietstreue).** *Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht konstant auf dem Gebiet  $G$ , so ist  $f(G)$  ein Gebiet.*

*Beweis.*  $f(G)$  ist als Bild einer zusammenhängenden Mengen unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend. Ist  $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ , so ist  $z_0$  eine Nullstelle von  $f(z) - w_0$ . Die Ordnung ist endlich, weil  $f$  nicht konstant ist, und nach dem vorstehenden Satz bildet  $f(z) - w_0$  eine Umgebung von  $z_0$  surjektiv auf eine Umgebung von 0 ab. Also bildet  $f$  eine Umgebung von  $z_0$  surjektiv auf eine Umgebung von  $w_0$  ab. Damit ist jeder Punkt von  $f(G)$  ein innerer Punkt.  $\square$

**Korollar 69 (Maximumprinzip).** *Sei  $f$  holomorph in der offenen Menge  $G$ .*

- (i) *Ist  $G$  ein Gebiet und nimmt  $|f|$  in  $G$  sein Maximum an, so ist  $f$  konstant.*
- (ii) *Ist  $K \subset G$  kompakt, so nimmt die Einschränkung von  $|f|$  auf  $K$  ihr Maximum an, aber nicht in einem inneren Punkt von  $K$ .*

*Beweis.* Klar, weil  $f(G)$  für nicht-konstantes  $f$  nach dem Satz von der Gebietstreue eine offene Menge ist.  $\square$

**Satz 70 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip).** *Die offene Menge  $G \subset \mathbb{C}$  gehe bei Spiegelung an der reellen Achse in sich über.*

*Die Funktion  $f : G \cap \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig,*

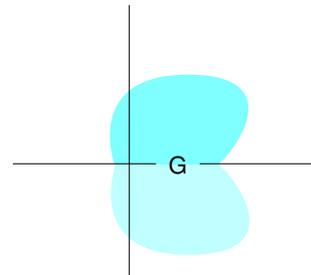
*auf  $G \cap \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  holomorph und*

*auf  $G \cap \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$  reellwertig.*

*Dann ist die auf  $G$  definierte Fortsetzung*

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{für } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

*holomorph.*



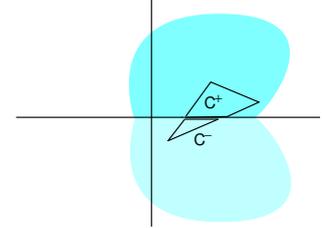
*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $\tilde{f}$  holomorph im Bereich  $\text{Im } z > 0$ , und weil die komplexe Konjugation anti- $\mathbb{C}$ -linear ist, ist  $\tilde{f}$  auch im Bereich  $\text{Im } z < 0$  holomorph. Wir wollen den Satz von Morera anwenden.

1. Fall. Wenn eine 2-Kette  $C$  die reelle Achse nicht trifft, ist  $\int_{\partial C} \tilde{f}(z) dz = 0$  nach dem Cauchyschen Integralsatz. Wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt dasselbe für 2-Ketten, die in der abgeschlossenen oberen oder unteren Halbebene liegen. Insbesondere gilt das für Dreiecke, die in einer abgeschlossenen Halbebene liegen.

2. Fall. Ein Dreieck  $C$ , welches beide offenen Halbebenen trifft, bestimmt eine 2-Kette  $C^+ \oplus C^-$  aus zwei singulären Quadraten, die jeweils in einer abgeschlossenen Halbebene liegen, und für die

$$\int_{\partial C} \tilde{f}(z) dz = \int_{\partial C^+} \tilde{f}(z) dz + \int_{\partial C^-} \tilde{f}(z) dz$$

gilt. Das Integral von  $\tilde{f}$  über den Rand jedes dieser Quadrate verschwindet nach dem 1. Fall. Also ist auch hier  $\int_{\partial C} \tilde{f}(z) dz = 0$  und  $\tilde{f}$  nach Morera holomorph.



□

**Satz 71 (Lemma von Schwarz).** Sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1 \tag{33}$$

und

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}. \tag{34}$$

Gilt in (33) oder für ein  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  in (34) Gleichheit, so ist  $f$  eine Drehung  $f(z) = az$  mit  $|a| = 1$ .

*Beweis.* Wir nehmen o.E. an, dass  $f \neq 0$ . Nach Satz 64 hat man eine Darstellung

$$f(z) = zg(z)$$

mit holomorphem  $g$ , für das  $g(0) = f'(0)$ .

Sei  $z \in \mathbb{D}$ . Nach dem Maximumprinzip gilt dann für alle  $r$  mit  $|z| \leq r < 1$

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Mit  $r \nearrow 1$  folgt  $|g(z)| \leq 1$  und damit  $|f'(0)| \leq 1$  und  $|f(z)| \leq |z|$ . Bei Gleichheit gibt es ein  $z_0 \in \mathbb{D}$  mit  $|g(z_0)| = 1$ , d.h.  $|g|$  nimmt sein Maximum im Inneren von  $\mathbb{D}$  an und ist deshalb konstant. Dann ist  $f(z) = g(z_0)z$  eine Drehung.

□

**Satz 72 (Lemma von Schwarz-Pick).** Sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph. Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}. \tag{35}$$

Gleichheit für ein  $z$  impliziert Gleichheit für alle  $z$ , und das ist genau dann der Fall, wenn  $f$  eine Möbiustransformation von  $\mathbb{D}$  auf sich ist, vgl. Satz 31.

*Beweis.* Sei  $z_0 \in \mathbb{D}$ . Wir erinnern an Satz 31 und definieren

$$\phi_1(z) := \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \quad \phi_2(z) := \frac{z - f(z_0)}{1 - f(z_0)z}$$

und betrachten die holomorphe Abbildung  $F := \phi_2 \circ f \circ \phi_1$ . Offenbar ist  $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  und  $F(0) = \phi_2(f(z_0)) = 0$ . Mit dem Lemma von Schwarz folgt

$$1 \geq |F'(0)| = |\phi_2'(f(z_0))f'(z_0)\phi_1'(0)|.$$

Nach Satz 31 erfüllt die Ableitung eines Möbius-Automorphismus  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  die Gleichung

$$|\phi'(z)| = \frac{1 - |\phi(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Das liefert in unserem Falle

$$|\phi_1'(0)| = \frac{1 - |z_0|^2}{1}, \quad |\phi_2'(f(z_0))| = \frac{1}{1 - |f(z_0)|^2},$$

also

$$1 \geq |F'(0)| = \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |f(z_0)|^2} |f'(z_0)|$$

und damit die behauptete Ungleichung. Gilt Gleichheit für ein  $z_0$ , so ist  $F$  eine Drehung, also eine Möbiustransformation von  $\mathbb{D}$  auf sich, und daher ist auch  $f$  eine solche. Dass dann in (35) die Gleichheit gilt, haben wir bereits in Satz 31 nachgerechnet.  $\square$

**Korollar 73 (Automorphismen von  $\mathbb{D}$ ).** *Ist  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph und bijektiv, also biholomorph, so ist  $f$  eine Möbiustransformation, also von der Form*

$$f(z) = e^{i\phi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

mit  $z_0 \in \mathbb{D}, \phi \in \mathbb{R}$ , vgl. Satz 31. Nach dem letzteren Satz ist umgekehrt jede solche Möbiustransformation eine biholomorphe Abbildung von  $\mathbb{D}$  auf sich.

*Beweis.* Anwendung des Lemmas von Schwarz-Pick auf  $f^{-1}$  an der Stelle  $f(z)$  liefert

$$\frac{|1/f'(z)|}{1 - |z|^2} \leq \frac{1}{1 - |f(z)|^2}$$

oder

$$\frac{|1|}{1 - |z|^2} \leq \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}.$$

Aus demselben Lemma angewendet auf  $f$  folgt daher Gleichheit, und  $f$  ist eine Möbiustransformation. Die spezielle Gestalt folgt dann aus Satz 31.  $\square$

## Die hyperbolische Ebene und eine differentialgeometrische Interpretation des Schwarz-Pick-Lemmas

Die Klassifikation der biholomorphen Automorphismen von  $\mathbb{D}$  ist sicher eine interessante Anwendung des Lemmas von Schwarz/Pick, aber die Bedeutung der Ungleichung (35) bleibt doch unklar. Sie wird erst durch eine differentialgeometrische Interpretation verständlich, wie ich nun erklären will.

Für stetig differenzierbare Kurven  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$L(c) := \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$$

die übliche (Euklidische) Länge. Wenn man sich vorstellt, der Weg  $c$  führe durch verschiedenes "Gelände", in dem man leichter oder schwerer vorankommt, so kann man den Schwierigkeitsgrad vielleicht durch eine positive Funktion  $\rho$  beschreiben und die "gefühlte" Weglänge definieren als

$$L_\rho(c) := \int_a^b \rho(c(t)) |\dot{c}(t)| dt$$

Dieser Beschreibung liegt ein "isotropes" Gelände zugrunde: Wie gut man vorankommt hängt nur davon ab, wo man gerade ist, nicht auch, in welche Richtung man sich bewegt, sonst wäre  $\rho$  auch noch von der Richtung  $\dot{c}$  abhängig. Wir beschränken uns auf den isotropen Fall und betrachten für Kurven in  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  eine ganz spezielle Funktion  $\rho$ :

$$L_\rho(c) := \int_a^b \frac{2}{1 - |c(t)|^2} |\dot{c}(t)| dt$$

heißt die *hyperbolische Länge* der Kurve  $c$  und  $\mathbb{D}$  mit dieser Längenmessung die *hyperbolische Ebene* oder auch die *Poincaré-Ebene*. Die Längenmessung nennt man auch die *Poincaré-Bergmann-Metrik*. Sie spielt als Modell der sogenannten *Nichteuklidischen Geometrie* eine wichtige Rolle in verschiedenen Bereichen der elementaren wie der Differentialgeometrie. Man erhält sie also durch Integration der hyperbolischen Geschwindigkeitsnorm

$$\|\dot{c}\|_c := \frac{2}{1 - |c|^2} |\dot{c}|.$$

Ist nun  $c$  eine Kurve in  $\mathbb{D}$  und  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph, so gilt nach dem Lemma von Schwarz-Pick für die Euklidische Norm

$$\left\| \frac{d}{dt}(f \circ c) \right\|_{f \circ c} = \frac{2|f' \circ c|}{1 - |f \circ c|^2} |\dot{c}| \leq \frac{2}{1 - |c|^2} |\dot{c}| = \|\dot{c}\|_c$$

Wir erhalten

**Satz 74 (Geometrische Version des Schwarz-Pick-Lemmas).** *Holomorphe Abbildungen von  $\mathbb{D}$  in sich kontrahieren die hyperbolische Länge.*

**Korollar 75.** *Biholomorphe Automorphismen, also Möbiustransformationen von  $\mathbb{D}$  auf(!) sich, erhalten die hyperbolische Länge, sie sind Isometrien.*

Dieses Korollar besitzt eine Umkehrung: Ist  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  eine hyperbolische Isometrie, gilt also für alle  $z \in \mathbb{D}$  und  $v \in \mathbb{C}$

$$\frac{2|d_z f(v)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{2|v|}{1 - |z|^2},$$

so ist  $d_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  also bis auf einen Faktor  $\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$  eine Euklidische Isometrie und deshalb auch winkeltreu, d.h. konform. Erhält  $f$  darüber hinaus auch die Orientierung, so ist  $f$  nach Satz 18 also holomorph und damit eine Möbiustransformation.

Wir fassen zusammen:

**Satz 76.** Die folgenden Gruppen von Transformationen sind gleich:

- Die Gruppe der biholomorphen Abbildungen von  $\mathbb{D}$  auf sich.
- Die Gruppe der Möbiustransformationen von  $\mathbb{D}$  auf sich.
- Die Gruppe der orientierungstreuen Isometrien der hyperbolischen Ebene auf sich.

Wir untersuchen nun noch folgende Fragen: Gibt es zu zwei Punkten  $z_1, z_2$  eine verbindende Kurve kürzester hyperbolischer Länge? Wenn "ja", wie lang ist diese? Wir nehmen o.E. an, dass  $z_1 \neq z_2$ . Weil Möbiustransformationen hyperbolische Isometrien sind, also die Kurvenlänge erhalten, können wir o.E. annehmen, dass  $z_1 = 0$  und  $z_2 = z \in \mathbb{R}, z > 0$ . Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  eine stetig differenzierbare Kurve von 0 nach  $z$ . Weil wir auf der Suche nach kürzesten Kurven sind, nehmen wir an, dass  $c(t) = 0$  nur für  $t = a$ . Dann besitzt  $c$  eine Polarkoordinatendarstellung

$$c(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$$

mit wenigstens auf  $]a, b]$  stetig differenzierbaren  $r$  und  $\phi$ . Wir finden

$$L_\rho(c) = \int_a^b \frac{2|\dot{r}(t) + ir(t)\dot{\phi}(t)|}{1-r(t)^2} dt \leq \int_a^b \frac{2|\dot{r}(t)|}{1-r(t)^2} dt,$$

weil  $\dot{r}(t)$  und  $ir(t)\dot{\phi}(t)$  im  $\mathbb{R}^2$  senkrecht aufeinander stehen. Die Kurve  $\tilde{c}(t) := r(t)$  ist also höchstens so lang, wie  $c$ , und man sieht leicht, dass sie genau dann am kürzesten ist, wenn  $r$  von  $r(a) = 0$  nach  $r(b) = z$  monoton wachsend ist. Daher ist die monoton parametrisierte Strecke  $c(t) = tz, 0 \leq t \leq 1$  eine kürzeste Kurve von 0 nach  $z$ . Ihre Länge ist

$$L_\rho(c) = \int_0^1 \frac{2}{1-t^2z^2} z dt = \int_0^z \frac{2}{1-u^2} du = \log \frac{1+z}{1-z}.$$

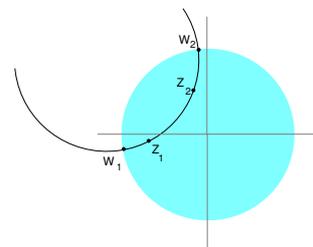
Nun ist

$$\frac{1+z}{1-z} = DV(0, +1, z, -1)$$

das Doppelverhältnis der vier Punkte  $0, 1, z, -1$  auf dem "reellen" Kreisdurchmesser. Eine Möbiustransformation  $f$  von  $\mathbb{D}$  auf sich, die  $0$  und  $z$  in Punkte  $z_1$  und  $z_2$  transformiert, bildet diesen Durchmesser ab auf das eindeutig bestimmte Kreissegment durch  $z_1$  und  $z_2$ ,

welches den Rand von  $\mathbb{D}$  orthogonal in Punkten  $f(-1) = w_1$  und  $f(+1) = w_2$  schneidet. Das Kreissegment zwischen  $z_1$  und  $z_2$  ist dann bei monotoner Parametrisierung eine kürzeste Kurve von  $z_1$  nach  $z_2$  und deren Länge ist wegen der Möbius-Invarianz des Doppelverhältnisses gegeben durch

$$L_\rho = \log DV(z_1, w_2, z_2, w_1) =: d_\rho(z_1, z_2).$$



Weil  $d_\rho(z_1, z_2)$  die hyperbolische Länge einer kürzesten verbindenden stetig differenzierbaren Kurve ist, ist klar, dass  $d_\rho$  die hyperbolische Ebene  $\mathbb{D}$  zu einem metrischen Raum macht.

Für  $z$  mit  $|z| \leq r < 1$  ist  $2 \leq \frac{2}{1-|z|^2} \leq \frac{2}{1-r^2}$ . Daraus folgt für  $z_1, z_2$  mit  $|z_j| \leq r$

$$2|z_1 - z_2| \leq d_\rho(z_1, z_2) \leq \frac{2}{1-r^2}|z_1 - z_2|. \quad (36)$$

Weil  $d_\rho(0, z) \rightarrow \infty$  für  $|z| \rightarrow 1$  und weil jede  $d_\rho$ -Cauchyfolge beschränkt ist, liegt also jede solche Cauchyfolge in einem Kreis von Radius  $r < 1$  und ist nach (36) dann auch eine Cauchyfolge in der Euklidischen Metrik. Sie ist also Euklidisch und deshalb nach (36) auch hyperbolisch konvergent: Die hyperbolische Ebene mit der Metrik  $d_\rho$  ist vollständig.

**Bemerkung.** Das Lemma von Schwarz stammt von 1869, die Verallgemeinerung und damit zusammen die Interpretation im Rahmen der hyperbolischen Geometrie ist von G. Pick 1916 veröffentlicht worden. Robert Osserman (Notices AMS 1999) wundert sich zu Recht darüber, dass dieser Zusammenhang weder Felix Klein noch Henri Poincaré aufgefallen ist.

Wir schließen mit einer Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf den Beweis eines klassischen Satzes der linearen Algebra. Der Beweis stammt von Charles A. McCarthy (The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 4 (Apr., 1975), pp. 390-391). Dazu muss man folgendes wissen:

- Eine matrixwertige Funktion heißt holomorph, wenn sie in jeder Komponente holomorph ist.
- Matrixwertige Funktionen integriert man komponentenweise.

Der Cauchysche Integralsatz liefert dann also  $\int_{\partial C} B(z)dz = 0$  für jede holomorphe Funktion  $B : \mathbb{C} \supset G \rightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$  und stetig differenzierbare 2-Kette  $C$  in  $G$ .

**Satz 77 (Cayley-Hamilton).** Ist  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  eine komplexe Matrix mit charakteristischem Polynom  $\chi_A$ , so gilt  $\chi_A(A) = 0$ .

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $E$  die  $n$ -reihige Einheitsmatrix. Die Laurentreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} A^k$$

mit Koeffizienten in  $M(n \times n, \mathbb{C})$  hat für  $|z| \geq 2\|A\|$  die konvergente Majorante  $\frac{1}{2\|A\|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ , ist also absolut konvergent, und erfüllt offenbar

$$(zE - A) \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} A^{k+1} = E.$$

Also ist  $zE - A$  für  $|z| \geq 2\|A\|$  invertierbar mit

$$(zE - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} A^k.$$

Mit gliedweiser Integration folgt für alle  $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} z^j (zE - A)^{-1} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} z^{j-(k+1)} A^k dz = A^j,$$

weil  $z^m$  in  $\mathbb{C}^*$  für alle  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  eine Stammfunktion besitzt. Daraus folgt unmittelbar für jedes Polynom  $p(z)$  eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel:

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} p(z)(zE - A)^{-1} dz.$$

Nun wissen wir aus der Cramerschen Regel, dass  $A^{-1} = \det A^{-1} M(A)$ , wobei  $M(A)$  aus den Minoren von  $A$  gebildet, also ganz-rational in den Koeffizienten von  $A$  ist. Daher ist

$$(zE - A)^{-1} = \det(zE - A)^{-1} B(z)$$

mit in  $z$  ganzrationalen Komponenten von  $B$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} \chi_A(z)(zE - A)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} \det(zE - A) \det(zE - A)^{-1} B(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} B(z) dz = 0. \end{aligned}$$

□

## 6 Die Poissonformel und das Dirichlet-Problem im Kreis

- Wir leiten zunächst eine andere Version der Cauchyschen Integralformel für holomorphe Funktionen im Kreis her, die sogenannte Poissonformel, und geben für diese eine sehr anschauliche Interpretation.
- Weil die harmonischen Funktionen im Kreis nach dem Lemma von Poincaré gerade die Realteile von holomorphen Funktionen sind, erhalten wir eine analoge Formel für harmonische Funktionen.
- Wir betrachten mit dem Dirichletproblem im Kreis eines der fundamentalen Probleme der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und damit der reellen Analysis, nämlich die Aufgabe, eine vorgegebene stetige Funktion auf dem Rand eines Kreises stetig auf die ganze Kreisscheibe so fortzusetzen, dass die Fortsetzung im Inneren harmonisch ist. Wir wollen die Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung dieses Problems beweisen.

Wir betrachten eine holomorphe Funktion auf einer offenen Umgebung des abgeschlossenen Kreises  $K = \{z \mid |z| \leq R\}$  und ein  $z$  aus dem Inneren dieses Kreises. Die Cauchysche Integralformel liefert

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{iRe^{it}}{Re^{it} - z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{Re^{it}}{Re^{it} - z} dt. \end{aligned}$$

Weil  $\frac{R^2}{\bar{z}} \notin K$  ist, liefert der Cauchysche Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - R^2/\bar{z}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{Re^{it}}{Re^{it} - R^2/\bar{z}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{\bar{z}}{\bar{z} - Re^{-it}} dt. \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \left( \frac{Re^{it}}{Re^{it} - z} + \frac{\bar{z}}{Re^{-it} - \bar{z}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt \end{aligned}$$

und damit eine neue Version der Cauchyschen Integralformel, die nun allerdings wirklich an den Kreis gebunden ist:

**Satz 78 (Poissonsche Integralformel für holomorphe Funktionen).** Seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $R > 0$  und  $\{z \mid |z| \leq R\} \subset G$ . Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt.$$

für alle  $z$  mit  $|z| < R$ .

Für  $z = 0$  liefert die Poissonformel eine *Mittelwertformel*

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) dt.$$

die man natürlich auch einfacher direkt aus der Cauchyschen Integralformel erhält. Für andere Punkte als den Mittelpunkt muss man die Funktionswerte von  $f$  auf dem Rand des Kreises mit einer Gewichtung mitteln, für die H.A. Schwarz eine sehr hübsche geometrische Interpretation gegeben hat:

Wir betrachten die Spiegelung der Kreislinie  $\partial K$  am Punkt  $z$ , die jedem  $\zeta \in \partial K$  den anderen Schnittpunkt  $\sigma(\zeta)$  der Sekante durch  $\zeta$  und  $z$  zuordnet. Dann ist

$$\frac{d}{dt} \sigma(Re^{it}) = \lambda R \underbrace{\frac{i\sigma(Re^{it})}{R}}_{\text{tangentialer Einheitsvektor}}$$

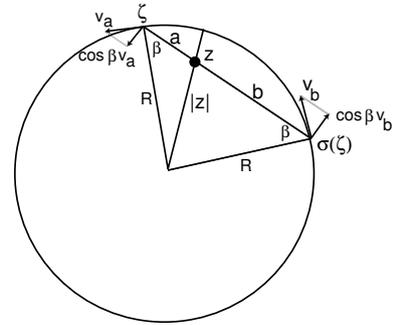
mit einer reellen Konstanten  $\lambda$ , welche das Verhältnis der Geschwindigkeiten von  $\sigma(Re^{it})$  zu  $Re^{it}$  beschreibt. (Die Geschwindigkeit von  $Re^{it}$  ist vom Betrag  $R$ , daher das  $R$  auf der rechten Seite.) Wir bestimmen  $\lambda$  geometrisch:

Nach dem Sekantensatz ist das Produkt  $ab$  der Sekantenabschnitte konstant und zwar ist

$$ab = (R + |z|)(R - |z|) = R^2 - |z|^2.$$

Diesen Wert erhält man nämlich, wenn die Sekante durch den Mittelpunkt geht. Das gesuchte Geschwindigkeitsverhältnis ist daher mit den Bezeichnungen der Abbildung

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{\cos \beta v_b}{\cos \beta v_a} = \frac{b}{a} = \frac{b^2}{ab} = \frac{|\sigma(\zeta) - z|^2}{R^2 - |z|^2}.$$



Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \sigma(Re^{it}) = \frac{b}{a} i\sigma(Re^{it}) = \frac{b^2}{ab} i\sigma(Re^{it}) = \frac{|\sigma(Re^{it}) - z|^2}{R^2 - |z|^2} i\sigma(Re^{it}). \quad (37)$$

Wir mitteln nun die gespiegelte Funktion

$$\tilde{f}(Re^{it}) := f(\sigma(Re^{it}))$$

über den Kreis, d.h. wir berechnen  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(Re^{it}) dt$  und benutzen dazu die Substitution  $Re^{i\phi} := \sigma(Re^{it})$ . Dafür finden wir mit (37) nach Differentiation

$$iRe^{i\phi} d\phi = \frac{|\sigma(Re^{it}) - z|^2}{R^2 - |z|^2} i\sigma(Re^{it}) dt = \frac{|\sigma(Re^{it}) - z|^2}{R^2 - |z|^2} iRe^{i\phi} dt$$

und damit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(Re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi.$$

Wenn man also die Randwertverteilung von  $f$  zunächst an  $z$  spiegelt und dann über den Einheitskreis mittelt, erhält man den Wert  $f(z)$ .

Wir wollen nun Konsequenzen der Poissonformel für **harmonische Funktionen** untersuchen, also für zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

Wir erinnern daran, dass jede harmonische Funktion auf einem konvexen Gebiet nach dem Poincaréschen Lemma der Realteil einer holomorphen Funktion ist.

**Satz 79 (Poissonsche Integralformel für harmonische Funktionen).** Sei  $u(z)$  harmonisch auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$  und sei  $K := \{z \mid |z| < R\}$  eine in  $G$  enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe. Dann gilt für alle  $z$  mit  $0 \leq |z| < R$ :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} d\phi \right].$$

*Beweis.* Weil  $K$  kompakt ist, gibt es  $\epsilon > 0$  mit  $U := \{z \mid |z - a| \leq R + \epsilon\} \subset G$  und eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} f = u$ . Die Behauptung folgt dann aus der Poissonformel für  $f$  durch Übergang zum Realteil.  $\square$

**Korollar 80 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen).** Seien  $u : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch,  $a \in G$ ,  $R > 0$  und  $K := \{z \mid |z - a| \leq R\} \subset G$ . Dann gilt

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it}) dt. \quad (38)$$

*Beweis.* Für  $a = 0$  ist das eine unmittelbare Folgerung aus dem vorstehenden Satz. Für beliebiges  $a$  betrachte  $\tilde{u}(z) = u(z + a)$ .  $\square$

**Korollar 81 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen).** Sei  $u : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch im Gebiet  $G$ . Nimmt  $u$  sein Maximum oder Minimum an, so ist es konstant.

*Beweis.* Nimmt  $u$  sein Maximum  $u_{max}$  in  $a \in G$  an, so ist wegen des Mittelwertsatzes  $u = u_{max}$  auf dem Rand einer jeden Kreisscheibe um  $a$ , die in  $G$  liegt. Damit ist die Menge  $\{z \mid u(z) = u_{max}\}$  offen. Da diese Menge aber auch abgeschlossen ist, ist sie ganz  $G$ .  $\square$

Bisher haben wir harmonische Funktionen auf offenen Mengen betrachtet. Im Rest dieses Abschnittes betrachten wir stetige Funktionen auf kompakten Mengen, die im Inneren der Menge harmonisch sind. Unser Augenmerk gilt also dem Randverhalten harmonischer Funktionen.

**Korollar 82 (Eindeutigkeitssatz für das Dirichlet-Problem).** Seien  $G$  ein Gebiet mit kompakter abgeschlossener Hülle  $\overline{G}$  und  $u_1, u_2 : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige, in  $G$  harmonische Funktionen. Ist  $u_1|_{\partial G} = u_2|_{\partial G}$ , so ist  $u_1 = u_2$ .

*Beweis.* Die Funktion  $u = u_1 - u_2$  verschwindet auf dem Rand von  $G$ . Sie ist stetig auf dem kompakten  $\overline{G}$ , nimmt also Maximum und Minimum an. Nimmt sie das Maximum in einem inneren Punkt an, so nimmt auch  $u|_G$  sein Maximum in einem inneren Punkt an und ist deshalb konstant, also  $u = 0$ . Ebenso für das Minimum. Nimmt aber  $u$  sein Maximum und Minimum auf  $\partial G$  an, so folgt ebenfalls  $u = 0$ .  $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Formel auch die **Existenz einer Lösung** des Dirichlet-Problems für die Kreisscheibe liefert. Sei  $K = \{z \mid |z| \leq R\}$  die Kreisscheibe vom Radius  $R$  und sei  $u_0 : \partial K \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig, d.h. stetig bis auf endlich viele Punkte, in denen

$u_0$  aber “links-” und “rechtsseitig” Grenzwerte haben soll. Für solche  $u_0$  definieren wir  $P_{u_0} : K \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$P_{u_0}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{i\phi}) \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} d\phi \right]. \quad (39)$$

Wir betrachten die eckige Klammer rechts. Der Satz über die Differentiation unter dem Integral (vgl. Analysis III, Satz 41) verlangt, dass die gewünschte Ableitung eine integrierbare Majorante besitzt, was bei beschränkten Funktionen auf einem Kompaktum erfüllt ist. Also kann man an jeder Stelle  $|z| < R$  die partiellen Ableitungen der eckigen Klammer nach  $x$  und  $y$  unter dem Integral ausrechnen und natürlich sind dann die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt: die eckige Klammer ist eine in  $K$  holomorphe Funktion von  $z$ . Die Schwierigkeit beim Dirichlet-Problem ist der Nachweis der Stetigkeit am Rand.

Zunächst ist  $P$  ein lineares Funktional auf dem Vektorraum der stückweise stetigen Funktionen auf  $\partial K$ . Konstante Funktionen  $u_0 = c$  liefern  $P_{u_0} = c$ , wie man ohne Rechnung aus der Interpretation von H.A. Schwarz ersieht, und  $u_0 \geq 0$  impliziert  $P_{u_0} \geq 0$ . Das hat zur Folge, dass

$$m \leq u_0 \leq M \quad \implies \quad m \leq P_{u_0} \leq M. \quad (40)$$

Sei nun  $u_0$  stetig in  $z_0 = Re^{i\phi_0}$ . Wir wollen zeigen, dass dann

$$\lim_{z \rightarrow z_0} P_{u_0}(z) = u_0(z_0). \quad (41)$$

Wir können o.E. annehmen, dass  $u_0(z_0) = 0$ , sonst betrachten wir  $u_0 - u_0(z_0)$ .

Sei also  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$-\epsilon \leq u_0(Re^{i\phi}) \leq +\epsilon$$

für alle  $\phi \in [\phi_0 - \delta, \phi_0 + \delta]$ .

Nach (40) gilt für die stückweise stetige Funktion  $u_1 : \partial K \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$u_1(Re^{i\phi}) = \begin{cases} u_0(Re^{i\phi}) & \text{für } |\phi - \phi_0| \leq \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann

$$-\epsilon \leq P_{u_1}(z) \leq +\epsilon \quad (42)$$

für alle  $z \in K$ .

Andrerseits ist für  $u_2 = u_0 - u_1$

$$P_{u_2}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_0 + \delta}^{\phi_0 + 2\pi - \delta} u_0(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi. \quad (43)$$

Das ist – wieder nach dem zitierten Satz aus der Analysis – eine differenzierbare, also stetige Funktion von  $z$  auf dem Komplement des abgeschlossenen Kreissegmentes

$$C := \{Re^{i\phi} \mid \phi_0 + \delta \leq \phi \leq \phi_0 + 2\pi - \delta\}.$$

Weil  $z_0 \notin C$ , folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} P_{u_2}(z) = P_{u_2}(z_0) = 0, \quad (44)$$

denn wegen  $|z_0| = R$  ist der Integrand in (43) Null.

Also gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $|P_{u_2}(z)| \leq \epsilon$  für alle  $z \in K$  mit  $|z - z_0| < \delta$ . Für diese gilt dann wegen (42)

$$|P_{u_0}(z) - u_0(z_0)| = |P_{u_0}(z)| = |P_{u_1}(z) + P_{u_2}(z)| \leq 2\epsilon,$$

und (41) ist bewiesen.

Damit erhalten wir den Existenzsatz für die sogenannte 1. Randwertaufgabe im Kreis:

**Satz 83 (Existenzsatz für das Dirichlet-Problem im Kreis).** *Sei*

$$K := \{z \mid |z| \leq R\}$$

*die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius  $R$  und sei  $u_0 : \partial K \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig. Sei  $u := P_{u_0} : \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch (39). Dann ist  $u$  harmonisch in der offenen Kreisscheibe, und wenn  $u_0$  stetig in  $z_0 \in \partial K$  ist, gilt*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0(z_0).$$

Der vorstehende Beweis benutzt wesentlich die Monotonie von  $P_{u_0}$  und lässt sich daher nicht verallgemeinern auf holomorphe Funktionen an Stelle der harmonischen. Aber nicht nur der Beweis klappt nicht, auch der Satz lässt sich nicht auf den holomorphen Fall erweitern. Sonst könnte man eine beliebige stetige Funktion auf der Kreislinie stetig zu einer im Innere holomorphen Funktion erweitern. Betrachtet man reelle Randwerte und Möbius-transformiert man den Kreis auf die obere Halbebene, so könnte man damit zum Beispiel jede stetige reelle Funktion  $\tilde{u}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger stetig zu einer auf der offenen oberen Halbeben holomorphen Funktion erweitern. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip erhält man dann eine holomorphe Erweiterung auf ganz  $\mathbb{C}$ . Wenn  $u_0$  kompakten Träger hat ist die nach dem Identitätssatz aber  $= 0$ . Wählt man  $u_0 \neq 0$ , so ergibt sich ein Widerspruch.

## 7 Singularitäten

### 7.1 Typen isolierter Singularitäten, meromorphe Funktionen

- Wenn einzelne Punkte im Definitionsbereich fehlen: Isolierte Singularitäten
- Die drei Typen isolierter Singularitäten
- Was bedeutet "isoliert"?

**Definition 84.** Eine *isolierte Singularität* einer holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $G$  ist ein Punkt  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ , für den es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $f$  auf der punktierten  $\epsilon$ -Umgebung von  $z_0$  holomorph ist, d.h. so dass

$$U_\epsilon^*(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \epsilon\} \subset G.$$

Insbesondere ist dann also  $G \cup \{z_0\}$  offen.

**Definition 85.** Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f$ .

- (i) Wir definieren die *Ordnung* von  $f$  in  $z_0$  durch

$$\text{Ord}(f, z_0) := \sup \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z) \text{ existiert in } \mathbb{C} \right\}.$$

Die Ordnung ist also eine ganze Zahl oder  $-\infty$  oder  $+\infty$

- (ii) Falls  $\text{Ord}(f, z_0) \geq 0$ , heißt  $z_0$  eine *hebbare Singularität* von  $f$ .
- (iii) Falls  $-\infty < m := \text{Ord}(f, z_0) < 0$ , heißt  $z_0$  ein *Pol* von  $f$  und  $-m$  seine *Polstellenordnung* oder *Vielfachheit*.
- (iv) Falls  $\text{Ord}(f, z_0) = -\infty$ , heißt  $z_0$  eine *wesentliche Singularität* von  $f$ .

**Beispiele 86.** (i) Ist  $f^\#$  holomorph auf  $G$  und  $z_0 \in G$ , so ist  $z_0$  trivialerweise eine isolierte Singularität von  $f := f^\#|_{G \setminus \{z_0\}}$ . Weil  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f^\#(z_0)$ , existiert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z)$$

für alle  $n \leq 0$ . Daher ist  $\text{Ord}(f, z_0) \geq 0$ , die Singularität also hebbbar. Wir werden später sehen, dass alle hebbaren Singularitäten so entstehen.

Hat  $f^\#$  in  $z_0$  eine  $k$ -fache Nullstelle, so gibt es eine in  $G$  holomorphe Funktion mit  $h(z_0) \neq 0$  und  $f^\#(z) = (z - z_0)^k h(z)$ . Dann existiert  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z)$  genau dann in  $\mathbb{C}$ , wenn  $k - n \geq 0$ , also  $n \leq k$ . Daher ist  $\text{Ord}(f, z_0) = k$  gerade die Ordnung der Nullstelle, und die neue Definition der Ordnung passt zur Definition der Nullstellenordnung.

- (ii) Für  $k > 0$  ist  $f(z) := \frac{1}{(z - z_0)^k}$  genau das, was wir uns unter einer Funktion mit einem  $k$ -fachen Pol an der Stelle  $z_0$  vorstellen. Hier existiert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(z - z_0)^k}$$

genau dann in  $\mathbb{C}$ , wenn  $-n \geq k$ , also  $n \leq -k$ . Deshalb ist  $\text{Ord}(f, z_0) = -k$ .

(iii) Die Funktion

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  bis auf eine isolierte Singularität in 0. Aus der Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!z^k}$$

sieht man, dass  $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-n} f(z)$  für kein  $n \in \mathbb{Z}$  existiert, so dass 0 eine wesentliche Singularität von  $f$  ist. □

**Lemma 87.** Seien  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $S$  die Menge seiner isolierten Singularitäten. Dann liegen in jeder kompakten Teilmenge von  $G \cup S$  höchstens endlich viele Punkte von  $S$ .

*Beweis.* Wähle zu jedem  $z \in S$  eine offene Umgebung  $U_z$  in  $G \cup S$ , so dass  $f$  auf  $U_z \setminus \{z\}$  holomorph ist. Dann ist  $U_z \cap S = \{z\}$ . Die  $U_z$  bilden zusammen mit  $G$  eine offene Überdeckung von  $G \cup S$ , und zur Überdeckung einer beliebigen kompakten Teilmenge von  $G \cup S$  reichen endlich viele davon. □

**Definition 88.** (i) Wir sagen  $f$  ist holomorph auf  $G$  bis auf isolierte Singularitäten, wenn es eine Teilmenge  $S \subset G$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (i)  $G$  und  $G \setminus S$  sind offen,
- (ii)  $f : G \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph,
- (iii) Alle Punkte von  $S$  sind isolierte Singularitäten von  $f$ .

(ii) Eine auf  $G$  bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion heißt eine *meromorphe Funktion auf  $G$* , wenn alle Singularitäten hebbar oder Pole sind, d.h. wenn es keine wesentlichen Singularitäten gibt.

**Lemma 89.** Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht konstant  $= 0$  im Gebiet  $G$ , so ist  $1/f(z)$  meromorph auf dem Gebiet  $G$ .

*Beweis.*  $\frac{1}{f(z)}$  ist definiert und holomorph auf dem Komplement der Nullstellen von  $f$ . Diese sind isoliert und von endlicher Ordnung.

Ist  $z_0$  eine  $n$ -fache Nullstelle, so ist  $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$  mit holomorphem  $g$  und  $g(z_0) \neq 0$ . Dann hat aber

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^{-n} \frac{1}{g(z)}$$

in  $z_0$  einen  $n$ -fachen Pol. □

## 7.2 Laurentreihen. Funktionsverlauf bei isolierten Singularitäten

- Laurentreihen: Die Reihenentwicklung um isolierte Singularitäten
- Das Heben hebbarer Singularitäten
- Die wilden wesentlichen Singularitäten (Casorati-Weierstraß)
- $\infty$  als Singularität
- Klassifikation der meromorphen Funktionen auf  $\hat{\mathbb{C}}$

Beim Beweis des Satzes über Laurentreihen brauchen wir die Cauchysche Integralformel nicht nur für Kreise, sondern für Kreisringe. Auch wenn wir später mit dem Artinschen Homologiekriterium noch eine einfachere Herleitung bekommen (vgl. Beispiel 139), will ich doch schon hier einen "anständigen" Beweis dafür liefern, .

**Satz 90 (Cauchysche Integralformel für Kreisringe).** Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und liegt der abgeschlossene Kreisring

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid R - r \leq |z - a| \leq R + r\}, \quad 0 < r < R$$

ganz in  $G$ , so gilt für jeden inneren Punkt von  $A$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R+r} \frac{f(z) dz}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R-r} \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

*Beweis.* Zeigen Sie mittels einer Substitution der Form  $z = e^{i\phi} w + a$ , dass man o.E. annehmen kann, dass  $a = 0$  und dass  $z_0$  ein innerer Punkt des Kreises

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - R| \leq r\}$$

ist. Vgl. Abbildung unten.

Wir definieren eine Funktion  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\phi(s) = \arctan \frac{r \sin(\pi(1-s))}{R + r \cos(\pi(1-s))}.$$

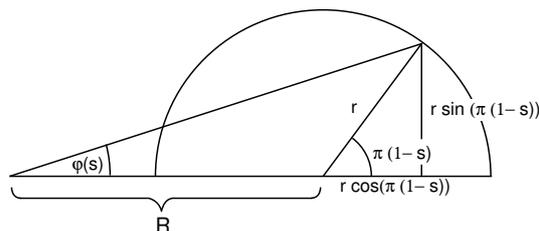
Dann gilt für alle  $s \in [0, 1]$

$$(R + r e^{i\pi(1-s)}) e^{i(2\pi - 2\phi(s))} = R + r e^{-i\pi(1-s)},$$

siehe die Abbildung.

Es gilt

$$\phi(0) = 0 = \phi(1).$$

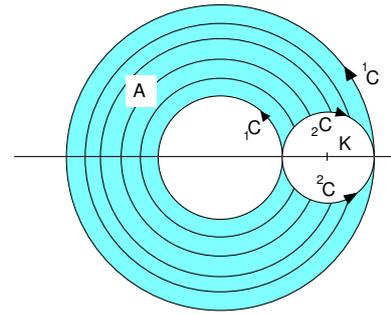


Wir definieren nun ein singuläres Quadrat  $C : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$C(s, t) = (R + r e^{i\pi(1-s)}) e^{it(2\pi - 2\phi(s))}.$$

Das Bild von  $C$  ist der abgeschlossene Kreisring  $A$  um 0 mit den Radien  $R-r, R+r$ , aus dem der offene Kreis  $\overset{\circ}{K}$  ausgeschnitten ist. Die Seiten von  $C$  sind

$$\begin{aligned} {}^1C(t) &= (R+r)e^{2\pi it}, \\ {}_1C(t) &= (R-r)e^{2\pi it}, \\ {}^2C(t) &= (R+re^{i\pi(1-t)})e^{i(2\pi-2\phi(t))} \\ &= R+re^{-i\pi(1-t)}, \\ {}_2C(t) &= R+re^{i\pi(1-t)}. \end{aligned}$$



Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist  $\int_{\partial C} f(z)dz = 0$  für jede auf einer offenen Umgebung des Bildes von  $C$  holomorphe Funktion  $f$ . Für solche gilt also

$$\int_{\partial A} f(z)dz = \int_{{}_1C} f(z)dz - \int_{{}_1C} f(z)dz = \int_{{}_2C} f(z)dz - \int_{{}_2C} f(z)dz = \int_{\partial K} f(z)dz.$$

Wenn  $f$  auf einer offenen Umgebung des Kreisrings  $A$  holomorph ist, liefert die Cauchysche Integralformel daher

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

für jedes  $z_0$  im Innern des Kreises  $K$ . □

**Satz 91 (Laurentreihe im Kreisring).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$ . Für  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $0 \leq r < R \leq +\infty$  liege der offene Kreisring

$$A := \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$$

in  $G$ . Dann gibt es eine doppelseitige Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in A.$$

Diese Reihe heißt die Laurentreihe von  $f$  in  $A$ . (Vgl. Satz 92 für die Einzigkeit.)  
Genauer: Wählt man  $\rho$  mit  $r < \rho < R$  und setzt man

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \tag{45}$$

so ist diese Definition unabhängig von der Wahl von  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k &\text{ ist konvergent für } |z - z_0| < R, \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k &\text{ ist konvergent für } |z - z_0| > r, \end{aligned}$$

und für  $z \in A$  gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

**Bemerkungen.** 1. Im Fall, dass  $f$  in  $z_0$  eine isolierte Singularität hat, läßt es sich also in einer punktierten Kreisscheibe  $0 < |z - z_0| < R$  in eine Laurentreihe entwickeln. Dann nennt man

$$P_f(z) := \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k$$

den *Hauptteil von  $f$  in  $z_0$* .

2. Offenbar ist  $P_f = 0$  genau dann, wenn  $z_0$  eine hebbare Singularität ist.

3. Der Hauptteil ist eine endliche, nicht-triviale Summe

$$P_f(z) := \sum_{k=-m}^{-1} a_k(z - z_0)^k, \quad a_{-m} \neq 0,$$

genau dann, wenn  $z_0$  ein  $m$ -facher Pol von  $f$  ist.

*Beweis.* Zunächst ist die Definition (45) nach Beispiel 45 unabhängig von der Wahl von  $\rho$ . Zu  $z \in A$  wählen wir  $r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R$ . Sei

$$A' := \{z \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}.$$

Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel für den Kreisring

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wir bezeichnen die Integrale auf der rechten Seite mit  $I_2, I_1$ . Dann folgt wie im Beweis des Satzes von Taylor 51

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

mit  $a_k$  wie in (45).

Entsprechend findet man wegen  $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{\rho_1}{|z - z_0|} < 1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{-(z - z_0) \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} d\zeta \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} f(\zeta) \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} d\zeta \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k}} d\zeta \right) (z - z_0)^{-k-1} \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta (z - z_0)^k \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

**Satz 92 (Einzigkeit der Laurentreihe).** *Ist die Laurentreihe*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

*im Kreisring  $\{z \mid r < |z - z_0| < R\}$  konvergent, so definiert sie eine holomorphe Funktion  $f(z)$  und für die Koeffizienten gilt (45).*

*Beweis.* Laurentreihen bestehen aus zwei Potenzreihen und sind deshalb auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergent. Daher definieren sie eine holomorphe Funktion und man darf sie gliedweise integrieren. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{m+1}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} a_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-m-1} dz = a_m,$$

weil alle Integranden mit  $k \neq m$  Stammfunktionen besitzen. □

**Beispiel 93.** Für  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  und  $z_0 = 0$  läßt sich der Satz über die Laurententwicklung auf die beiden folgenden Kreislänge anwenden:

$$A_1 := \{z \mid 0 < |z| < 1\}, \\ A_2 := \{z \mid |z| > 1\}.$$

Auf beiden ist  $f$  holomorph. Die Laurententwicklungen findet man am einfachsten mit Hilfe der geometrischen Reihe. Es ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

für  $z \in A_1$  und natürlich auch für  $z = 0$ . Das ist also die Taylorentwicklung um 0. In  $A_2$  hat man dagegen

$$f(z) = \frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})} = \frac{-1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)z^k$$

□

**Beispiel 94.** Bestimme die Laurentreihe von  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  auf

$$\{z \mid 0 < |z| < 2\pi\}.$$

In 0 hat  $e^z - 1$  eine einfache Nullstelle,  $f(z)$  also einen einfachen Pol, und die Laurentreihe von  $f$  ist von der Form

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k.$$

Andererseits ist  $e^z - 1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$ , und deshalb folgt mit dem Cauchyprodukt

$$1 = f(z)(e^z - 1) = \left( \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k \right) \left( \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{m-1} \frac{a_k}{(m-k)!} z^m$$

und daraus eine Rekursionsformel für die  $a_k$ :

$$a_{-1} = 1, \quad \sum_{k=0}^m \frac{a_{k-1}}{(m-k+1)!} = 0$$

Sie liefert  $a_0 = -\frac{1}{2}$ . Die Zahlen  $B_k := k!a_{k-1}$  heißen die *Bernoullizahlen*. Mit ihnen gilt also

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1}. \quad (46)$$

Rechnen Sie nach, dass  $f(z) - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$  eine ungerade Funktion ist. Daraus folgt (wegen des Shifts in den  $z$ -Potenzen der letzten Reihe), dass

$$B_{2n+1} = 0, n \geq 1.$$

Im übrigen schreibt sich die Rekursionsformel für die  $B_k$  als

$$0 = \sum_{k=0}^m \frac{B_k}{k!(m-k+1)!} = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k,$$

und damit

$$\sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k = 0, \quad B_0 = 1.$$

Man findet

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

Die Bernoullizahlen spielen zum Beispiel in der analytischen Zahlentheorie oder in der Topologie eine wichtige (und bis heute etwas rätselhafte) Rolle. Entdeckt wurden sie im Zusammenhang mit Potenzsummen der reziproken natürlichen Zahlen. Wir zeigen später (in Beispiel 148)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}.$$

□

**Korollar 95.** Ist  $\rho$  gewählt wie im Satz und  $M = \sup \{|f(z)| \mid |z - z_0| = \rho\}$ , so gilt

$$|a_k| \leq \frac{M}{\rho^k} \quad (47)$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Satz 96 (Riemannscher Hebbbarkeitssatz).** Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\text{Ord}(f, z_0) \geq 0$ , d.h.  $z_0$  ist hebbare Singularität.
- (ii) Es gibt  $\epsilon > 0$ , so dass  $U_\epsilon^*(z_0) \subset G$  und  $f|_{U_\epsilon^*(z_0)}$  beschränkt ist.
- (iii) Der Hauptteil der Laurententwicklung von  $f$  um  $z_0$  ist 0.
- (iv) Es gibt eine holomorphe Funktion  $\tilde{f} : G \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\tilde{f}|_G = f$ .

*Beweis.* Zu (i)  $\implies$  (ii). Nach Definition der Ordnung existiert für ein  $n \geq 0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z) (z - z_0)^n,$$

und damit ist  $f$  auf einer punktierten Umgebung  $U_\epsilon^*(z_0)$  beschränkt.

Zu (ii)  $\implies$  (iii). Sei  $\epsilon > 0$  mit  $U_\epsilon^*(z_0) \subset G$  und sei  $|f| \leq M$  auf  $U_\epsilon^*(z_0)$ . Aus (47) folgt  $|a_k| = 0$  für alle  $k < 0$ .

Zu (iii)  $\implies$  (iv). Nach Voraussetzung wird  $f$  in  $U_\epsilon^*(z_0)$  durch eine konvergente Potenzreihe um  $z_0$  dargestellt, die eine auf  $U_\epsilon(z_0)$  holomorphe Funktion  $\tilde{f}$  liefert und  $f$  in  $z_0$  holomorph ergänzt.

Zu (iv)  $\implies$  (i). Klar □

**Satz 97 (Polverhalten).** *Seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $\epsilon > 0$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i)  $z_0$  ist ein Pol von  $f$ .

(ii) Der Hauptteil der Laurententwicklung von  $f$  um  $z_0$  ist endlich, aber  $\neq 0$ : Fast alle, aber nicht alle, Koeffizienten  $a_k$  mit  $k < 0$  verschwinden.

(iii) In der Topologie von  $\hat{\mathbb{C}}$  ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

*Beweis.* Sei  $n := \text{Ord}(f, z_0)$  und sei  $U_\epsilon^*(z_0) \subset G$ .

Zu (i)  $\implies$  (ii). Nach Voraussetzung ist  $n < 0$  und der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z)$  existiert in  $\mathbb{C}$ . Also ist  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $(z - z_0)^{-n} f(z)$ . Sei  $g : G \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $g|_{G \setminus \{z_0\}} = (z - z_0)^{-n} f(z)$ . Ist  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  die Taylorentwicklung von  $g$  um  $z_0$ , so ist  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+n}$  die Laurententwicklung von  $f$  um  $z_0$ . Offenbar ist der Hauptteil endlich und  $\neq 0$ .

Zu (ii)  $\implies$  (iii). Sei  $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  mit  $-\infty < n < 0$  die Laurententwicklung von  $f$  in  $U_\epsilon^*(z_0)$  und  $a_n \neq 0$ . Dann ist  $g(z) := \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n}$  eine auf  $U_\epsilon(z_0)$  holomorphe Funktion mit  $g(z_0) = a_n \neq 0$ . Daher ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n g(z) = \infty.$$

Zu (iii)  $\implies$  (i). Die Ordnung von  $f$  in  $z_0$  ist offenbar  $< 0$ . Dass sie nicht  $-\infty$  sein kann, folgt aus dem nächsten Satz. □

**Satz 98 (Casorati-Weierstraß).** *Eine holomorphe Funktion kommt in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jedem Wert aus  $\mathbb{C}$  beliebig nah: Ist  $z_0$  eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so ist*

$$f(G \cap \{z \mid |z - z_0| < \epsilon\})$$

*für jedes  $\epsilon > 0$  dicht in  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Andernfalls gibt es  $\epsilon > 0, w_0 \in \mathbb{C}$  und  $\delta > 0$ , so dass  $U^* := U_\epsilon^*(z_0) \subset G$  und

$$|f(z) - w_0| > \delta \text{ auf } U^*.$$

Dann ist

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w_0}$$

holomorph auf  $U^*$  mit einer isolierten Singularität in  $z_0$  und  $|g(z)| < \frac{1}{\delta}$ . Also ist die Singularität hebbbar: Es gibt eine holomorphe Funktion  $h$  auf  $U^* \cup \{z_0\}$  mit

$$\frac{1}{f(z) - w_0} \Big|_{U^*} = h|_{U^*}.$$

Es folgt  $f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$ , und  $z_0$  ist eine hebbare Singularität oder ein Pol von  $f$ . Widerspruch!  $\square$

**Isolierte Singularität im Unendlichen** Ist  $z_0 \neq 0$  eine isolierte Singularität von  $f$ , so ist  $\frac{1}{z_0}$  eine isolierte Singularität von  $f\left(\frac{1}{z}\right)$ , weil  $z \mapsto \frac{1}{z}$  eine biholomorphe Abbildung von  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  auf sich ist. Weiter ist dann

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{z_0}} \left(z - \frac{1}{z_0}\right)^{-n} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \lim_{\frac{1}{z} \rightarrow z_0} \left(z - \frac{1}{z_0}\right)^{-n} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right)^{-n} f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z_0 - z)^{-n} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} (zz_0)^n = (z_0)^{2n} \lim_{z \rightarrow z_0} (z_0 - z)^{-n} f(z). \end{aligned}$$

Daher ist  $\text{Ord}\left(f\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1}{z_0}\right) = \text{Ord}(f(z), z_0)$ . In Analogie dazu definiert man nun, was es bedeuten soll, dass  $f$  in  $\infty$  eine isolierte Singularität besitzt, nämlich dass  $f(z)$  holomorph auf dem Komplement eines Kompaktums ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  in 0 eine isolierte Singularität hat. Die Ordnung und der Typ der Singularität von  $f$  in  $\infty$  werden definiert als die Ordnung und der Typ der Singularität von  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  in 0.

Ist  $f$  meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$  und hat es in  $\infty$  einen Pol oder eine hebbare Singularität, so nennt man  $f$  meromorph auf der erweiterten Ebene  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Satz 99 (Der Körper der auf  $\hat{\mathbb{C}}$  meromorphen Funktionen).** Die auf  $\hat{\mathbb{C}}$  meromorphen Funktionen sind genau die rationalen Funktionen, also die Quotienten zweier Polynome.

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $\lim_{z \rightarrow 0} z^m f\left(\frac{1}{z}\right)$  existiert. Also gibt es ein  $r > 0$ , so dass  $z^m f\left(\frac{1}{z}\right)$  auf der Menge  $\{z \mid 0 < |z| < r\}$  beschränkt ist. Dann ist aber die offensichtlich auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $\frac{f(z)}{z^m}$  auf  $\{z \mid |z| > \frac{1}{r}\}$  beschränkt. Also liegen alle ihre Polstellen im Kompaktum  $\{z \mid |z| \leq \frac{1}{r}\}$ . Sie hat höchstens endlich viele Polstellen  $z_1, \dots, z_n$ , und wenn  $m_1, \dots, m_k$  deren Vielfachheiten bezeichnen, ist

$$g(z) := (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_k)^{m_k} \frac{f(z)}{z^m}$$

nach Hebung der Singularitäten holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Weil der letzte Faktor für großes  $|z|$  beschränkt ist, hat  $g(z)$  eine polynomiale Wachstumsschranke und ist nach Satz 57 ein Polynom. Damit ist  $f$  rational.  $\square$

Als Anwendung der Laurententwicklung beweisen wir noch eine komplexe Version der Regel von Bernoulli-de l'Hospital.

**Satz 100.** Seien  $f$  und  $g \neq 0$  holomorph in  $G \subset \mathbb{C}$  bis auf isolierte Singularitäten, sei  $z_0 \in G$  und sei

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

oder

$$(ii) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

Dann existieren die folgenden Grenzwerte in  $\hat{\mathbb{C}}$  und es gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

*Beweis.* Sei o.E.  $f \neq 0$ . Nach Voraussetzung haben  $f$  und  $g$  dann in  $z_0$  eine Nullstelle oder einen Pol. Daher gibt es  $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und auf einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  holomorphe Funktionen  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  mit

$$f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z), \quad g(z) = (z - z_0)^n \tilde{g}(z), \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}$$

und

$$\tilde{f}(z_0) \neq 0 \neq \tilde{g}(z_0).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{m(z - z_0)^{m-1} \tilde{f}(z) + (z - z_0)^m \tilde{f}'(z)}{n(z - z_0)^{n-1} \tilde{g}(z) + (z - z_0)^n \tilde{g}'(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m-n} \frac{m \tilde{f}(z) + (z - z_0) \tilde{f}'(z)}{n \tilde{g}(z) + (z - z_0) \tilde{g}'(z)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } m > n, \\ \frac{\tilde{f}(z_0)}{\tilde{g}(z_0)} & \text{für } m = n, \\ \infty & \text{für } m < n \end{cases} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m-n} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

□

In der Literatur habe ich diese Version nirgends gefunden, vermutlich, weil die Grenzwertberechnung mittels der Laurententwicklung meistens genauso bequem ist.

Beachten Sie aber, dass die reelle l'Hospital-Regel für komplexwertige Funktionen problematisch ist: Für  $f(x) = x$  und  $g(x) = xe^{-i/x}$  findet man, weil  $|e^{-i/x}| = |\cos \frac{1}{x} - i \sin \frac{1}{x}| \leq 1$ , dass  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-i/x} + ix^{-2}e^{-i/x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{i/x}}{x+i} = 0.$$

Aber  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{i/x}$  existiert nicht.

## 8 Analytische Fortsetzung

### 8.1 Analytische Fortsetzung längs Kurven

- Analytische Fortsetzung von “Stücken” holomorpher Funktionen längs stetiger Kurven
- Der Begriff des Funktionskeims
- Existenz und Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung
- Integration längs stetiger Kurven
- Stetige Homologie und der Cauchysche Integralsatz

**Definition 101.** Ein *Funktionselement*  $(f, G)$  ist ein Paar bestehend aus einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und einer holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

Zwei Funktionselemente  $(f, G), (g, H)$  heißen äquivalent im Punkt  $a \in \mathbb{C}$ , wenn

$$a \in G \cap H \text{ und } f(z) = g(z) \text{ für alle } z \text{ in einer Umgebung von } a.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn  $f$  und  $g$  im Entwicklungspunkt  $a$  dieselbe Taylorreihe haben. Hierdurch wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionselemente gegeben.

Die Äquivalenzklassen aller  $(f, G)$  mit  $a \in G$  heißen *Keime holomorpher Funktionen in  $a$*  oder kurz (*Funktions*)*keime in  $a$* .

Den durch ein Funktionselement  $(f, G)$  in  $a \in G$  gegebenen Keim bezeichnen wir mit  $[f]_a$ , und wir definieren seine  $k$ -te Ableitung durch

$$[f]_a^{(k)} := [f^{(k)}]_a.$$

Offenbar ist das unabhängig vom Repräsentanten  $(f, G)$ . Ist weiter  $\phi = [f]_a$  ein Keim in  $a$ , so setzen wir für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\phi^{(k)}(a) := f^{(k)}(a).$$

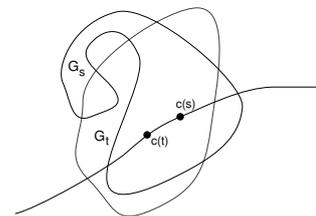
Auch das ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten  $f$ .

**Definition 102.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Kurve. Eine *analytische Fortsetzung längs  $c$*  ist eine Familie  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  von Keimen holomorpher Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle  $t \in [0, 1]$  ist  $\phi_t$  ein Keim in  $c(t)$ .
- Zu jedem  $t \in [0, 1]$  existieren ein  $\delta > 0$ , ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und eine holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $c(s) \in G$  und

$$\phi_s = [f]_{c(s)}$$

für alle  $s \in [0, 1]$  mit  $|s-t| < \delta$  (Glattheitsbedingung).



In diesem Fall sagt man, dass  $\phi_1$  aus  $\phi_0$  durch analytische Fortsetzung längs  $c$  hervorgeht.

**Bemerkungen.** Wenn man verlangt, dass die  $G$  nicht Gebiete sondern offene Kreisscheiben sind, erhält man eine äquivalente Definition!

Es ist eine schwierige Frage, ob sich ein Keim  $\phi_0$  längs  $c$  analytisch fortsetzen läßt, die Antwort ist keineswegs immer “Ja”. Wir werden aber sehen, dass im Fall der Fortsetzbarkeit das

“Endergebnis”  $\phi_1$  eindeutig bestimmt ist. Und wir werden untersuchen, wie dieses Ergebnis vom Verlauf der Kurve abhängt.

Wir beschränken uns hier der einfachen Notation halber auf Kurven mit Parameterintervall  $[0, 1]$ . Es ist klar, wie man die analytische Fortsetzung längs Kurven  $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert, und wir werden davon gelegentlich Gebrauch machen. Man zeigt leicht, die “Parameterinvarianz” der analytischen Fortsetzung: Ist  $h : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $h(a) = 0, h(b) = 1$  und  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  eine analytische Fortsetzung von  $\phi_0 = \phi$ , so definiert

$$\tilde{\phi}_s := \phi_{h(s)} \text{ für } s \in [a, b]$$

eine analytische Fortsetzung von  $\tilde{\phi}_a = \phi$  längs  $c \circ h$ .

**Beispiel 103 (Triviale Fortsetzung).** Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $c : [0, 1] \rightarrow G$  eine stetige Kurve in  $G$ , und setzt man  $\phi_t := [f]_{c(t)}$  für alle  $t \in [0, 1]$ , so definiert das eine analytische Fortsetzung von  $\phi_0$ , bei der aber nichts wirklich “fortgesetzt” wird. □

**Beispiel 104 (Logarithmus).** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  stetig differenzierbar mit  $c(0) = 1$ . Zu jedem  $t \in [0, 1]$  gibt es eine Stammfunktion  $L_t : D_t \rightarrow \mathbb{C}$  von  $\frac{1}{z}$  definiert auf einer offenen Kreisscheibe mit  $c(t) \in D_t$  und  $L_t(c(t)) = \int_{c|_{[0, t]}} \frac{dz}{z} = \int_0^t f(c(\tau)) \dot{c}(\tau) d\tau$ . Insbesondere ist  $L_0$  eine Einschränkung des komplexen Logarithmus auf eine Kreisscheibe um 1. Wir setzen

$$\phi_t := [L_t]_{c(t)}$$

und behaupten, dass  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  eine analytische Fortsetzung des Logarithmus ist. Dazu müssen wir die Bedingung (ii) der Definition nachweisen. Sei  $t \in [0, 1]$ . Für  $s$  nah bei  $t$  ist  $c(s) \in D_t$  und

$$\frac{d}{ds} L_t(c(s)) = \frac{1}{c(s)} \dot{c}(s).$$

Deshalb ist

$$L_t(c(s)) = L_t(c(t)) + \int_t^s \frac{1}{c(\tau)} \dot{c}(\tau) d\tau = \int_0^s \frac{1}{c(\tau)} \dot{c}(\tau) d\tau = L_s(c(s))$$

und

$$[L_t]_{c(s)} = \phi_{c(s)}.$$

□

**Satz 105 (Eindeutigkeitssatz).** Seien  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  und  $(\tilde{\phi}_t)_{t \in [0, 1]}$  zwei analytische Fortsetzungen längs der Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$$\phi_0 = \tilde{\phi}_0 \implies \phi_1 = \tilde{\phi}_1$$

Also ist die analytische Fortsetzung längs Kurven, wenn sie denn existiert, auch eindeutig.

*Beweis.* Sei  $J := \left\{ t \in [0, 1] \mid \phi_t = \tilde{\phi}_t \right\}$ . Wir zeigen, dass  $J$  offen und abgeschlossen in  $[0, 1]$  ist. Weil  $0 \in J$ , ist dann  $J = [0, 1]$  und damit  $1 \in J$ .

Sei also  $t \in J$  und seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $\tilde{f} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen, so dass  $\phi_s = [f]_{c(s)}$  bzw.  $\tilde{\phi}_s = [\tilde{f}]_{c(s)}$  für alle  $s$  nah bei  $t$ . Weil  $\phi_t = \tilde{\phi}_t$ , stimmen  $f$  und  $\tilde{f}$  auf einer Umgebung von  $c(t)$  überein und es folgt  $\phi_s = \tilde{\phi}_s$  für alle  $s$  nah bei  $t$ . Damit ist  $J$  offen.

Sei nun  $s = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i$  der Grenzwert einer Folge  $(t_i)$  in  $J$  und seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $\tilde{f} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen, so dass  $\phi_t = [f]_{c(t)}$  bzw.  $\tilde{\phi}_t = [\tilde{f}]_{c(t)}$  für alle  $t$  nah bei  $s$ . Weil  $\phi_{t_i} = \tilde{\phi}_{t_i}$  folgt  $f(c(t_i)) = \tilde{f}(c(t_i))$  für alle  $i$ , und nach dem Identitätssatz ist  $f = \tilde{f}$  auf einer Umgebung von  $c(s)$ . Dann ist aber  $\phi_s = \tilde{\phi}_s$  und  $J$  auch abgeschlossen.  $\square$

Wir brauchen im folgenden einen Hilfssatz aus der elementaren Topologie:

**Lemma 106 (Lebesguezahl).** *Sei  $(U_j)_{j \in J}$  eine offene Überdeckung des kompakten metrischen Raumes  $X$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass jede Teilmenge von  $X$  mit Durchmesser  $< \delta$  in einem der  $U_j$  enthalten ist.*

*Beweis.* vgl. Analysis 2, Korollar 58.  $\square$

**Lemma 107.** *Sei  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  eine analytische Fortsetzung längs  $c : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit folgender Eigenschaft: Zu jedem  $t \in [0,1]$  gibt es eine offene Kreisscheibe  $G$  und eine holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass für alle  $s \in [0,1]$  mit  $|s - t| < \delta$  gilt:*

$$c(s) \in G \text{ und } \phi_s = [f]_{c(s)}.$$

*(Beachten Sie, dass im Gegensatz zur Definition der analytischen Fortsetzung das  $\delta$  hier gleichmäßig für die ganze Kurve gilt.)*

*Beweis.* Wähle zu jedem  $t \in [0,1]$  eine offene Umgebung  $J_t \subset [0,1]$ , eine Kreisscheibe  $G_t$  und ein holomorphes  $f_t : G_t \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $c(J_t) \subset G_t$  und  $\phi_s = [f_t]_{c(s)}$  für alle  $s \in J_t$ . Sei  $2\delta > 0$  eine Lebesguesche Zahl der offenen Überdeckung  $(J_t)_{t \in [0,1]}$  von  $[0,1]$ . Ist nun  $s \in [0,1]$ , so liegt  $]s - \delta, s + \delta[ \cap [0,1]$  in einem  $J_t$ , und  $f = f_t : G = G_t \rightarrow \mathbb{C}$  leistet das Gewünschte.  $\square$

**Lemma 108.** *Sei  $c : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Kurve. Der Keim  $\phi_0 = [f]_{c(0)}$  in  $c(0)$  lässt sich genau dann längs  $c$  analytisch fortsetzen, wenn sich der Keim  $\phi'_0$  längs  $c$  analytisch fortsetzen lässt.*

*Beweis.* Ist  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  eine analytische Fortsetzung längs  $c$  von  $\phi_0$ , so ist  $(\phi'_t)_{t \in [0,1]}$  eine solche für die Ableitung.

Schwieriger ist die umgekehrte Richtung zu zeigen. Sei  $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$  eine analytische Fortsetzung längs  $c$  mit  $\psi_0 = \phi'_0$ . Wähle dazu  $\delta > 0$  wie im vorangehenden Lemma und eine Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  mit  $t_{i+1} - t_{i-1} < \delta$ . Dann gibt es zu jedem  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  eine Kreisscheibe  $G_i$  und eine holomorphe Funktion  $g_i : G_i \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$c(s) \in G_i \text{ und } \psi_s = [g_i]_{c(s)} \text{ für alle } s \in [t_{i-1}, t_{i+1}].$$

Sei  $f_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$  die Stammfunktion von  $g_1$  mit  $f_1(c(0)) = f(c(0))$ . Für  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  definieren wir induktiv  $f_i : G_i \rightarrow \mathbb{C}$  als die Stammfunktion von  $g_i$  mit

$$f_i(c(t_{i-1})) = f_{i-1}(c(t_{i-1})).$$

Weil

$$[g_{i-1}]_{c(t_i)} = \psi_{t_i} = [g_i]_{c(t_i)}$$

ist  $g_{i-1} = g_i$  auf  $G_{i-1} \cap G_i$ , und sowohl  $f_{i-1}$  wie  $f_i$  ist dazu eine Stammfunktion. Weil aber  $f_{i-1}(c(t_{i-1})) = f_i(c(t_{i-1}))$ , ist auch

$$f_{i-1} = f_i \text{ auf } G_{i-1} \cap G_i. \quad (48)$$

Insbesondere ist

$$[f_{i-1}]_{c(t_{i-1})} = [f_i]_{c(t_{i-1})}.$$

Deshalb können wir definieren:

$$\phi_t := [f_i]_{c(t)} \text{ für } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Wegen (48) ist die Glattheitsbedingung erfüllt und wir erhalten eine analytische Fortsetzung von  $\phi_0 = [f_1]_{c(0)} = [f]_{c(0)}$ .  $\square$

Seien  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $c : [0, 1] \rightarrow G$  eine stetige Kurve. Ist  $D \subset G$  eine Kreisscheibe um  $c(0)$ , so besitzt  $f|_D$  eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte holomorphe Stammfunktion  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Weil sich  $[f]_{c(0)}$  trivial längs  $c$  analytisch fortsetzen läßt, gestattet nach Lemma 108 auch  $[F]_{c(0)}$  eine analytische Fortsetzung  $(\Phi_t)_{t \in [0, 1]}$  längs  $c$  und  $\Phi_1$  ist durch  $[F]_{c(0)}$  nach Satz 105 eindeutig bestimmt. Das ermöglicht es, für holomorphe Funktionen das Kurvenintegral auch über *nur stetige*, nicht notwendig stetig differenzierbare Kurven zu erklären:

**Definition 109 (Integration über stetige Kurven).** Mit den obigen Bezeichnungen definieren wir

$$\int_c f(z) dz := \Phi_1(c(1)) - \Phi_0(c(0)).$$

**Lemma 110.** *Die vorstehende Definition stimmt für stetig differenzierbares  $c$  mit der alten überein.*

*Beweis.* Sei  $c$  stetig differenzierbar. Wir betrachten die Funktion  $I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$I(t) := \Phi_t(c(t)).$$

Zu  $t \in [0, 1]$  gibt es eine holomorphe Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass für alle  $s$  nah bei  $t$  gilt  $c(s) \in G$  und  $[F]_{c(s)} = \Phi_s$ . Für diese  $s$  ist  $I(s) = F(c(s))$ . Also ist  $I$  stetig differenzierbar und  $I'(t) = F'(c(t))\dot{c}(t)$ . Weil  $[F']_{c(t)} = \Phi'_t = [f]_{c(t)}$  ist, folgt

$$I'(t) = f(c(t))\dot{c}(t)$$

und

$$\Phi_1(c(1)) - \Phi_0(c(0)) = I(1) - I(0) = \int_0^1 f(c(t))\dot{c}(t) dt.$$

$\square$

Wie bei der ursprünglichen Definition des Kurvenintegrals, so haben wir auch bei der Definition der Homologie von Kurven immer *stetige Differenzierbarkeit* der Kurven und singulären Rechtecke (patches) gefordert. Mit der vorstehenden Definition ergibt sich die Frage, ob der Cauchysche Integralsatz auch für Ränder von nur stetigen  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$  gilt, ob man also in der Definition der Homologie die stetige Differenzierbarkeit durch einfache Stetigkeit ersetzen kann, ohne den Cauchyschen Integralsatz mit seinen Konsequenzen zu verlieren.

Die Antwort auf diese Frage ist JA:

**Satz 111.** *Sei  $C$  eine stetige 2-Kette im Gebiet  $G$  und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\partial C} f(z) dz = 0.$$

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass  $\int_{\partial C} f(z)dz = 0$  ist für jedes stetige  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$ . Sei  $(U_j)_{j \in J}$  eine offene Überdeckung von  $C([0, 1]^2)$  durch offene Kreisscheiben  $U_j \subset G$ . Dann ist  $(C^{-1}(U_j))_{j \in J}$  eine offene Überdeckung des kompakten metrischen Raumes  $[0, 1]^2$ , und es gibt dazu eine Lebesguezahl  $\delta > 0$ , so dass jede Teilmenge von  $[0, 1]^2$  mit Durchmesser  $< \delta$  enthalten ist in einem der  $C^{-1}(U_j)$ . Zerlege  $[0, 1]^2$  durch achsenparallele Strecken in Teilrechtecke  $I_{\mu\nu}$  vom Durchmesser  $< \delta$ . Dann ist

$$\int_{\partial C} f(z)dz = \sum_{\mu, \nu} \int_{\partial(C|_{I_{\mu\nu}})} f(z)dz. \quad (49)$$

Aber weil  $C(I_{\mu\nu}) \subset U_j$  für ein geeignetes  $j$  und weil  $f|_{U_j}$  auf dem konvexen  $U_j$  eine Stammfunktion besitzt, ist die analytische Fortsetzung der Stammfunktion über jede (auch nur stetige) geschlossene Kurve 0. Damit ist  $\int_{\partial(C|_{I_{\mu\nu}})} f(z)dz = 0$  für alle  $\mu, \nu$ .  $\square$

**Beispiel 112.** Durch Heben der Singularität in 1 liefert  $\left(\frac{\log(z)}{1-z}, D\right)$  ein Funktionselement auf  $D = \{z \mid |z - 1| < 1\}$ . Fortsetzung längs der Kurve  $c(t) = e^{2\pi it}$  liefert den Quotienten der Fortsetzung von  $\log(z)$  nach  $1 - z$ , aber eine Fortsetzung längs des vollen Kreises ist nicht möglich, weil der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{2\pi i}{1 - c(t)} = \infty$  wäre. Dieses Beispiel zeigt, dass man mit der analytischen Fortsetzung möglicherweise an Punkten scheitert, in denen man “früher” schon mal problemlos fortgesetzt hat.  $\square$

## 8.2 Homotopie

- Homotopie von Kurven
- Die erste Homotopiegruppe = Fundamentalgruppe eines Gebietes
- Fortsetzung entlang homotoper Kurven führt zum selben Ergebnis (Monodromie)
- Vollständige analytische Funktionen und Riemannsche Flächen

In diesem Abschnitt sind Kurven und Homotopieabbildungen nur stetig. Gleiches gilt für die Homologie, insbesondere für “patches”. Wir betrachten offene Teilmengen  $G \subset \mathbb{C}$ , aber die meisten Definitionen und Sätze dieses Abschnitts gelten genauso für einen beliebigen topologischen Raum  $G$ .

**Definition 113 (Homotopie).** Zwei Kurven  $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow G$  mit demselben Anfangspunkt und mit demselben Endpunkt heißen *homotop (in  $G$ )*, wenn es zwischen ihnen eine *Homotopie* gibt, also eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G,$$

für die

$$H(., 0) = c_0, \quad H(., 1) = c_1$$

und

$$\begin{aligned} H(0, \tau) &= c_0(0) = c_1(0) \text{ und} \\ H(1, \tau) &= c_0(1) = c_1(1) \text{ für alle } \tau \in [0, 1]. \end{aligned}$$

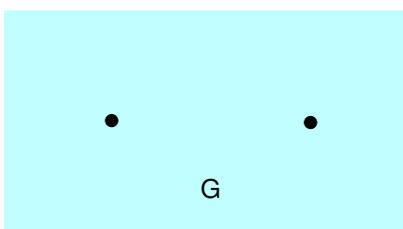
Eine geschlossene Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow G$  heißt *nullhomotop*, wenn sie homotop zur konstanten Kurve  $c_1(t) = c(0)$  ist.

Beachten Sie

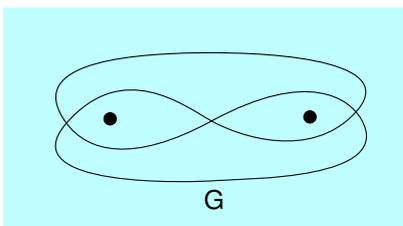
$$\partial H = {}^1H \ominus {}_1H \ominus {}^2H \oplus {}_2H \underset{G}{\simeq} \ominus c_1 \oplus c_0$$

weil die beiden ersten (konstanten) Seiten wegfallen. Also sind in  $G$  homotope Kurven auch in  $G$  homolog. Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

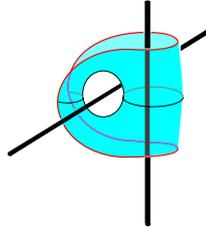
**Beispiel 114.** Sei  $G$  die zweifach gelochte komplexe Ebene:



Darin betrachten wir die folgende Kurve:



Es scheint plausibel, dass sich diese Kurve in  $G$  nicht zu einem Punkt zusammenziehen lässt, dass sie also in  $G$  nicht nullhomotop ist. Einen exakten Beweis kann man mit der Theorie der Überlagerungsräume gegeben, vgl. Skriptum *Topologie*. Andererseits ist diese Kurve in  $G$  nullhomolog. Zur anschaulichen Konstruktion einer 2-Kette mit dieser Kurve als Rand kann die folgenden Figur helfen:



Ein einfaches Kriterium für Nullhomologie werden wir im Abschnitt über die Umlaufzahl kennenlernen. □

**Definition 115 (Komposition von Kurven).** Für stetige Kurven  $c_1, c_2, c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $c_1(1) = c_2(0)$  definiert man die *Hintereinanderausführung*  $c_1c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$c_1c_2(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ c_2(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

und die *rückwärts durchlaufene Kurve*  $c^{inv} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$c^{inv}(t) := c(1 - t).$$

Beachten Sie bei der Komposition die Reihenfolge. Anders als bei der Komposition von Abbildungen kommt erst die linke und dann die rechte Kurve zur Anwendung!

**Lemma 116.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow G$  eine stetige Kurve und sei  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$ . Dann gilt:

- (i)  $cc^{inv}$  ist in  $G$  nullhomotop.
- (ii)  $c \circ \phi$  ist homotop zu  $c$ .

*Beweis.* Zu (i). Eine Homotopie ist gegeben durch

$$H(t, \tau) = \begin{cases} c(2t(1 - \tau)) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ c((2 - 2t)(1 - \tau)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Zu (ii). Eine Homotopie ist gegeben durch

$$H(t, \tau) = c((1 - \tau)\phi(t) + \tau t).$$

□

**Lemma 117.** Seien  $c_1, c_2, c_3 : [0, 1] \rightarrow G$  mit  $c_1(1) = c_2(0)$  und  $c_2(1) = c_3(0)$ . Dann ist  $c_1(c_2c_3)$  in  $G$  homotop zu  $(c_1c_2)c_3$ .

*Beweis.* Nach Definition der Hintereinanderschaltung von Wegen ist

$$c_1(c_2c_3)(t) = \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ c_2(4t - 2) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ c_3(4t - 3) & \text{für } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad c_1(c_2c_3)(t) = \begin{cases} c_1(4t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ c_2(4t - 1) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ c_3(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Setze  $a(\tau) := \frac{1}{2} - \frac{\tau}{4}$ ,  $b(\tau) := \frac{3}{4} - \frac{\tau}{4}$  und

$$H(t, \tau) = \begin{cases} c_1\left(\frac{1}{a(\tau)-0}(t-0)\right) & \text{für } 0 \leq t \leq a(\tau) \\ c_2\left(\frac{1}{b(\tau)-a(\tau)}(t-a(\tau))\right) & \text{für } a(\tau) \leq t \leq b(\tau), \\ c_3\left(\frac{1}{1-b(\tau)}(t-b(\tau))\right) & \text{für } b(\tau) \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das liefert die gewünschte Homotopie.  $\square$

**Satz 118 (und Definition: Fundamentalgruppe).** Seien  $G \subset \mathbb{C}$  offen und  $z_0 \in G$ . In der Menge aller stetigen Kurven  $c : [0, 1] \rightarrow G$  mit  $c(0) = z_0 = c(1)$ , der Menge der Schleifen in  $z_0$ , definiert Homotopie eine Äquivalenzrelation und die Hintereinanderausführung von Kurven eine Multiplikation auf der Menge  $\pi_1(G, z_0)$  der Äquivalenzklassen, die diese Menge zu einer Gruppe macht. Sie heißt die Fundamentalgruppe von  $G$  mit Basispunkt  $z_0$ . Das neutrale Element ist die Klasse der konstanten Kurve, und die Klasse von  $c^{inv}$  liefert das Inverse der Klasse von  $c$ . Die Homotopieklasse von  $c$  wird mit  $[c] \in \pi_1(G, z_0)$  bezeichnet.

*Beweis.* Homotopie ist eine Äquivalenzrelation für die Schleifen. Nur die Transitivität erfordert eine kleine Rechnung. Selber machen!

Die Multiplikation ist wohldefiniert. Seien  $H_1, H_2$  Homotopien zwischen  $c_1$  und  $\tilde{c}_1$  bzw. zwischen  $c_2$  und  $\tilde{c}_2$ . Definiere

$$H(t, \tau) := \begin{cases} H_1(2t, \tau) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H_2((2t - 1), \tau) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Für  $t = \frac{1}{2}$  ist

$$H_1(2t, \tau) = H_1(1, \tau) = z_0 = H_2(0, \tau) = H_2((2t - 1), \tau)$$

Daher ist  $H$  stetig. Rechnen Sie nach, dass

$$H(t, 0) = c_1c_2, \quad H(t, 1) = \tilde{c}_1\tilde{c}_2.$$

Die Multiplikation ist assoziativ. Vgl. Lemma 117.  $\square$

**Bemerkungen.** Die Fundamentalgruppe ist i.a. nicht abelsch, weshalb man die Gruppenoperation als Multiplikation und nicht als Addition einführt. Deshalb sollte man eigentlich besser *einshomotop* statt *nullhomotop* sagen. Tut man aber nicht.

Nach Definition hängt die Fundamentalgruppe von  $G$  vom gewählten Basispunkt  $z_0$  ab. Ist  $G$  aber ein wegzusammenhängend und  $z_1 \in G$  ein weiterer Punkt, so gibt es eine Kurve  $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$  von  $z_1$  nach  $z_0$ , und  $[c] \mapsto [\sigma c \sigma^{inv}]$  definiert einen Isomorphismus von  $\pi_1(G, z_0)$  auf  $\pi_1(G, z_1)$ .

**Satz 119 (und Definition: Einfach zusammenhängend).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$  (oder ein wegzusammenhängender topologischer Raum),  $G \neq \emptyset$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Jede geschlossene Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow G$  ist in  $G$  nullhomotop.
- (ii) Für alle  $z_0$  in  $G$  ist  $\pi_1(G, z_0) = \{1\}$ .
- (iii) Für ein  $z_0$  in  $G$  ist  $\pi_1(G, z_0) = \{1\}$ .
- (iv) Je zwei Kurven  $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow G$  mit gleichem Anfangspunkt und mit gleichem Endpunkt sind homotop in  $G$ .

In diesem Fall heißt  $G$  einfach zusammenhängend.

*Beweis.* Zu (i)  $\implies$  (ii). Trivial.

Zu (ii)  $\implies$  (iii). Trivial.

Zu (iii)  $\implies$  (iv). Seien  $c_0, c_1$  Kurven von  $p$  nach  $q$ . Wir wählen eine Kurve  $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$  mit

$$\sigma(0) = z_0, \quad \sigma(1) = p.$$

Wir schreiben  $\simeq$  für *homotop in  $G$* . Weil nach dem Lemma 117 die Hintereinanderschaltung bis auf Homotopie assoziativ ist, verzichten wir in der folgenden Rechnung auf Klammern:

$$\begin{aligned} c_0 &\simeq c_0 c_1^{inv} c_1 \\ &\simeq \sigma^{inv} \sigma c_0 c_1^{inv} \sigma^{inv} \sigma c_1 \\ &\simeq \sigma^{inv} \underbrace{\sigma c_0 c_1^{inv} \sigma^{inv}}_{(*)} \sigma c_1. \end{aligned}$$

Die Kurve  $(*)$  ist eine Schleife in  $z_0$  und nach Voraussetzung nullhomotop. Daher ist

$$c_0 \simeq \sigma \sigma^{inv} c_1 \simeq c_1.$$

Zu (iv)  $\implies$  (i). Trivial. □

**Beispiele 120.** Konvexe Mengen  $G$  sind offensichtlich einfach zusammenhängend. Dasselbe gilt für sternförmige Mengen, d.h. solche, die die Verbindungsstrecken von einem festen "Sternpunkt" zu jedem anderen ihrer Punkte enthalten.

Für sternförmige Gebiete gilt also  $\pi_1(G, z_0) = \{1\}$ .

Das Schlitzgebiet  $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ oder } \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$  ist nicht konvex, aber sternförmig.

In der gelochten Ebene  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist der Kreis  $c(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$  nicht nullhomotop, weil das Integral von  $\frac{1}{z}$  darüber nicht verschwindet. Also ist dieser Kreis auch nicht nullhomotop, und  $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$  ist deshalb nicht trivial. Man kann zeigen, dass  $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ .

Die Fundamentalgruppe der zweifach gelochten Ebene, vgl. Beispiel 114, ist nicht abelsch, sondern isomorph zur freien Gruppe mit zwei Erzeugenden. □

Für den Beweis des folgenden Monodromiesatzes stellen wir ein paar triviale Bemerkungen zusammen:

**Bemerkungen.**

- (i) Ist  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  die analytische Fortsetzung von  $\phi_0$  längs  $c$ , so definiert  $\tilde{\phi}_t := \phi_{1-t}$  die analytische Fortsetzung von  $\phi_1$  längs  $c^{inv}$ .
- (ii) Ist  $(\phi_t^i)_{t \in [0,1]}$  für  $i = 0, 1$  die analytische Fortsetzung von  $\phi_0^i$  längs  $c_i$ , ist  $c_0(1) = c_1(0)$  und  $\phi_1^0 = \phi_0^1$ , so definiert

$$\phi_t := \begin{cases} \phi_{2t}^0 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \phi_{2t-1}^1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

die analytische Fortsetzung von  $\phi_0^0$  längs  $c_0 c_1$ .

**Satz 121 (Monodromiesatz).** Seien  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, und  $\phi_0$  ein Funktionskeim in  $z_0 \in G$ , der sich längs jeder in  $z_0$  beginnenden Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow G$  analytisch fortsetzen läßt. Sind dann  $c$  und  $\tilde{c}$  zwei in  $z_0$  beginnende homotope Kurven zum Punkt  $z_1$  und sind  $\phi_1$  und  $\tilde{\phi}_1$  aus  $\phi_0$  entstanden durch analytische Fortsetzung längs  $c$  bzw.  $\tilde{c}$ , so gilt

$$\phi_1 = \tilde{\phi}_1.$$

*Verkürzt: Analytische Fortsetzungen längs homotoper Kurven führen zum selben Ergebnis.*

*Beweis.* Sei  $H : [0, 1]^2 \rightarrow G$  eine Homotopie zwischen  $c =: c_0$  und  $\tilde{c} =: c_1$ .

Jeder Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  mit  $\gamma(0) = (0, 0)$  entsprechen eine Kurve  $H \circ \gamma$  in  $G$  und eine analytische Fortsetzung von  $\phi_0$  längs dieser Kurve. Wir nennen das kurz *die Fortsetzung längs  $\gamma$* . Ist  $\gamma$  geschlossen und führt die Fortsetzung längs  $\gamma$  zurück zu  $\phi_0$ , so sagen wir, *die Fortsetzung längs  $\gamma$  ist die Identität*. Wir müssen nach den obigen Bemerkungen also zeigen, dass die Fortsetzung entlang des (positiv durchlaufenen) Kantenweges um das Rechteck  $[0, 1]^2$  herum beginnend mit der linken unteren Ecke  $(0, 0)$  die Identität ist.

Annahme: Das ist nicht so. Dann setzen wir

$$t_k := \sum_{j=1}^k \frac{1}{3^j}$$

und beachten, dass  $t_k \nearrow \frac{1}{2}$ . Wir konstruieren eine Folge von in  $(0, 0)$  geschlossenen Kurven  $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\gamma_k|_{[t_k, 1-t_k]}$  ist der Kantenweg um ein Rechteck  $R_k \subset [0, 1]^2$ .
- (ii)  $\gamma_k(t) = \gamma_k(1-t)$  für  $0 \leq t \leq t_k$ .
- (iii)  $\gamma_{k+1}|_{[0, t_k]} = \gamma_k|_{[0, t_k]}$ .
- (iv)  $R_{k+1} \subset R_k$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(R_k) = 0$ .
- (v) Die Fortsetzung  $(\phi_t^k)_{t \in [0,1]}$  längs  $\gamma_k$  ist nicht die Identität.

Beachte, dass (v) nach den Vorbemerkungen gleichbedeutend damit ist, dass die Fortsetzung von  $\phi_{t_k}^k$  längs  $\gamma_k|_{[t_k, 1-t_k]}$  um das Rechteck  $R_k$  nicht die Identität ist.

Dann ist  $\bigcap R_k = \{z^*\}$ , und die Folge  $\gamma_k$  konvergiert gegen eine stetige Kurve  $\gamma^*$  mit

$$\gamma^*\left(\frac{1}{2}\right) = z^* \text{ und } \gamma(t) = \gamma(1-t) \text{ f\u00fcr alle } t \in [0, 1].$$

Sei nun  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so dass  $[f]_H(z^*)$  die analytische Fortsetzung von  $\phi_0$  l\u00e4ngs  $H \circ \gamma^*|_{[0, \frac{1}{2}]}$  ist. F\u00fcr hinreichend gro\u00dfes  $k$  ist dann  $H(R_k) \subset G$ , und weil  $\gamma^*|_{[0, t_k]} = \gamma_k|_{[0, t_k]}$  ist, ist

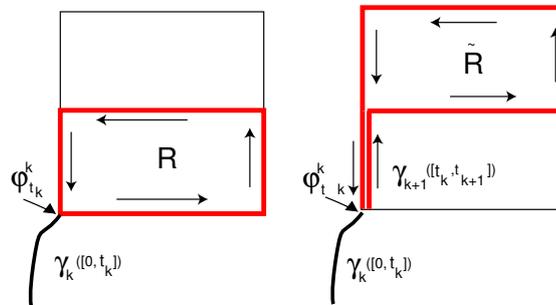
$$\phi_{t_k}^k = \phi_{t_k}^* = [f]_{H \circ \gamma^*(t_k)}.$$

Aber dann ist die Fortsetzung dieses Keimes um  $R_k$  trivial, also die Fortsetzung von  $\phi_{t_k}^k$  l\u00e4ngs  $\gamma_k|_{[t_k, 1-t_k]}$  um das Rechteck  $R_k$  doch die Identit\u00e4t. Widerspruch!

Es bleibt die Konstruktion der  $\gamma_k$ .

Sei  $\gamma_0$  der Kantenweg um  $R_0 := [0, 1]^2$ , und sei  $\gamma_k$  mit den Eigenschaften (i) - (v) bereits konstruiert.

Wir betrachten zun\u00e4chst den Fall, dass  $k = 2m$  gerade ist. Wir teilen  $R_k$  horizontal in zwei H\u00e4lften  $R$  und  $\tilde{R}$  und betrachten zwei m\u00f6gliche Fortsetzungen von  $\gamma_k|_{[0, t_k]}$ :



Weil die Fortsetzung von  $\phi_{t_k}^k$  um  $R_k$  nicht die Identit\u00e4t ist, ist die Fortsetzung um  $R$  oder um  $\tilde{R}$  nicht die Identit\u00e4t. Wir nennen entsprechend  $R$  oder  $\tilde{R}$  dann  $R_{k+1}$ . Wir parametrisieren auf  $[t_k, t_{k+1}]$  linear die Verbindung von  $\gamma_k(t_k)$  zur linken unteren Ecke von  $R_{k+1}$  - im ersten Fall ist das dann einfach ein konstantes Kurvenst\u00fcck - und auf  $[t_{k+1}, 1 - t_{k+1}]$  den Umlauf um  $R_{k+1}$ . Dann erf\u00fcllt  $\gamma_{k+1}$  die Bedingungen (i) - (v).

Im Fall  $k = 2m - 1$  ungerade f\u00fchrt man eine analoge Konstruktion mit einer *vertikalen* Halbierung von  $R_k$  durch. Der Wechsel von horizontaler und vertikaler Teilung erzwingt, dass der Durchmesser der  $R_k$  gegen Null geht.  $\square$

### 8.3 Die riemannsche Fläche eines Funktionskeims

- Konstruktion der “maximal fortgesetzten” holomorphen Funktion aus einem Funktionskeim
- Die Garbe der Keime holomorpher Funktionen
- Die Topologie der Riemannschen Fläche

**Definition 122 (Riemannsche Fläche eines Funktionskeims).** Sei  $\phi$  ein holomorpher Funktionskeim und  $\mathcal{R}_\phi$  die Familie aller Keime, die durch alle möglichen analytische Fortsetzung von  $\phi$  längs stetiger Kurven in  $\mathbb{C}$  entstehen. Dann heißt  $\mathcal{R}_\phi$  die von  $\phi$  erzeugte oder induzierte *Riemannsche Fläche*. Auf  $\mathcal{R}_\phi$  betrachten wir zwei Abbildungen, die *Fußpunktabbildung*

$$p_\phi : \mathcal{R}_\phi \rightarrow \mathbb{C}, [f]_z \mapsto z$$

und die von  $\phi$  erzeugte *vollständige analytische Funktion*

$$\mathcal{F}_\phi : \mathcal{R}_\phi \rightarrow \mathbb{C}, [f]_z \mapsto f(z).$$

**Bemerkung.** Man kann zeigen, dass jede stetige Kurve in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  homotop zu einem Polygonzug mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist, und dass man andererseits jeden Polygonzug stetig differenzierbar(!) parametrisieren kann. Darum liefert die analytische Fortsetzung eines Keims längs stetiger Kurven in  $G$  nach dem Monodromiesatz dieselben Funktionskeime wie die Fortsetzung längs stetig differenzierbarer Kurven.

Die vollständige analytische Funktion ist also wirklich eine Funktion. Ihren Definitionsbereich bringt sie gewissermaßen mit. Allerdings ist die Riemannsche Fläche einstweilen nur eine *Menge*, und es erst einmal unklar, in welchem Sinne  $\mathcal{F}_\phi$  analytisch oder auch nur stetig sein sollte.

Wir zeigen nun Beispiele, in denen sich eine Topologie und analytische Struktur für die Fläche quasi von selbst anbieten.

Wir machen dabei Gebrauch von folgender Tatsache: Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $\phi = [g]_z$  ein analytischer Funktionskeim in  $z \in \mathbb{C}$  und  $\phi(z) \in G$ , so ist  $f(\phi) := f([g]_z) := [f \circ g]_z$  ein wohl-definierter Funktionskeim in  $z$ . Ist allgemeiner  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  eine analytische Fortsetzung längs  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  und liegen die Werte  $\phi_t(c(t))$  im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so ist  $(f(\phi_t))_{t \in [0,1]}$  eine Fortsetzung von  $f(\phi_0)$  längs  $c$ .

**Beispiel 123 (Die Riemannsche Fläche des Logarithmus).** Für den Keim  $[\log]_1$  des Hauptwertlogarithmus in 1 schreiben wir kurz  $\log$ . Ist  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  eine analytische Fortsetzung von  $\log$  längs einer Kurve  $c$ , so ist  $(e^{\phi_t})_t$  eine analytische Fortsetzung von  $e^{\log} = [z]_1$ . Aber die ist trivial, weil  $z$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist. Ist daher  $\phi = [f]_{z_0} \in \mathcal{R}_{\log}$ , so ist

$$e^{f(z)} = z$$

für alle  $z$  nah bei  $z_0$ . Das Funktionselement  $f$  zum Keim  $\phi$  ist also ein lokales Inverses der Exponentialfunktion. Sein Funktionswert ist  $f(z_0) = \log |z_0| + i\alpha$ , wobei  $\alpha$  modulo  $2\pi$  eindeutig bestimmt ist. Der Wert hängt ab von der Kurve, die man für die analytische Fortsetzung benutzt hat, und weil jeder Umlauf um 0 der Winkel um  $2\pi$  erhöht oder vermindert, ist es klar, dass  $\mathcal{R}_{\log}$  die Keime *aller* lokalen Inversen von  $\exp$  enthält.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{R}_{\log}, \quad w \mapsto [f_w]_{e^w}.$$

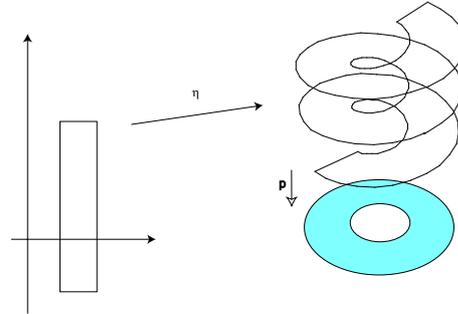
Dabei sei  $f_w$  “die” auf einer Umgebung von  $e^w$  definierte lokale Inverse der Exponentialfunktion mit  $f_w(e^w) = w$ . Offenbar ist  $\eta$  wohldefiniert und eine Bijektion, die es erlaubt,  $\mathcal{R}_{\log}$  mit  $\mathbb{C}$  zu identifizieren. Bezeichnet  $\mathcal{F}_{\log} : \mathcal{R}_{\log} \rightarrow \mathbb{C}, [f]_z \mapsto f(z)$  die vollständige analytische Funktion zum komplexen Logarithmus, so folgt

$$\mathcal{F}_{\log}(\eta(w)) = \mathcal{F}_{\log}([f_w]_{e^w}) = f_w(e^w) = w.$$

Das hilft, sich  $\mathcal{R}_{\log}$  vorzustellen, wenn man noch beachtet, dass für die Fußpunktabbildung  $p_{\log} : \mathcal{R}_{\log} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt

$$p_{\log} \circ \eta(w) = e^w.$$

Die Projektion  $p_{\log}$  wickelt also  $\mathcal{R}_{\log}$  auf die punktierte Ebene genauso auf, wie die Exponentialfunktion das mit  $\mathbb{C}$  macht.



□

**Beispiel 124 (Die Riemannsche Fläche der Wurzel).** Die Funktion  $z \mapsto z^2$  hat auf einer Umgebung von 1 ein lokales Inverses, dessen Funktionskeim in  $1^2 = 1$  wir mit  $\sqrt{\phantom{z}}$  bezeichnen. Das Argument aus dem vorigen Beispiel zeigt, dass

$$f(z)^2 = z$$

für alle  $\phi = [f]_z \in \mathcal{R}_{\sqrt{\phantom{z}}}$ . Also ist  $f$  eine lokale Quadratwurzel, deren Vorzeichen vom bei der analytischen Fortsetzung benutzten Weg abhängt. Die Identität  $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log z}$  garantiert die Fortsetzbarkeit längs aller Kurven in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Überlegen Sie, dass  $\mathcal{R}_{\sqrt{\phantom{z}}}$  die Keime *aller* lokalen Quadratwurzeln enthält. Beachten Sie auch, dass  $z \mapsto z^2$  in 0 nicht lokal invertierbar ist, so dass  $\mathcal{R}_{\sqrt{\phantom{z}}}$  keinen Keim in 0 enthält.

Wir definieren eine Abbildung

$$\eta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{R}_{\sqrt{\phantom{z}}}, w \mapsto \phi_w = [f]_{w^2}.$$

Dabei soll  $\phi_w$  der Keim einer lokalen Inversen  $f$  der Quadratfunktion im Fußpunkt  $w^2$  sein, für die  $f(w^2) = w$  gilt. Das liefert wie im vorangehenden Beispiel eine Bijektion, und es gilt

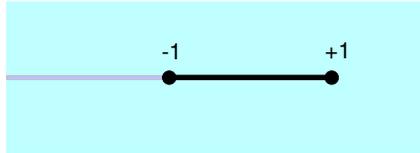
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\sqrt{\phantom{z}}}(\eta(w)) &= w, \\ p_{\sqrt{\phantom{z}}}(\eta(w)) &= w^2. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 125.** Auf der Menge  $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 1 \text{ oder } \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$  ist durch

$$\sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2} \log(z-1)} e^{\frac{1}{2} \log(z+1)}$$

eine holomorphe Funktion definiert, und wir setzen deren Keim in irgendeinem Punkt (z.B. 2) analytisch fort. Bei Überschreiten des Strahls  $\{z \mid z = x < -1\}$  springt in beiden Exponenten der halbe Logarithmus um  $\pi i$ , d.h. beide Faktoren der rechten Seite erben ein Minuszeichen: Die Funktion läßt sich auf dem Strahl holomorph ergänzen. Es bleibt nur die abgeschlossene Strecke zwischen  $-1$  und  $+1$  auf der reellen Achse als Lücke im Definitionsbereich.



Bei analytischer Fortsetzung über diese Lücke “wechselt die Wurzel das Vorzeichen”. Die Riemannsche Fläche ist in diesem Fall nicht mehr so einfach zu parametrisieren, sie “besteht” aus zwei zwischen  $-1$  und  $+1$  geschlitzten komplexen Ebenen, bei denen die gegenüberliegenden Ränder der Schlitzte verklebt sind.

□

Wir konstruieren nun gewissermaßen die Riemannschen Flächen aller Keime holomorpher Funktionen gleichzeitig. Dabei finden wir eine natürliche Topologie auf diesen Flächen, die insbesondere den Namen “Fläche” rechtfertigt: sie sind lokal homöomorph zur komplexen Ebene  $\mathbb{C}$ .

**Definition 126.** (i) Wir nennen die Menge

$$\mathcal{O} := \{ \phi = [f]_z \mid z \in \mathbb{C} \text{ und } \phi \text{ Keim einer holomorphen Funktion } f \text{ in } z \}$$

die *Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf  $\mathbb{C}$*  und die Abbildung

$$p : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}, \quad [f]_z \mapsto z$$

die *Fußpunktabbildung* oder *-projektion* der Garbe.

(ii) Für holomorphes  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  setzen wir

$$N(g, G) := \{ \phi \mid \text{Es gibt } z \in G \text{ mit } \phi = [g]_z \} \subset \mathcal{O}$$

und damit für  $\phi \in \mathcal{O}$

$$\mathcal{N}_\phi := \{ N(g, G) \mid \text{Es gibt } z \in G \text{ mit } [g]_z = \phi \}.$$

**Lemma 127.** *Es gilt*

(i) *Für  $N(g, G) \in \mathcal{N}_\phi$  ist  $\phi \in N(g, G)$ .*

(ii) *Für alle  $N_1 \in \mathcal{N}_{\phi_1}$ ,  $N_2 \in \mathcal{N}_{\phi_2}$ , und  $\phi_3 \in N_1 \cap N_2$  gibt es ein  $N_3 \in \mathcal{N}_{\phi_3}$  mit*

$$N_3 \subset N_1 \cap N_2.$$

(iii) *Zu jedem  $\phi \in N(g, G) \subset \mathcal{O}$  ist  $N(g, G) \in \mathcal{N}_\phi$ .*

(iv) *Zu allen  $\phi_1 \neq \phi_2$  gibt es  $N_1 \in \mathcal{N}_{\phi_1}$ ,  $N_2 \in \mathcal{N}_{\phi_2}$  mit*

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset.$$

*Die Eigenschaften (i), (ii) bedeuten, dass die Familie  $(\mathcal{N}_\phi)_{\phi \in \mathcal{O}}$  eine Umgebungsbasis bilden.*

*Beweis.* (i) und (iii) sind trivial.

*Zu (ii).* Ist  $N_j = N(g_j, G_j)$ ,  $j = 1, 2$  und  $\phi \in N_1 \cap N_2$ , so ist  $z := p(\phi) \in G_1 \cap G_2$  und  $\overline{[g_1]_z} = \phi = [g_2]_z$ . Also ist  $g_1 = g_2$  auf der Zusammenhangskomponente  $G_3$  von  $G_1 \cap G_2$  in der  $z$  liegt und  $N_3 := N(g_1, G_3)$  erfüllt die Behauptung.

Zu (iv). Ist  $p(\phi_1) \neq p(\phi_2)$ , so wählen wir Repräsentanten  $(f_1, G_1)$  für  $\phi_1$  und  $(f_2, G_2)$  für  $\phi_2$  mit  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$  und setzen  $N_j := N(f_j, G_j)$ .

Ist aber  $p(\phi_1) = p(\phi_2)$ , und sind  $(f_j, G_j)$  für  $j = 1, 2$  Repräsentanten von den verschiedenen Keimen  $\phi_j$ , so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $G_1 = G_2 =: G$  ein (zusammenhängendes!) Gebiet ist. Wir setzen  $N_j := (f_j|_G, G)$ . Dann ist offenbar  $N_j \in \mathcal{N}_{\phi_j}$  und es gilt  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ . Sonst hätten nämlich  $f_1$  und  $f_2$  in einem  $z \in G$  denselben Keim und wären nach dem Identitätssatz auf  $G$  gleich. Widerspruch!  $\square$

**Satz 128 (Topologie von  $\mathcal{O}$ ).** Wir nennen  $U \subset \mathcal{O}$  offen, wenn es zu jedem  $\phi \in U$  ein  $N \in \mathcal{N}_\phi$  gibt, so dass  $N \subset U$ . Dann gilt:

- (i) Die Mengen  $N \in \mathcal{N}_\phi$  sind offen.
- (ii) Die offenen Mengen in  $\mathcal{O}$  bilden eine hausdorffsche Topologie.
- (iii) Die Fußpunktabbildung  $p : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig bezüglich dieser Topologie und ein lokaler Homöomorphismus.
- (iv) Die Abbildung  $\mathcal{F} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}, [f]_z \mapsto f(z)$  ist stetig.

Beweis. Zu (i). Die  $N(g, G)$  sind offen nach Teil (iii) des Lemmas.

Zu (ii). Es ist klar, dass die leere Menge und  $\mathcal{O}$  sowie die Vereinigung beliebiger Familien offener Mengen offen sind. Sind  $U, V \subset \mathcal{O}$  offene Mengen und ist  $\phi \in U \cap V$ , so gibt es  $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\phi$  mit  $N_1 \subset U, N_2 \subset V$ . Nach Teil (iv) des Lemmas gibt es dann ein  $N_3 \in \mathcal{N}_\phi$  mit  $N_3 \subset N_1 \cap N_2 \subset U \cap V$ . Also ist der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen wieder offen. Damit sind die Axiome einer Topologie erfüllt. Die Hausdorff-Eigenschaft folgt aus Teil (iii) des Lemmas.

Zu (iii). Für offenes  $H \subset \mathbb{C}$  und holomorphes  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$p^{-1}(H) \cap N(g, G) = \{[g]_z \mid z \in G \cap H\} = N(g|_{G \cap H}, G \cap H).$$

Damit ist  $p^{-1}(H)$  als Vereinigung offener Mengen offen und  $p$  stetig. Weil  $p(N(g, G)) = G$ , bildet  $p$  offene Mengen auf offene Mengen ab, ist also eine sogenannte offene Abbildung. Für jedes Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  ist  $p|_{N(g, G)}$  offenbar surjektiv auf  $G$  und injektiv. Damit ist  $p|_{N(g, G)} : N(g, G) \rightarrow G$  ein Homöomorphismus.

Zu (iv). Für offenes  $H \subset \mathbb{C}$  und holomorphes  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$\mathcal{F}^{-1}(H) \cap N(g, G) = \{[g]_z \mid z \in G \text{ und } g(z) \in H\} = N(g|_{g^{-1}(H)}, g^{-1}(H)).$$

Damit ist  $\mathcal{F}^{-1}(H)$  als Vereinigung offener Mengen offen und  $\mathcal{F}$  stetig.  $\square$

**Satz 129 (Analytische Fortsetzung und Kurven in  $\mathcal{O}$ ).** (i) Ist  $\hat{c} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}$  eine stetige Kurve, so ist  $(\hat{c}(t))_{t \in [0, 1]}$  die analytische Fortsetzung von  $\hat{c}(0)$  längs  $c := p \circ \hat{c}$ .

(ii) Ist umgekehrt  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  die analytische Fortsetzung eines Keims  $\phi_0$  längs der Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , so definiert  $\hat{c}(t) = \phi_t$  eine stetige Kurve in  $\mathcal{O}$  mit  $p \circ \hat{c} = c$  und  $\hat{c}(0) = \phi_0$ .

Beweis. Zu (i).  $\hat{c}(t)$  ist ein Keim an der Stelle  $c(t) = p(\hat{c}(t))$ . Ist  $\hat{c}(t) \in N(g, G)$ , so gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass  $\hat{c}(s) \in N(g, G)$  für alle  $s \in [0, 1]$  mit  $|s - t| < \delta$ . Das bedeutet aber  $\hat{c}(s) = [g]_{c(s)}$ , und das ist genau die Bedingung für die analytische Fortsetzung.

Zu (ii). Zu zeigen ist nur, dass  $\hat{c}$  stetig ist. Zu  $t \in [0, 1]$  gibt es ein  $\delta > 0$  und ein Funktionselement  $(g, G)$ , so dass  $c(s) \in G$  und  $\phi_s = [g]_{c(s)}$  für alle  $s \in [0, 1]$  mit  $|s - t| < \delta$ . Das bedeutet aber  $\hat{c}(t) = (p|_{N(g,G)})^{-1}(c(s))$  und damit die Stetigkeit von  $\hat{c}$ .  $\square$

Weil  $\mathcal{O}$  nach Satz 128 lokal homöomorph zu  $\mathbb{C}$  ist, ist es lokal wegzusammenhängend. Daher sind die Wegzusammenhangskomponenten von  $\mathcal{O}$  auch die Zusammenhangskomponenten. Der letzten beiden Sätze liefern daher als Folgerung

**Satz 130.** *Die Riemannsche Fläche des Keims  $\phi$  ist die  $\phi$  enthaltende Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{O}$ . Die vollständige analytische Funktion  $\mathcal{F}_\phi : \mathcal{R}_\phi \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig.*

Die Geschichte ist hier noch lange nicht zuende. Die Riemannschen Flächen haben nicht nur eine Topologie, sondern die Struktur einer analytischen Mannigfaltigkeit, und die vollständige analytische Funktion ist darauf holomorph. Weiter ist es interessant, Riemannsche Flächen durch sogenannte Verzweigungspunkte zu vervollständigen, indem man zum Beispiel die Abbildung  $\eta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{R}_{\sqrt{\cdot}}$  ergänzt durch  $\eta(0) := [0]_0$ . Erzählt werden solche Fortsetzungen der Geschichte in Vorlesungen über Riemannsche Flächen.

## 9 Umlaufzahl und Homologie

- Definition der Umlaufzahl eines Zyklus
- Wann ist ein 1-Zyklus nullhomolog? Das Homologiekriterium von Artin
- Die Umlaufzahlversion der Cauchyschen Integralformel

Ein *1-Zyklus* ist eine Verallgemeinerung einer geschlossenen Kurve, nämlich eine 1-Kette, deren Rand = 0 ist. Das bedeutet, dass jeder Punkt von  $\mathbb{C}$  gleich oft als Anfangspunkt wie als Endpunkt einer Kurve in der Kette auftritt, wobei die durch die Koeffizienten der Linearkombination gegebenen Multiplizitäten berücksichtigt werden müssen:

$$m_1 c_1 \oplus \dots \oplus m_k c_k$$

ist ein 1-Zyklus, wenn für alle  $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, k \\ c_j(0)=z}} m_j = \sum_{\substack{j=1, \dots, k \\ c_j(1)=z}} m_j$$

Wir betrachten dabei 1-Ketten mit *stetigen* Kurven  $c_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Das Integral von holomorphen Funktionen über solche Ketten ist nach dem letzten Kapitel definiert.

Der Rand  $\partial C$  einer 2-Kette ist stets ein 1-Zyklus. (Beweis?)

Für eine 1- oder 2-Kette  $C = \sum m_j c_j$  mit paarweise verschiedenen  $c_j$  definieren wir den Träger von  $C$  als die Menge

$$|C| := \bigcup \text{Bild } c_j,$$

wobei die Vereinigung über alle  $j$  gebildet wird, für die  $m_j \neq 0$  und  $c_j$  nicht konstant ist.

**Definition 131 (Umlaufzahl).** Für einen stetigen 1-Zyklus  $c$  in  $\mathbb{C}$  und  $z_0 \notin |c|$  definieren wir die Umlaufzahl als

$$\text{Uml}(c, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - z_0}.$$

**Beispiel 132.** Für den  $n$ -fach durchlaufenen Kreis  $c(t) = a + re^{2\pi i n t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ist

$$\text{Uml}(c, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{r 2\pi i n e^{2\pi i n t}}{r e^{2\pi i n t}} dt = n.$$

Für ein Rechteck  $R$  gilt

$$\text{Uml}(\partial R, z_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z_0 \text{ innerer Punkt von } R, \\ 0, & \text{falls } z_0 \notin R. \end{cases}$$

vgl. Beispiel 50 bzw. den Cauchyschen Integralsatz.

□

**Satz 133 (Umlaufzahl).**

(i) Die Umlaufzahl  $\text{Uml}(c, z_0)$  eines stetigen 1-Zyklus ist ganzzahlig.

(ii) Ist  $c$  ein stetiger 1-Zyklus und liegen  $z_0$  und  $z_1$  in derselben Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus |c|$ , so gilt

$$\text{Uml}(c, z_0) = \text{Uml}(c, z_1).$$

(iii) Sind die stetigen 1-Zyklen  $c$  und  $\tilde{c}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  (stetig) homolog, so ist

$$\text{Uml}(\tilde{c}, z_0) = \text{Uml}(c, z_0).$$

Das gilt insbesondere, wenn  $c$  und  $\tilde{c}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  homotope geschlossene Kurven sind.

*Beweis.* Zu (i). Ist  $F(z)$  eine lokale Stammfunktion von  $\frac{1}{z-z_0}$ , so ist

$$\frac{d}{dz} \left( (z - z_0) e^{-F(z)} \right) = e^{-F(z)} (1 - (z - z_0) F'(z)) = 0,$$

also  $e^{F(z)} = A(z - z_0)$  für eine Konstante  $A \neq 0$ .

Ist  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  eine stetige Kurve und  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  die analytische Fortsetzung einer lokalen Stammfunktion bei  $c(0)$ , so ist nach Definition

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = \phi_1(c(1)) - \phi_0(c(0)). \quad (50)$$

Weil aber  $(e^{\phi_t})_{t \in [0, 1]}$  die analytische Fortsetzung von  $[A(z - z_0)]_{c(0)}$  - und damit trivial - ist, folgt

$$\exp \left( \int_c \frac{dz}{z - z_0} \right) = \frac{e^{\phi_1(c(1))}}{e^{\phi_0(c(0))}} = \frac{A(c(1) - z_0)}{A(c(0) - z_0)} = \frac{c(1) - z_0}{c(0) - z_0}. \quad (51)$$

Ist nun  $c = \sum m_j c_j$  ein stetiger 1-Zyklus, so ist

$$\exp \left( \int_c \frac{dz}{z - z_0} \right) = \prod \left( \frac{c_j(1) - z_0}{c_j(0) - z_0} \right)^{m_j}.$$

Weil in einem Zyklus jeder Punkt sooft als Endpunkt wie als Anfangspunkt einer Kurve vorkommt, stehen im Zähler und Nenner des Produktes dieselben Faktoren, es ist also = 1 und

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zu (ii). Das Umlaufintegral ist stetig in  $z_0$  auf dem Komplement von  $|c|$  und deshalb nach (i) auf den Zusammenhangskomponenten konstant.

Zu (iii). Cauchyscher Integralsatz für stetige Ketten, vgl. Satz 111. □

**Bemerkung.** Ist  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  eine stetig differenzierbare geschlossene Kurve, so kann man (mit Hilfe des Satzes von Sard über kritische Wertmengen) zeigen, dass es immer ein  $a \neq 0$  gibt, so daß der Strahl  $S := \{z_0 + ta \mid t \geq 0\}$  die Kurve  $c$  transversal schneidet:  $c^{-1}(S) = \{t_1, \dots, t_m\} \subset ]0, 1[$  und für jedes  $j \in \{1, \dots, m\}$  ist das Euklidische Skalarprodukt  $\langle i\dot{c}(t_j), a \rangle > 0$  (die Kurve schneidet in  $t_j$  den Strahl von links) oder  $\langle i\dot{c}(t_j), a \rangle < 0$  (die Kurve schneidet in  $t_j$  den Strahl von rechts). Mittels einer Logarithmusfunktion  $\log(z - z_0)$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{S\}$  zeigt man dann, dass

$$\begin{aligned} \text{Uml}(c, z_0) = & \# \{j \mid \text{Die Kurve schneidet in } t_j \text{ von rechts}\} \\ & - \# \{j \mid \text{Die Kurve schneidet in } t_j \text{ von links}\}. \end{aligned}$$

Man kann also die Umlaufzahl ermitteln, indem man "Vorfahrts-Situationen" zählt. Ich gehe auf die Beweisdetails aber nicht ein.

**Satz 134 (Artinsches Homologiekriterium).** *Ein 1-Zyklus  $c$  ist in  $G$  nullhomolog genau dann, wenn  $\text{Uml}(c, a) = 0$  für jedes  $a$  im Komplement von  $G$ .*

Wenn  $c$  nullhomolog in  $G$  und  $a \notin G$  ist, ist  $c$  erst recht nullhomolog in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ . Dann ist aber nach dem Cauchyschen Integralsatz  $\text{Uml}(c, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z-a} = 0$ .

Wir bereiten den Beweis der Umkehrung durch drei Hilfssätze vor, von denen zumindest der erste auch sonst von Interesse ist. Für die Beweise erinnern wir daran, dass für ein singuläres Quadrat  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$  gilt:

$$\partial C = \oplus C(1, t) \ominus C(0, t) \oplus C(t, 1) \oplus C(t, 0).$$

Wir schreiben

$$c_1 \underset{G}{\sim} c_2,$$

wenn  $c_1$  und  $c_2$  in  $G$  homolog sind.

**Lemma 135.** *Sei  $c : [0, 1] \rightarrow G$  eine Kurve. Dann gilt*

(i) Für  $c^{\text{inv}}(t) := c(1-t)$  ist

$$\ominus c^{\text{inv}} \underset{G}{\sim} c$$

(ii) Für stetiges  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$  und  $c^\phi(t) = c(\phi(t))$  ist

$$c^\phi \underset{G}{\sim} c.$$

(iii) Für  $0 < \alpha < 1$  und

$$c_1(t) = c(t\alpha), \quad c_2(t) = c((1-t)\alpha + t)$$

gilt

$$c_1 \oplus c_2 \underset{G}{\sim} c.$$

(iv) Sind  $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow G$  stetig mit  $c_1(1) = c_2(0)$ , so ist

$$c_1 \oplus c_2 \underset{G}{\sim} c_1 c_2.$$

*Beweis.* Rechnen Sie nach:

- (i) Für  $C(s, t) = c((1-s)t)$  ist  $\partial C = \ominus c^{inv} \ominus c$ ,
- (ii) Für  $C(s, t) = c((1-s)t + s\phi(t))$  ist  $\partial C = c^\phi \ominus c$ ,
- (iii) Für  $C(s, t) = c(s + \alpha t(1-s))$  ist  $\partial C = c \ominus (c_1 \oplus c_2)$ .

Zu (iv). Folgt aus (iii). □

Unter einem *linearen Kantenweg* wollen wir eine Kurve der Form  $\gamma(t) = a + tb, 0 \leq t \leq 1$  verstehen, bei dem  $b$  reell oder rein-imaginär ist.

**Lemma 136.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Kurve und  $R$  ein offenes Rechteck, welches  $c([0, 1])$  enthält.

Wir setzen

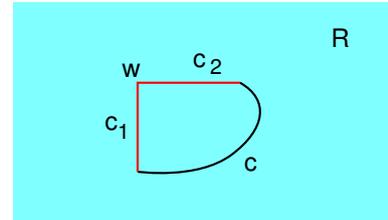
$$w := \operatorname{Re} c(0) + i \operatorname{Im} c(1)$$

und definieren zwei lineare Kantenwege

$$\gamma_1(t) := (1-t)c(0) + tw \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) := (1-t)w + tc(1),$$

vgl. Abbildung. Dann gilt

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 \underset{R}{\sim} c.$$



$c$  ist also in  $R$  homolog zur Summe zweier linearer Kantenwege.

*Beweis.* Weil  $R$  konvex ist, ist  $\gamma_1\gamma_2$  homotop zu  $c$ . Aus Teil (iv) des vorigen Lemmas folgt die Behauptung. □

**Lemma 137.** Ist  $c$  eine 1-Kette in  $G$ , so gibt es lineare Kantenwege  $c_1, \dots, c_n$  und Koeffizienten  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ , so dass

$$c \underset{G}{\sim} m_1 c_1 \oplus \dots \oplus m_n c_n.$$

Jede 1-Kette in  $G$  ist homolog zu einer 1-Kette aus linearen Kantenwegen.

*Beweis.* Es genügt, das für eine Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow G$  zu zeigen. In diesem Fall besitzt  $c([0, 1])$  eine Überdeckung durch offene Rechtecke, die in  $G$  enthalten sind. Nach dem Lemma von Lebesgue gibt es dann eine Unterteilung  $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$ , so dass jedes  $c([t_{k-1}, t_k])$  in einem der Rechtecke liegt. Aus Lemma 135 (iii) folgt durch Induktion

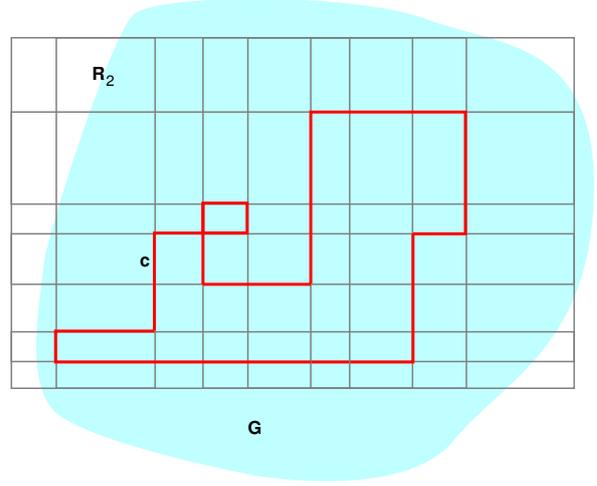
$$c \underset{G}{\sim} \tilde{c}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{c}_m$$

mit  $\tilde{c}_j(t) = c((1-t)t_{j-1} + tt_j)$ . Nach Lemma 136 ist jedes  $\tilde{c}_j$  homolog zur Summe zweier linearer Kantenwege. □

*Beweis des Artinschen Kriteriums.*

**1. Schritt.** Nach Lemma 137 können wir annehmen, dass  $c$  eine formale Linearkombination linearer Kantenwege ist.

Wir wählen ein kompaktes Rechteck  $R$ , welches  $|c|$  in Inneren enthält und zerlegen dieses durch horizontale und vertikale Geraden durch alle Anfangs- und Endpunkte der in  $c$  auftretenden Kantenwege in eine Familie  $R_1, \dots, R_n$  von Rechtecken, vgl. die Abbildung. Die  $R_j$  seien kompakt, so dass benachbarte Rechtecke an den Kanten überlappen. Wir bezeichnen mit demselben Symbol  $R_j$  auch das singuläre Rechteck  $[0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , welches das Einheitsquadrat auf die offensichtliche Weise auf  $R_j$  abbildet, und wir bezeichnen mit  $\mathcal{E}$  die Menge der Seiten aller  $R_j$ .



Nach Lemma 135 ist dann

$$c \underset{G}{\sim} \sum_{\gamma \in \mathcal{E}} m(\gamma) \gamma$$

für geeignete  $m(\gamma) \in \mathbb{Z}$ , und wir nehmen an, dass

$$c = \sum_{\gamma \in \mathcal{E}} m(\gamma) \gamma,$$

**2. Schritt.** Wir setzen  $R_0 := \mathbb{C} \setminus R$  und wählen für jedes  $j = 0, \dots, n$  ein  $a_j$  im Inneren von  $R_j$ . Damit definieren eine 2-Kette

$$C^* = \sum_{j=1}^n \text{Uml}(c, a_j) R_j.$$

Ist  $a \in \mathbb{C} \setminus G$ , so ist nach Voraussetzung  $\text{Uml}(c, a) = 0$ , und für alle  $\tilde{a}$  in der  $a$ -Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus |c|$  gilt ebenfalls  $\text{Uml}(c, \tilde{a}) = 0$ . Ist insbesondere  $a \in (\mathbb{C} \setminus G) \cap R_j$ , so ist offenbar  $a \notin |c|$  und es folgt  $\text{Uml}(c, a_j) = 0$ . Daher ist  $C^*$  eine 2-Kette in  $G$ .

**3. Schritt.** Wir zeigen  $\partial C^* = c$ . Dann ist also  $c \underset{G}{\sim} 0$  und der Satz ist bewiesen. Annahme  $c^* := \partial C^* \neq c$ . Dann enthält  $c^* \ominus c$  einen Kantenweg  $\gamma_0 \in \mathcal{E}$  mit Koeffizient  $m_0 \neq 0$ . Dann gibt es ein Rechteck  $R_{j_0}$  mit einer Seite  $\oplus \gamma_0$  oder  $\ominus \gamma_0$ . Wir nehmen o. E. an, dass  $\oplus \gamma_0$  eine Seite von  $R_{j_0}$  ist und betrachten

$$c^\# = c^* \ominus c \ominus m_0 \partial R_{j_0}.$$

Darin kommt  $\gamma_0$  nicht mehr vor. Wegen

$$\text{Uml}(c^*, a_k) = \sum_{j=1}^n \text{Uml}(c, a_j) \text{Uml}(\partial R_j, a_k) = \text{Uml}(c, a_k)$$

ist

$$\text{Uml}(c^\#, a_k) = -m_0 \text{Uml}(\partial R_{j_0}, a_k) = -m_0 \delta_{j_0 k}.$$

Weil aber  $\gamma_0$  in  $c^\#$  nicht vorkommt, liegen  $a_{j_0}$  und  $a_{j_1}$  für das  $R_{j_0}$  jenseits  $\gamma_0$  benachbarte  $R_{j_1}$  in derselben Komponente vom Komplement von  $|c^\#|$  im Widerspruch zu

$$\text{Uml}(c^\#, a_{j_0}) = -m_0 \neq 0 = \text{Uml}(c^\#, a_{j_1}).$$

□

**Definition 138.** Seien  $B \subset \mathbb{C}$  kompakt und  $c$  ein 1-Zyklus in  $\mathbb{C}$ . Wir sagen,  $B$  wird von  $c$  einfach berandet, wenn gilt

$$\begin{aligned} |c| &\subset \partial B, \\ \text{Uml}(c, z) &= 1 \text{ für alle } z \in \overset{\circ}{B}, \\ \text{Uml}(c, z) &= 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus B. \end{aligned}$$

Liegt  $B$  in der offenen Menge  $G$ , so ist insbesondere nach dem Artinschen Kriterium also  $c \underset{G}{\sim} 0$ .

Einfache Beispiele bieten die offensichtlichen Randzyklen von Kreisen, Rechtecken oder (ungelochten) Kreisringen.

**Beispiel 139.** Sei  $B \subset \mathbb{C}$  ein kompakter Bereich, der von dem 1-Zyklus  $c$  einfach berandet wird. Seien  $K_1, \dots, K_n \subset B$  paarweise disjunkte kompakte Kreisscheiben im Inneren  $\overset{\circ}{B}$  von  $B$  mit Mittelpunkten  $z_1, \dots, z_n$ . Dann wird  $B \setminus \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{K}_i$  von

$$c^* := c \ominus \partial K_1 \ominus \dots \ominus \partial K_n$$

einfach berandet. Beachten Sie dazu, dass

$$\text{Uml}(\partial K_i, a) = \delta_{ij} \text{Uml}(c, a) \text{ für alle } a \in \overset{\circ}{K}_j.$$

Liegt  $B$  in einem Gebiet  $G$  so folgt

$$c \underset{G \setminus \{z_1, \dots, z_n\}}{\sim} \partial K_1 \oplus \dots \oplus \partial K_n.$$

Ist etwa  $B$  ein kompakter Kreisring im Gebiet  $G$ , ist  $c = \partial B$  und  $K$  ein kompakter Kreis im Inneren von  $B$  mit Mittelpunkt  $z_0$ , so folgt  $c \underset{G \setminus \{z_0\}}{\sim} \partial K$ . Für jede holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ist daher

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \int_{\partial K} \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

Vergleiche dazu die Argumentation im Beweis der Cauchyformel für Kreisringe 90.

□

**Satz 140 (Umlaufzahlversion der Cauchyschen Integralformel).** Die Funktion  $f$  sei holomorph im Gebiet  $G$  und der 1-Zyklus  $c$  sei nullhomolog in  $G$ . Dann gilt für jedes  $z_0 \in G \setminus |c|$

$$\text{Uml}(c, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

Wird insbesondere die kompakte Menge  $B \subset G$  von  $c$  einfach berandet, so gilt für jedes  $z_0 \in \overset{\circ}{B}$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

*Beweis.* Sei  $K \subset G \setminus |c|$  eine Kreisscheibe um  $z_0$  und  $n := \text{Uml}(c, z_0)$ . Dann gilt

$$\text{Uml}(c \ominus n\partial K, a) = 0$$

für  $a = z_0$  und ebenso für  $a \notin G$ . Daher ist  $c \ominus n\partial K$  nach dem Satz von Artin in  $G \setminus \{z_0\}$  nullhomolog und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{n\partial K} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = nf(z_0).$$

□

## 10 Residuensatz

- Integration um isolierte Singularitäten: das Residuum
- Der Residuensatz
- Nullstellen und Polstellen zählen
- Anzahl der Nullstellen und Hund an kurzer Leine: Satz von Rouché
- Reihen von Potenzen reziproker natürlicher Zahlen und Bernoullizahlen
- Auswertung reeller Integrale mit dem Residuensatz

**Definition 141 (Residuum).** Hat  $f$  in  $z_0$  eine isolierte Singularität, so ist es in einer gelochten Kreisscheibe  $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$  in eine Laurentreihe  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$  entwickelbar. Der Koeffizient  $a_{-1}$  heißt *das Residuum* von  $f$  in  $z_0$ . Er wird mit  $\text{Res}(f, z_0)$  bezeichnet.

Für  $0 < r < R$  gilt also nach Satz 91

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz,$$

und diese Formel erklärt, warum gerade  $a_{-1}$  interessant ist.

**Lemma 142.** Seien  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $\Sigma \subset G$  eine Menge ohne Häufungspunkt in  $G$  und  $c$  ein in  $G$  nullhomologer 1-Zyklus in  $G \setminus \Sigma$ . Dann ist  $\text{Uml}(c, z) = 0$  für alle bis auf höchstens endlich viele Punkte von  $\Sigma$ .

*Beweis.* Weil  $\frac{1}{z-z_0}$  auf jeder Kreisscheibe im Komplement von  $z_0$  holomorph ist, ist die Umlaufzahl  $\text{Uml}(c, z_0) = 0$  für  $|z_0| > \max\{|z| \mid z \in |c|\}$ . Die Menge

$$\Sigma' := \{z \in \Sigma \mid \text{Uml}(c, z) \neq 0\}$$

liegt also in einer kompakten Kreisscheibe. Wäre  $\Sigma'$  eine unendliche Menge, so hätte sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt  $z_*$ , der nach Voraussetzung aber nicht in  $G$  liegt. Nach dem Artin-Kriterium ist  $\text{Uml}(c, z_*) = 0$ . Dann ist aber  $\text{Uml}(c, z) = 0$  für alle Punkte  $z$  in einer Umgebung von  $z_*$ . Widerspruch!  $\square$

**Satz 143 (Residuensatz).** Sei  $f$  im Gebiet  $G$  holomorph bis auf eine Menge  $\Sigma$  von isolierten Singularitäten, und sei  $c$  ein in  $G$  nullhomologer 1-Zyklus in  $G \setminus \Sigma$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz = \sum_{z \in \Sigma} \text{Uml}(c, z) \text{Res}(f, z),$$

wobei die Summe nach Lemma 142 endlich ist.

Wird insbesondere die kompakte Menge  $B \subset G$  von  $c$  einfach berandet, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz = \sum_{z \in \Sigma \cap B} \text{Res}(f, z),$$

*Beweis.* Sei  $\Sigma' := \{z_1, \dots, z_n\}$  die Menge der Singularitäten mit Umlaufzahl  $\neq 0$ . Wir wählen um diese  $z_k$  paarweise disjunkte kompakte Kreisscheiben  $K_k \subset G$ , die jeweils nur die eine Singularität  $z_k$  enthalten, und betrachten

$$c^* := c \ominus \sum_{k=1}^n \text{Uml}(c, z_k) \partial K_k.$$

Dann gilt:

$$\text{Uml}(c^*, a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \notin G, \\ 0 & \text{für } a \in \Sigma', \\ 0 & \text{für } a \in \Sigma \setminus \Sigma'. \end{cases}$$

Nach dem Artinschen Kriterium ist deshalb  $c^*$  nullhomolog in  $G \setminus \Sigma$ , und weil  $f$  dort holomorph ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c^*} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz - \sum_{k=1}^n \text{Uml}(c, z_k) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_k} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz - \sum_{k=1}^n \text{Uml}(c, z_k) \text{Res}(f, z_k). \end{aligned}$$

□

Eine Anwendung des Residuensatzes ist die Berechnung von Integralen, vgl. das explizite Beispiel 149 unten. Dafür ist die effektive Berechnung des Residuums wichtig. Häufig kann man dazu die mehr oder weniger explizite Laurententwicklung benutzen. Einen wichtigen Spezialfall liefert das folgende

**Beispiel 144.** Seien  $g, h : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0$  eine einfache Nullstelle von  $h$ , also  $h(z) = (z - z_0)\tilde{h}(z)$  mit holomorphem  $h(z)$  und  $\tilde{h}(z_0) = h'(z_0) \neq 0$ . Also hat  $\frac{g}{h}$  um  $z_0$  eine Taylorentwicklung

$$\frac{g(z)}{\tilde{h}(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} + a_1(z - z_0) + \dots$$

und  $\frac{g}{h}$  hat um  $z_0$  die Laurententwicklung

$$\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}(z - z_0)^{-1} + a_1(z - z_0)^0 + \dots$$

Es folgt

$$\boxed{\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}. \quad (52)$$

□

**Beispiel 145.** Ist  $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$  und eine holomorphe Funktion  $h(z)$  mit  $h(z_0) \neq 0$ , so ist also  $m = \text{Ord}(f, z_0)$  die Null- oder (negative) Polstellenordnung von  $f$  in  $z_0$ . Wir finden

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1}h(z) + (z - z_0)^m h'(z)}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{mh(z) + (z - z_0)h'(z)}{(z - z_0)h(z)},$$

und nach dem letzten Beispiel ist

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = m.$$

□

**Satz 146 (Anzahl der Nullstellen und Polstellen).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  meromorph mit Polstellenmenge  $\Sigma_\infty$  und Nullstellenmenge  $\Sigma_0$ . Sei  $c = \sum m_k c_k$  mit Kurven  $c_k$  ein in  $G$  nullhomologer 1-Zyklus in  $G \setminus (\Sigma_\infty \cup \Sigma_0)$ . Wir definieren den Bildzyklus von  $c$  unter  $f$  als

$$f(c) := \sum m_k (f \circ c_k).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{z \in \Sigma_0} \text{Uml}(c, z) \text{Nullstellenordnung von } f \text{ in } z \\ &\quad - \sum_{z \in \Sigma_\infty} \text{Uml}(c, z) \text{Polstellenordnung von } f \text{ in } z \\ &= \text{Uml}(f(c), 0). \end{aligned}$$

Dabei sind die auftretenden Summen nach Lemma 142 endlich.

Das Integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  heißt auch *das Null- und Polstellen zählende Integral*. Am klarsten wird das, wenn  $c$  den kompakten Bereich  $B \subset G$  einfach berandet. Dann wird

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Anzahl der Nullstellen} - \text{Anzahl der Polstellen von } f \text{ in } B,$$

jeweils gezählt mit Vielfachheit.

*Beweis des Satzes.* Das erste Gleichheitszeichen folgt aus dem Residuensatz. Für das zweite beachte, dass für eine stetig differenzierbare Kette  $c$

$$\begin{aligned} \text{Uml}(f(c), 0) &= \sum_k \frac{m_k}{2\pi i} \int_{f \circ c_k} \frac{dz}{z} = \sum_k \frac{m_k}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\frac{d}{dt}(f \circ c_k)(t) dt}{(f \circ c_k)(t)}. \\ &= \sum_k \frac{m_k}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(c_k(t))}{f(c_k(t))} \dot{c}_k(t) dt. = \sum_k \frac{m_k}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

Für nur stetiges  $c$  benötigt man eine entsprechende Verallgemeinerung der Substitutionsregel. Beweisen Sie das selbst.  $\square$

**Satz 147 (Rouché).** Seien  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und  $c$  ein in  $G$  nullhomologer 1-Zyklus. Es gelte

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \text{ für alle } z \in |c| \quad (53)$$

Dann haben  $f$  und  $g$  keine Nullstellen auf dem Träger  $|c|$ , und es gilt

$$\sum_{f(z)=0} \text{Uml}(c, z) \text{Ord}(f, z) = \sum_{g(z)=0} \text{Uml}(c, z) \text{Ord}(g, z).$$

Dabei sind die auftretenden Summen nach Lemma 142 endlich.

Berandet  $c$  den kompakten Bereich  $B \subset G$  einfach, so besagt der Satz, dass  $f$  und  $g$  im Inneren von  $B$  die gleiche Anzahl von Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) haben.

*Beweis.* Aus (53) folgt unmittelbar, dass  $|c|$  keine Nullstelle von  $f$  oder  $g$  enthält. Aus Satz 146 folgt

$$\sum_{f(z)=0} \text{Uml}(c, z) \text{Ord}(f, z) - \sum_{g(z)=0} \text{Uml}(c, z) \text{Ord}(g, z) = \text{Uml}(f(c), 0) - \text{Uml}(g(c), 0).$$

Sei  $c = \sum m_k c_k$  mit  $m_k \neq 0$  und nicht-konstanten Kurven  $c_k$ . Definiere

$$C_k(s, t) := sf(c_k(t)) + (1-s)g(c_k(t))$$

Wegen (53) ist das ein singuläres Quadrat in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Der Rand ist

$$\partial C_k = (f \circ c_k) \ominus (g \circ c_k) \ominus \lambda(g(c_k(1)), f(c_k(1)) \oplus \lambda(g(c_k(0)), f(c_k(0))),$$

wobei  $\lambda(a, b)$  den linear parametrisierten Weg von  $a$  nach  $b$  bezeichnet. Die Strecken zwischen Endpunkten haben ein  $\ominus$ , die zwischen Anfangspunkten ein  $\oplus$ . Wir setzen

$$C := \sum m_k C_k.$$

Weil  $c$  ein Zyklus ist, kommt jeder Punkt gleich oft als Anfangs- wie als Endpunkt einer Kurve vor. Deshalb heben sich in  $\partial C$  die  $\lambda$ -Terme heraus und

$$\partial C = \sum m_k (f \circ c_k) \ominus \sum m_k (g \circ c_k) = f(c) \ominus g(c).$$

Nach Satz 133 ist daher

$$\text{Uml}(f(c), 0) = \text{Uml}(g(c), 0)$$

und der Satz bewiesen. □

**Beispiel 148.** Die Bernoullizahlen  $B_k$  waren definiert durch

$$\frac{1}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1}, \quad (54)$$

vgl. Beispiel 94. Wir wollen

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} |B_{2m}|.} \quad (55)$$

beweisen<sup>5</sup>. Mit den früher berechneten Bernoullizahlen  $B_{2m}$  ergibt sich insbesondere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Wir betrachten neben der Funktion  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  die Funktion  $f_m(z) := z^{-2m} f(z)$ . Die isolierten Singularitäten dieser Funktion sind die Punkte  $z_k = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ , und wir bestimmen die Residuen: Unmittelbar aus (54) finden wir

$$\text{Res}(f_m, 0) = \frac{B_{2m}}{(2m)!}.$$

---

<sup>5</sup>Für  $s \in \mathbb{C}$  mit Realteil  $> 1$  konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  und definiert eine holomorphe Funktion, die *Riemannsche Zetafunktion*  $\zeta(s)$ . Wir wollen offenbar  $\zeta(2m)$  berechnen, allerdings ohne die Zetafunktion zu benutzen. Die Formel (55) stammt bereits von Euler.

Die Residuen in den anderen Punkten: bestimmen wir mit der Formel

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

bei einfacher Nullstelle  $z_0$  von  $h$ , vgl. Beispiel 144:

$$\operatorname{Res}(f_m, 2k\pi i) = \frac{(2k\pi i)^{-2m}}{e^{2k\pi i}} = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m} k^{2m}}.$$

Damit treten sowohl die Bernoullizahl  $B_{2m}$  wie auch die reziproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen als Residuen auf. Mit dem Residuensatz zeigen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{+n} \operatorname{Res}(f_m, 2k\pi i) = 0. \tag{56}$$

Daraus folgt dann

$$\operatorname{Res}(f_m, 0) = - \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Res}(f_m, 2k\pi i) + \operatorname{Res}(f_m, -2k\pi i)),$$

also

$$\frac{B_{2m}}{(2m)!} = (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2\pi)^{2m} k^{2m}}$$

und daraus (55).

Nun zum Beweis von (56). Wir schneiden um die Singularitäten  $2k\pi i$  offene Kreisscheiben  $U_j$  vom Radius 1 aus. Ein wesentlicher Schritt ist der Beweis, dass  $f(z)$  auf dem Komplement  $B$  von  $\bigcup U_j$  beschränkt ist. Weil die Exponentialfunktion periodisch ist, nimmt  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  im Streifen

$$S := \{z \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2\pi\}$$

ihre sämtlichen Werte an.

Für  $\operatorname{Re}(z) \geq 1$  ist

$$|e^z - 1| \geq |e^z| - 1 = e^{\operatorname{Re}(z)} - 1 \geq e - 1$$

und deshalb  $|f(z)| \leq \frac{1}{e-1}$ .

Für  $\operatorname{Re}(z) \leq -1$  ist

$$|e^z - 1| \geq 1 - |e^z| = 1 - e^{\operatorname{Re}(z)} \geq 1 - e^{-1}$$

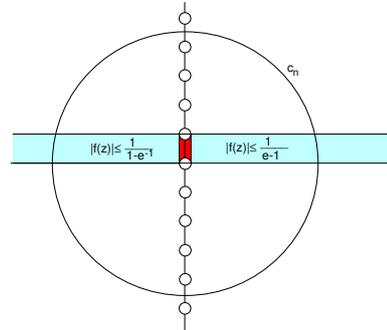
und deshalb  $|f(z)| \leq \frac{1}{1-e^{-1}}$ .

Und der (rot gefärbte) Bereich

$$S \cap \{z \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq 1, |z| \geq 1, |z - 2\pi i| \geq 1\}$$

ist kompakt, also ist  $|f(z)|$  darauf ebenfalls beschränkt.

Insgesamt ist  $|f(z)|$  auf dem Komplement  $B$  der offenen Kreise vom Radius 1 um die Singularitäten  $2k\pi i$  also durch eine Konstante  $M$  beschränkt.



Die Kreislinie

$$c_n(t) = (2n + 1)\pi e^{2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

verläuft ganz in  $B$ , und aus dem Residuensatz folgt:

$$\left| \sum_{k=-n}^{+n} \operatorname{Res}(f_m, 2k\pi i) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{c_n} f_m(z) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{((2n + 1)\pi)^{2m}} 2\pi(2n + 1)\pi.$$

Das geht für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null und liefert (56).

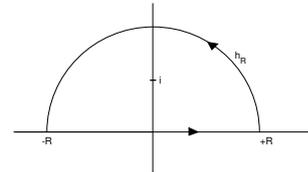
□

Der Residuensatz ist hilfreich bei der Berechnung gewisser uneigentlicher reeller Integrale. Dazu gibt es eine ganze Industrie. Wir beschränken uns hier auf ein Beispiel:

**Beispiel 149.** Nach Analysis existiert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1 + t^2} dt = \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{1 + t^2} dt \right).$$

Wir integrieren zur Berechnung  $f(z) := \frac{e^{iz}}{1 + z^2}$  über die in der Abbildung skizzierte Kurve  $c_R$  bestehend aus dem Intervall  $[-R, R]$  und dem Halbkreis  $h_R(t) := Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$  vom Radius  $R$  um 0 in der oberen Halbebene.



Für  $R > 1$  schließt diese Kurve als einzige isolierte Singularität von  $f$  den Punkt  $z = i$  ein, und es ist

$$\operatorname{Res}(f(z), i) = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Der Residuensatz liefert also

$$\int_{c_R} f(z) dz = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Andrerseits ist

$$\operatorname{Re} \int_{c_R} f(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{\cos t}{1 + t^2} dt + \operatorname{Re} \int_{h_R} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz$$

Auf dem Halbkreis ist

$$\left| \frac{e^{iz}}{1 + z^2} \right| = \frac{e^{-\operatorname{Im}(z)}}{|1 + z^2|} \leq \frac{1}{R^2 - 1}$$

und daher

$$\left| \int_{h_R} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1} 2\pi R \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty.$$

Es folgt

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1 + t^2} dt.$$

□

Ich gebe zum Schluss noch ein Beispiel, das in der Ingenieurmathematik eine wichtige Rolle spielt.

**Beispiel 150 (Nyquist-Kriterium).** Bei Stabilitätsfragen in der Regelungstheorie ist es wichtig zu wissen, wann alle Nullstellen eines *reellen* Polynoms

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

negativen Realteil haben. Man nennt  $p(x)$  dann auch *stabil*.

Wir setzen o.E.  $a_n > 0$  und  $n > 0$  voraus. Dann ist  $p(x) \approx a_n x^n > 0$  für großes  $x$ . Also ist

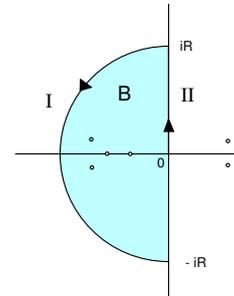
$$a_0 = p(0) > 0 \tag{57}$$

offenbar eine notwendige Bedingung für die Stabilität, sonst gäbe es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle bei  $x \geq 0$ . Wir nehmen an, dass keine Nullstellen auf der imaginären Achse liegen

$$p(it) \neq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{58}$$

Wir betrachten das die "linken" Nullstellen zählende Integral über den Rand eines abgeschlossenen Halbkreises  $B$  mit hinreichend großem Radius  $R$  in der linken Halbebene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{p'(z)}{p(z)} dz \\ = \text{Anzahl der Nullstellen in der linken Halbebene} \\ =: k, \end{aligned} \tag{59}$$



Unter den notwendigen Voraussetzungen (57) und (58) ist  $k = n$  dann notwendig und hinreichend für Stabilität.

Wir berechnen das Integral (59) separat über den Halbkreisbogen (I) und über die Strecke auf der imaginären Achse (II).

Zu (I). Ist  $p(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$ , so ist

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - z_j}$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{Rie^{it}}{Re^{it} - z_j} dt = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{it}}{e^{it} - \frac{z_j}{R}} dt.$$

Für  $R \rightarrow \infty$  gehen die Integranden rechts gegen 1, und daher ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \frac{n}{2}. \tag{60}$$

Zu (II). Zur Berechnung des Integrals über die imaginäre Achse ist eine Polarkoordinatendarstellung der sogenannten *Nyquistkurve*

$$\nu(t) := p(it) = r(t)e^{i\phi(t)}, \quad r(t) > 0$$

hilfreich. Eine solche ist möglich wegen (58). Nach (57) ist  $\nu(0) = a_0$  reell und positiv, weshalb wir

$$\phi(0) = 0 \tag{61}$$

annehmen können. Weiter hat  $p$  reelle Koeffizienten, und daher ist  $\overline{p(it)} = p(-it)$ , also

$$r(t)e^{-i\phi(t)} = r(-t)e^{i\phi(-t)}.$$

Daraus folgt (unter Benutzung von (61) und der Stetigkeit von  $\phi$ )

$$r(-t) = r(t), \quad \phi(-t) = -\phi(t) \quad (62)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{II} \frac{p'(z)}{p(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{(\dot{r}(t) + ir(t)\dot{\phi}(t))e^{i\phi(t)}}{r(t)e^{i\phi(t)}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \left( \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} + i\dot{\phi}(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \log r(t) \Big|_{-R}^{+R} + i\phi(t) \Big|_{-R}^{+R} \right) = \frac{\phi(R)}{\pi}. \end{aligned} \quad (63)$$

Für großes  $R$  ist also nach (60) und (63)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{II} \frac{p'(z)}{p(z)} dz \approx \frac{n}{2} + \frac{\phi(R)}{\pi}.$$

Mit (59) folgt also unter den Voraussetzungen (57) und (58): Das Polynom  $p(z)$  ist genau dann stabil, wenn

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \phi(R) = \frac{n}{2}. \quad (64)$$

Beachten Sie, dass für großes  $R$

$$\nu(R) = p(iR) \approx i^n R^n = R^n e^{i\frac{n}{2}\pi}$$

und daher

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \phi(R) = \frac{n}{2}\pi + 2m\pi$$

für ein  $m \in \mathbb{Z}$ . In den Ingenieurwissenschaften formuliert man das Ergebnis so.

Ein *reelles* Polynom  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  vom Grad  $n > 0$  mit  $a_n > 0$  ist genau dann stabil, wenn für seine Nyquistkurve  $\nu : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto p(it)$  gilt:

- (i)  $\nu$  beginnt auf der positiven reellen Achse und hat keine Nullstelle. Deshalb hat  $\nu$  eine Polarkoordinatendarstellung  $\nu(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$  mit  $\phi(0) = 0$ .
- (ii) Für diese gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \frac{n}{2}\pi.$$

Die Nyquistkurve “durchläuft genau  $n$  Quadranten”.

□

**Beispiel 151.** Wir betrachten ein Polynom

$$p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$$

mit

$$a, b, c, d > 0 \text{ und } bc - ad > 0. \quad (65)$$

Ein Polynom mit diesen Eigenschaften beschreibt zum Beispiel den Strom in einem einfachen Netzwerk, kommt also in der Realität vor...

Wir zeigen, dass jedes  $p(z)$  mit den Bedingungen (65) die Voraussetzungen des Nyquistkriteriums erfüllt.

Dazu schreiben wir  $\nu(t) = p(it) = x(t) + iy(t)$  mit

$$x(t) = d - bt^2, \quad y(t) = ct - at^3. \quad (66)$$

Bedingungen (57) und (58). Aus  $\nu(t) = 0$  folgt  $t^2 = d/b$  und

$$0 = t(c - at^2) = \frac{t}{b}(bc - ad)$$

und daraus  $t = 0$ . Aber  $\nu(0) = d > 0$ .

Bedingung (64). Weil

$$y(t) = 0 \iff t = 0 \text{ oder } t^2 = \frac{c}{a}$$

und weil

$$d - b\frac{c}{a} = \frac{1}{a}(ad - bc) < 0,$$

trifft die Nyquistkurve die positive reelle Achse nur einmal, nämlich für  $t = 0$ . Für sehr kleine positive  $t$  ist  $y(t) > 0$ , also  $\phi(t) > 0$ , und daher liegen die Werte von  $\phi(t)$  für  $t > 0$  im Intervall  $]0, 2\pi[$ . Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = 3\frac{\pi}{2}.$$

□

## 11 Folgen holomorpher Funktionen

Dieser Abschnitt dient der etwas technischen Vorbereitung auf den Riemannschen Abbildungssatz und die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstraß.

### 11.1 Kompakte Konvergenz

- Kompakte=lokal gleichmäßige Konvergenz
- Blätterzahl im Limes
- Bolzano-Weierstraß für Funktionenfolgen: Der Satz von Montel

**Satz 152 (und Definition: Kompakte Konvergenz).** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen auf einer offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$  heißt kompakt konvergent gegen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen gilt

- (i)  $(f_n)$  konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subset G$  gleichmäßig gegen  $f$ .
- (ii)  $(f_n)$  konvergiert lokal gleichmäßig gegen  $f$ , d.h. jeder Punkt von  $G$  besitzt eine Umgebung, auf der  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

*Beweis.* Zu (i)  $\implies$  (ii). Um jeden Punkt von  $G$  gibt es eine in  $G$  enthaltene kompakte Kreisscheibe. Diese ist eine Umgebung des Punktes, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert.

Zu (ii)  $\implies$  (i). Jedes kompakte  $K \subset G$  läßt sich durch endlich viele offene Mengen  $U_1, \dots, U_p$  überdecken, auf denen  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Zu gegebenem  $\epsilon > 0$  gibt es also Zahlen  $N_1, \dots, N_p$ , so dass  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  für alle  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $n \geq N_k$  und alle  $z \in U_k$ . Wähle  $N := \max(N_1, \dots, N_p)$ . Dann gilt  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  für alle  $n \geq N$  und alle  $z \in K$ .  $\square$

**Beispiel 153.** Sei  $(f_n : G \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $G$  kompakt konvergent gegen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Die  $f_n$  seien stetig. Dann ist (nach einem Satz von Weierstraß aus der Analysis) auch  $f$  stetig. Sei  $c$  eine stetig differenzierbare 1-Kette. Nach dem Schrankensatz ist dann

$$\left| \int_c f_n(z) dz - \int_c f(z) dz \right| \leq L(c) \sup_{z \in |c|} |f_n(z) - f(z)|,$$

und aus der Kompaktheit von  $|c|$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c f_n(z) dz = \int_c f(z) dz.$$

$\square$

**Satz 154 (von Weierstraß über kompakte Konvergenz).** Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  holomorpher Funktionen auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$  sei kompakt konvergent gegen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  holomorph und  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist kompakt konvergent gegen  $f'$ .

*Beweis.* Nach Analysis ist  $f$  stetig und für jedes (kompakte) Dreieck  $\Delta \subset G$  folgt aus dem vorstehenden Beispiel und dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist  $f$  daher holomorph.

Die Behauptung über  $(f'_n)$  folgt so: Seien  $z_0 \in G$  und  $r > 0$ , so dass

$$\{z \mid |z - z_0| \leq 2r\} \subset G.$$

Dann gilt für alle  $z \in U_r(z_0) := \{z \mid |z - z_0| < r\}$

$$|f'(z) - f'_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=2r} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{|z - z_0|=2r} |f(z) - f_n(z)|}{r^2} 2\pi(2r).$$

Aus der kompakten Konvergenz von  $(f_n)$  folgt die gleichmäßige Konvergenz von  $(f'_n)$  auf  $U_r(z_0)$ , also die lokal gleichmäßige Konvergenz der Ableitungsfolge.  $\square$

Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $a \in \mathbb{C}$ , so heißt

$$\sum_{f(z)=a} \text{Ord}(f - a, z) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

also die Anzahl der Nullstellen von  $f(z) - a$ , die *Anzahl der  $a$ -Stellen von  $f$* .

**Satz 155 (von Hurwitz über die Blätterzahl der Grenzfunktion).** *Seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine auf dem Gebiet  $G$  kompakt gegen eine Funktion  $f$  konvergierende Folge holomorpher Funktionen. Für jedes  $f_n$  sei die Anzahl der  $a$ -Stellen höchstens  $m$ . Dann ist die Anzahl der  $a$ -Stellen von  $f$  auch höchstens  $m$ , oder  $f$  ist konstant vom Wert  $a$ .*

*Beweis.* O.E sei  $a = 0$  und  $f$  nicht konstant. Wäre der Satz falsch, so gäbe es dann paarweise verschiedene Nullstellen  $z_1, \dots, z_p$  von  $f$  in  $G$  mit

$$\sum_{j=1}^p \text{Ord}(f, z_j) \geq m + 1.$$

Weil die Nullstellen isoliert sind, gibt es paarweise disjunkte kompakte Kreise  $K_j$  in  $G$  um die  $z_j$ , die jeweils nur die Nullstelle  $z_j$  enthalten. Sei  $\epsilon > 0$  kleiner als  $\min\{|f(z)| \mid z \in \bigcup \partial K_j\}$ . Beachte, dass das Minimum nicht  $= 0$  ist.

Wegen der kompakten Konvergenz gibt es ein  $n$  mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon < |f(z)| \text{ für alle } z \in \bigcup \partial K_j.$$

Nach dem Satz von Rouché hat dann  $f_n$  in  $\bigcup \overset{\circ}{K}_j$  genauso viele Nullstellen wie  $f$ , also mehr als  $m$ . Widerspruch!  $\square$

**Korollar 156.** *Der Grenzwert einer kompakt konvergenten Folge injektiver holomorpher Funktionen ist konstant oder ebenfalls injektiv.*

Die hier auftretenden *injektiven* holomorphen Funktionen heißen in der Sprache der klassischen Funktionentheorie auch *schlichte* holomorphe Funktionen.

**Definition 157.** Eine Folge  $(f_n : G \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen heißt *lokal beschränkt*, wenn es zu jedem  $z_0 \in G$  eine Umgebung  $U$  von  $z_0$  in  $G$  und ein  $M \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $|f_n(z)| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $z \in U$ .

**Lemma 158.** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf der offenen Menge  $G$ . Dann besitzt jeder Punkt in  $G$  eine Umgebung  $U$  und ein  $M \in \mathbb{R}$  so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $z, z' \in U$  gilt

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq M|z - z'|.$$

Man sagt  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei lokal gleichgradig Lipschitz-stetig.

*Beweis.* Wir wählen zu  $z_0 \in G$  ein  $r > 0$  und ein  $C \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $z$  und  $n$

$$|z - z_0| \leq 2r \implies z \in G \text{ und } |f_n(z)| < C.$$

Nach der Cauchyschen Integralformel hat man dann für  $z, z' \in U_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$  und beliebiges  $n$

$$f_n(z) - f_n(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \left( \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z'} \right) d\zeta = \frac{z - z'}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z')} d\zeta$$

und

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq \frac{|z - z'|}{2\pi} \frac{C}{r^2} 4\pi r = \frac{2C}{r} |z - z'|.$$

□

**Lemma 159.** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf  $G$ , die auf einer in  $G$  dichten Teilmenge  $A$  punktweise konvergiert. Dann ist die Folge sogar kompakt konvergent auf  $G$ .

*Beweis.* Sei  $z_0 \in G$ . Nach dem letzten Lemma gibt es dazu  $M, r > 0$ , so dass  $U_{3r}(z_0) \subset G$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $z, z' \in U_{3r}(z_0)$

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq M|z - z'|.$$

Wir wollen zeigen, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $B = \overline{U_r(z_0)}$  gleichmäßig konvergiert. Dann folgt aus Satz 152 die Behauptung.

Sei also  $\epsilon > 0$  und dazu  $\delta$  so gewählt, dass  $0 < \delta < \min(\frac{\epsilon}{M}, r)$ . Dann ist  $(U_\delta(a))_{a \in A}$  eine offene Überdeckung von  $B$ , und die Kreisscheiben, welche  $B$  treffen, liegen in  $U_{3r}(z_0)$ . Weil  $B$  kompakt ist, gibt es also  $a_1, \dots, a_k \in A$  mit  $B \subset U_\delta(a_1) \cup \dots \cup U_\delta(a_k) \subset U_{3r}(z_0)$ . Wähle  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|f_n(a_j) - f_m(a_j)| < \epsilon \text{ für alle } j \in \{1, \dots, k\} \text{ und alle } m, n \geq n_0.$$

Zu jedem  $z \in B$  gibt es dann ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $z \in U_\delta(a_j)$ , und für  $m, n \geq n_0$  gilt

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(a_j)| + |f_m(a_j) - f_n(a_j)| + |f_n(a_j) - f_n(z)| \\ &\leq M \frac{\epsilon}{M} + \epsilon + M \frac{\epsilon}{M} = 3\epsilon. \end{aligned}$$

□

**Satz 160 (Montel).** *Jede lokal beschränkte Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  holomorpher Funktionen auf der offenen Menge  $G$  besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Sei  $A = \{a_0, a_1, \dots\}$  eine abzählbare dichte Teilmenge von  $G$ . Weil die Folge  $(f_n(a_0))$  beschränkt ist, besitzt  $(f_n)$  eine Teilfolge  $(f_{0n})$ , für die  $(f_{0n}(a_0))$  konvergiert. Daraus können wir eine Teilfolge  $(f_{1n})$  auswählen, für die  $(f_{1n}(a_1))$  konvergiert, und schließlich erhalten wir auf diese Weise für jedes  $k$  eine Teilfolge  $(f_{kn})$ , die an allen Stellen  $a_0, \dots, a_k$  konvergiert. Aber dann konvergiert die Diagonalfolge  $(f_{nn})$  in allen  $a_j \in A$ , und ist daher nach dem letzten Lemma kompakt konvergent auf  $G$ .  $\square$

Mit Jänich kann man diesen Satz den *Bolzano-Weierstraß der Funktionentheorie* nennen.

## 11.2 Unendliche Produkte

- Unendliche Produkte sind etwas komplizierter zu handhaben als unendliche Reihen.
- Der Wunsch, eine möglichst durchsichtige Beziehung zwischen unendlichen Produkten und Reihen zu haben, führt zu einer zunächst überraschenden Definition für die Konvergenz von Produkten.

**Definition 161 (Unendliches Produkt).** Für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen definiert man das *unendliche Produkt*  $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$  als die Folge der Partialprodukte:

$$\prod_{k=0}^{\infty} a_k = \left( \prod_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Man möchte unendliche Produkte gern in möglichst enger Analogie zu den unendlichen Reihen behandeln. Zum Beispiel möchte man “ $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$ ” analog zu “ $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ ” als notwendiges Kriterium für die Konvergenz eines unendlichen Produktes haben. Aber ein Faktor  $a_k = 0$  macht alle folgenden Partialprodukte zu 0. Deshalb definiert man die Konvergenz etwas vorsichtiger:

**Definition 162 (Konvergente Produkte).** Das unendliche Produkt  $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt konvergent gegen  $b \in \mathbb{C}$ , wenn gilt

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n a_k = b$  und
- (ii) es gibt  $k_0 \in \mathbb{N}$ , für das  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=k_0}^n a_k$  existiert und  $\neq 0$  ist.

Insbesondere sind dann also höchstens endlich viele Faktoren = 0.

**Beispiel 163.** Die Produkte

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots$$

sind nach dieser Definition *nicht* konvergent!

□

Das oben formulierte notwendige Konvergenzkriterium ist mit dieser Definition erfüllt:

**Lemma 164.** Ist  $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, so folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$ .

*Beweis.* Für  $n > k_0$  ist

$$a_n = \frac{\prod_{k=k_0}^n a_k}{\prod_{k=k_0}^{n-1} a_k},$$

und Zähler und Nenner haben denselben Grenzwert  $\neq 0$ . Also ist  $\lim a_n = 1$ . □

Ein überzeugenderes Argument für die Forderung (ii) in der Konvergenz-Definition ist das folgende Kriterium, dass ohne (ii) falsch wird.

**Satz 165 (Logarithmus-Kriterium).** *Im unendlichen Produkt  $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$  sei kein Faktor  $= 0$  oder negativ-reell. Dann ist das Produkt genau dann konvergent, wenn die mit dem Hauptwertlogarithmus gebildete Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \log(a_k)$$

*konvergiert.*

*Beweis.* Ist die Reihe konvergent, so wegen der Stetigkeit der Exponentialabbildung auch die Folge der Partialprodukte

$$P_n := \prod_{k=0}^n a_k = e^{\sum_{k=0}^n \log(a_k)}.$$

Damit gilt (i) der Definition, aber wegen  $\lim P_n = e^{\sum_{k=0}^{\infty} \log(a_k)} \neq 0$  auch (ii).

Die umgekehrte Richtung ist komplizierter zu beweisen, weil

$$\sum_{k=0}^n \log(a_k) \stackrel{???}{=} \log\left(\prod_{k=0}^n a_k\right)$$

höchstens modulo  $2\pi i$  richtig ist, und auch das nur, wenn keines der Produkte rechts negativ-reell ist.<sup>6</sup>

Wir nehmen an, dass  $P_n \rightarrow P \neq 0$  und schreiben  $P = |P|e^{i\phi}$ . Wir wählen  $\phi_n$  so, dass

$$P_n = |P_n|e^{i\phi_n} \text{ mit } \phi - \pi < \phi_n \leq \phi + \pi.$$

Also

$$\phi_n \rightarrow \phi.$$

Aus

$$S_n := \sum_{k=0}^n \log a_k = \log |P_n| + i\phi_n + 2\pi i k_n \text{ mit } k_n \in \mathbb{Z}. \quad (67)$$

folgt

$$\begin{aligned} 2\pi i(k_{n+1} - k_n) &= S_{n+1} - S_n - \log |P_{n+1}| + \log |P_n| - i(\phi_{n+1} - \phi_n) \\ &= \underbrace{\log a_{n+1}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\log |P_{n+1}| + \log |P_n|}_{\rightarrow 0} - \underbrace{i(\phi_{n+1} - \phi_n)}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Dann ist aber  $k_n = k_{n+1}$  für alle hinreichend großen  $n$ , und aus (67) folgt die Konvergenz von  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

<sup>6</sup> Zum Beispiel ist  $\log \frac{i-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi i}{4}$  und deshalb  $2 \log \frac{i-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi i}{2} \neq -\frac{\pi i}{2} = \log(-i) = \log\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^2$ .

Im folgenden brauchen wir eine Verallgemeinerung dieses Kriteriums auf die kompakte Konvergenz von Produkten holomorpher Funktionen.

**Satz 166.** Sei  $(f_k : G \rightarrow \mathbb{C})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen mit Werten im Schlitzgebiet  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z \neq 0\}$ . Dann ist das Produkt  $\prod_{k=0}^{\infty} f_k$  genau dann kompakt konvergent, wenn die mit dem Hauptwertlogarithmus gebildete Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \log(f_k)$$

kompakt konvergiert.

*Beweis.* Wir zeigen nur die Richtung “ $\Leftarrow$ ”, die wir im folgenden auch nur benötigen.

Sei  $S_n := \sum_{k=0}^n \log(f_k)$  und  $S := \lim S_n$ . Sei  $K \subset G$  kompakt. Weil  $S$  als kompakter Limes holomorpher Funktionen stetig ist, ist  $S(K)$  kompakt. Zu  $\epsilon = 1$  gibt es nach Voraussetzung ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|S_n(z) - S(z)| \leq 1$  für alle  $z \in K$  und  $n \geq n_0$ . Also gibt es ein Kompaktum  $\tilde{K} \subset \mathbb{C}$ , welches  $S(K)$  und alle  $S_n(K)$  für  $n \geq n_0$  enthält. Die Exponentialfunktion ist auf dem Kompaktum  $\tilde{K}$  gleichmäßig stetig. Also gibt es zu  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|\exp(v) - \exp(w)| < \epsilon$  für alle  $v, w \in \tilde{K}$  mit  $|v - w| < \delta$ . Weiter gibt es dazu ein  $n_1 \geq n_0$  mit  $|S_n(z) - S(z)| < \delta$  für alle  $z \in K$  und  $n \geq n_1$ . Für diese ist dann aber

$$|\exp(S_n(z)) - \exp(S(z))| < \epsilon.$$

Weil  $\exp(S_n) = \prod_{k=0}^n f_k$ , ist das Produkt auf  $K$  gleichmäßig konvergent.  $\square$

**Beispiel 167.** In dem Kriterium genügt es, wenn von einem geeigneten  $k_0$  an alle Hauptwerte  $\log f_k$  definiert sind und man die Summe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} \log f_k$  betrachtet. Wir wollen das Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \quad (68)$$

auf Konvergenz untersuchen. Wir wählen  $r > 0$  und wenden für  $z$  mit  $|z| \leq r$  das obige Kriterium mit  $k \geq k_0 > 2r$  an. Dann hat  $1 - \frac{z^2}{k^2}$  positiven Realteil und mit der Logarithmusreihe finden wir

$$\begin{aligned} \left| \log \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \right| &= \left| \frac{z^2}{k^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{k^2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z^2}{k^2}\right)^3 + \dots \right| \\ &= \frac{|z|^2}{k^2} \left| 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{k^2}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z^2}{k^2}\right)^2 + \dots \right| \\ &\leq \frac{r^2}{k^2} \left| 1 + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right| = \frac{4r^2}{3} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Die Reihe der Logarithmen ist also auf  $|z| \leq r$  gleichmäßig konvergent. Nach dem Satz gilt das dann auch für das Produkt, so dass (68) eine ganze Funktion definiert.  $\square$

**Beispiel 168.** Mit fast demselben Argument erhält man auch die kompakte Konvergenz des Produktes

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \quad (69)$$

auf ganz  $\mathbb{C}$ . Für  $|z| \leq r$  und  $k \leq r$  ist

$$\begin{aligned} \left| \log \left( \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right) \right| &= \left| -\frac{z}{k} + \log \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right| \\ &= \left| -\frac{z}{k} + \frac{z}{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{k}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{k}\right)^3 - + \dots \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{z}{k} \right|^2 \left( 1 + \left| \frac{z}{k} \right| + \left| \frac{z}{k} \right|^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{z}{k} \right|^2 \frac{1}{1 - |z/k|} \leq \frac{1}{2} \left| \frac{z}{k} \right|^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \left| \frac{z}{k} \right|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt wie im letzten Beispiel die gleichmäßige Konvergenz auf  $\{z \mid |z| \leq r\}$ , also auf ganz  $\mathbb{C}$ .

Wir werden die Grenzwerte von (68) und (69) in den nächsten Abschnitten bestimmen.

Dagegen ist  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)$  zum Beispiel für  $z = 1$  divergent: Aus der Logarithmusreihe folgt nämlich für  $k \geq 3$

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^3 - \dots \\ &\geq \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} - \dots \\ &= \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots\right)\right) \\ &= \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \geq \frac{1}{2k}. \end{aligned}$$

Deshalb ist  $\sum \log \left(1 + \frac{1}{k}\right)$  divergent und nach dem Logarithmus-Kriterium auch  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ .

□

## 12 Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung

### 12.1 Partialbruchzerlegung des Cotangens

- Rationale Funktionen gestatten eine Partialbruchzerlegung.
- Meromorphe Funktionen gestatten ebenfalls eine (i.a. unendliche) Partialbruchzerlegung. Das folgt aus dem Satz von Mittag-Leffler, den wir im Abschnitt 12.4 beweisen.
- In diesem Abschnitt behandeln wir die Partialbruchzerlegung am Beispiel einer konkreten Funktion.

Eine (ausgekürzte) rationale Funktion  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  mit paarweise verschiedenen *einfachen* Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$  des Nenners hat eine Partialbruchzerlegung

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z - z_k}, \quad (70)$$

wobei  $g(z)$  ein Polynom ist, und die  $\frac{a_k}{z - z_k}$  gerade die Hauptteile der Laurententwicklung um die einfachen Pole  $z_k$  sind.

Die Funktion

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

ist meromorph auf  $\mathbb{C}$  mit einfachen Polen in den Nullstellen des Nenners, also in den Punkten von  $\mathbb{Z}$ . Für  $n \in \mathbb{Z}$  ist

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}, n \right) = \frac{\pi \cos(\pi n)}{\pi \cos(\pi n)} = 1.$$

Der Hauptteil in  $n$  ist also  $\frac{1}{z-n}$ . Wir versuchen, eine "Partialbruchzerlegung"

$$\pi \cot(\pi z) = g(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - n} \quad (71)$$

zu finden. Allerdings wird das so direkt nicht klappen, denn die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$  ist divergent. Wir versuchen deshalb, an den Summanden Korrekturen  $p_n(z)$  anzubringen, die holomorph sind und deshalb den Hauptteil erhalten, die andererseits aber die Reihe konvergent machen. Im Vergleich mit (71) geht das "zu Lasten" der Funktion  $g(z)$ , aber anders geht es eben nicht. Nach Anpassung von  $g(z)$  erhalten wir eine "Partialbruchzerlegung"

$$\pi \cot(\pi z) = g(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{z - n} + p_n(z) \right).$$

Wir betrachten  $z$  in einer festen kompakten Kreisscheibe  $\{z \mid |z| \leq r\}$ . Für die Konvergenz müssen wir nur Summanden mit  $|n| \geq 2r$  betrachten. Dafür ist die Taylorentwicklung von  $\frac{1}{z-n}$  um 0 gegeben durch die geometrische Reihe

$$\frac{1}{z - n} = -\frac{1}{n} \frac{1}{1 - \frac{z}{n}} = -\frac{1}{n} - \frac{z}{n^2} - \dots$$

und es gilt

$$\left| \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{z}{n(z - n)} \right| = \frac{|z|}{n^2} \frac{1}{\left| 1 - \frac{z}{n} \right|} \leq \frac{2r}{n^2}.$$

Daher sind die Reihen

$$\sum_{n \geq 2r} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right), \quad \sum_{n \leq -2r} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

auf  $|z| \leq r$  gleichmäßig konvergent und

$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

ist kompakt konvergent<sup>7</sup> auf dem Komplement von  $\mathbb{Z}$ . Die Differenz

$$g(z) = \pi \cot(\pi z) - h(z)$$

hat hebbare Singularitäten in  $\mathbb{Z}$  und liefert nach deren Heben eine ganze Funktion, die wir bestimmen wollen. Nach Satz 154 dürfen wir die Reihe gliedweise differenzieren. Wir erhalten wieder eine ganze(!) Funktion

$$g'(z) = -\pi^2 \frac{1}{\sin^2(\pi z)} + \frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = -\pi^2 \frac{1}{\sin^2(\pi z)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Sowohl der  $\sin(\pi z)$  wie die Reihe haben die Periode 1. Der Wertevorrat von  $g'(z)$  wird also im Streifen  $\{z \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$  angenommen. Wir zeigen zunächst, dass  $g'$  dort beschränkt ist. Das ist klar auf der kompakten Menge  $\{x + iy \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ .

Sei  $r \geq 1$ . Für reelle  $x, y$  mit  $0 \leq x \leq 1, |y| \geq r$  ist

$$|\sin(\pi(x + iy))| = \frac{1}{2} |e^{i\pi x} e^{-\pi y} - e^{-i\pi x} e^{\pi y}| \geq \frac{1}{2} |e^{\pi y} - e^{-\pi y}| \geq |\sinh(\pi r)|.$$

Deshalb ist der Sinus-Term auf  $\{x + iy \mid 0 \leq x \leq 1, |y| \geq r\}$  beschränkt durch  $\frac{\pi^2}{\sinh^2(\pi r)}$ .

Dort gilt weiter

$$|(x + iy - n)^2| \geq \begin{cases} n^2 + r^2 & \text{für } n \leq 0, \\ (n-1)^2 + r^2 & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

also

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2 + r^2} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 + r^2} < \infty.$$

Für  $r = 1$  zeigen die vorstehenden Abschätzungen die Beschränktheit von  $g'$  auf dem Streifen  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ . Wegen der Periodizität in  $x$ -Richtung ist die ganze Funktion  $g'$  also beschränkt und nach Liouville (Korollar 58) konstant. Für  $r \rightarrow \infty$  geht der Sinus-Term gegen 0, und weil die Reihen für  $r \geq 1$  offenbar gleichmäßig konvergieren, gehen auch sie für  $r \rightarrow \infty$  gegen 0. Also ist  $g' = 0$ , und wir erhalten

$$\boxed{\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}} \quad (72)$$

und

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \text{const.}$$

<sup>7</sup>Die kompakte Konvergenz der Reihe für  $n \in \mathbb{Z}$  bedeutet wie bei den Laurentreihen, dass die Reihen über  $n \geq 0$  und  $n < 0$  beide kompakt konvergieren.

Aber

$$\sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{n(z-n)} - \frac{z}{n(z+n)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

ist wie auch  $\frac{1}{z}$  und  $\pi \cot(\pi z)$  eine ungerade Funktion. Daher ist die Konstante = 0 und die Partialbruchzerlegung

$$\boxed{\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.} \quad (73)$$

Für  $z = \frac{1}{2}$  ergibt sich aus (72)

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Vergleichen Sie auch Beispiel 148.

## 12.2 Produktdarstellung des Sinus

- Polynome gestatten eine Zerlegung in Linearfaktoren.
- Holomorphe Funktionen gestatten ebenfalls eine Linearfaktorzerlegung. Das folgt aus dem Weierstraßschen Produktsatz, den wir im Abschnitt 12.5 beweisen.
- Hier identifizieren wir als konkretes Beispiel mit Hilfe der Cotangenzzerlegung die Funktion aus Beispiel 167 als die Produktdarstellung des Sinus.

Wir haben im Beispiel 167 gezeigt, dass

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

auf  $\mathbb{C}$  kompakt konvergiert, also eine ganze Funktion  $f$  definiert. Wir bilden für die Partialprodukte die logarithmische Ableitung und erhalten aus Satz 154 und (73)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2z}{k^2 - z^2} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}.$$

Andererseits gilt für die nach Heben der Singularität in 0 auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion  $g(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{\pi^2 z \cos(\pi z) - \pi \sin(\pi z)}{\pi^2 z^2} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}.$$

Zwei in einem Gebiet holomorphe Funktionen mit gleicher logarithmischer Ableitung unterscheiden sich aber nur um eine multiplikative Konstante, und weil  $f(0) = 1 = g(0)$  folgt

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

oder die Produktformel von Euler (1734)

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Für  $z = \frac{1}{2}$  finden wir

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k \cdot 2k},$$

also das sogenannte *Wallissche Produkt*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots$$

### 12.3 Die Gammafunktion

- Hier wenden wir die Methoden und Ergebnisse der beiden letzten Abschnitte an, um eine Produktdarstellung für die Gammafunktion herzuleiten, die auf Weierstraß zurückgeht.
- Als Belohnung erhalten wir eine enge Beziehung zwischen Gammafunktion und Sinus.

Wir haben im Beispiel 167 festgestellt, dass die dort angewendete Methode problemlos auch die kompakte Konvergenz des Produktes

$$H(z) := z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \quad (74)$$

gegen eine ganze Funktion  $H$  liefert, die offenbar genau die Punkte  $-n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  als Nullstellen besitzt, und zwar als einfache.

Es gilt

$$\begin{aligned} H(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n!} e^{-z \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n! n^z} e^{z(\log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})} \end{aligned} \quad (75)$$

Für  $z = 1$  finden wir

$$H(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} e^{\log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}},$$

und weil das konvergiert, konvergiert auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) =: -\gamma.$$

Die Zahl

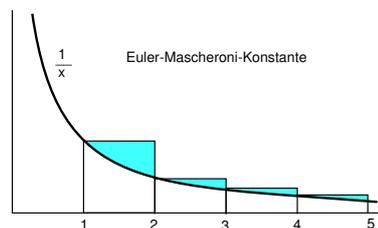
$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\log n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = 0.577\dots$$

heißt die *Euler-Mascheroni-Konstante*. Bis heute ist nicht bekannt, ob sie rational oder irrational ist.

Weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+1}{n} = 0$ , gilt auch

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\log(n+1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right),$$

und damit läßt sich die Konstante wie nebenstehend geometrisch veranschaulichen.



Wir erhalten

$$e^\gamma H(1) = 1. \quad (76)$$

Mit (75) finden wir

$$e^{\gamma z} H(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n! n^z} \quad (77)$$

und daraus

$$\begin{aligned}
 e^{\gamma(z+1)}H(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)}{n!n^{(z+1)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)}{(n+1)!(n+1)^z} \frac{(n+1)^{(z+1)}}{zn^{(z+1)}} \\
 &= \frac{1}{z} e^{\gamma z} H(z)
 \end{aligned} \tag{78}$$

**Definition 169.** Die *Gammafunktion*

$$\Gamma(z) := \frac{1}{e^{\gamma z} H(z)}$$

ist meromorph auf  $\mathbb{C}$  und holomorph bis auf einfache Pole in den nicht-positiven ganzen Zahlen  $n \in -\mathbb{N}$ . Offenbar ist  $\Gamma(x)$  reell für reelles  $x \notin -\mathbb{N}$ .

Aus (77) ergibt sich

**Satz 170 (Gaußsche Produktdarstellung).**

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Aus (76) und (78) folgt

**Satz 171 (Funktionalgleichung).** *Es gilt  $\Gamma(1) = 1$  und*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

*für alle  $z \notin -\mathbb{N}$ . Insbesondere ist für  $n \in \mathbb{N}$*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Die Gammafunktion hat einfache Pole in  $-\mathbb{N}$ . Die Funktion  $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$  hat einfache Pole in  $\mathbb{Z}$  – genauso wie die Funktion  $\frac{1}{\sin(\pi z)}$ . Der Vergleich mit Beispiel 167 unterstreicht die Beziehung zwischen diesen beiden Funktionen. Genauer gilt:

**Satz 172 (Eulerscher Ergänzungssatz).** *Für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(z)(-z\Gamma(-z)) \\
 &= \frac{-z}{H(z)H(-z)} = \frac{-z}{-z^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \left(1 - \frac{z}{k}\right)} \\
 &= \frac{\pi}{\pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
 \end{aligned}$$

□

Zeigen Sie durch  $n$ -malige partielle Integration, dass für  $x \geq 1$

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Mit Hilfe von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$  zeigt man, dass die linke Seite gegen  $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  konvergiert, während der Grenzwert der rechten Seite ja  $\Gamma(x)$  liefert. Schließlich zeigt man, dass

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  konvergiert und eine holomorphe Funktion definiert, die nach dem Vorstehenden auf  $[1, \infty[$  mit  $\Gamma$  übereinstimmt, nach dem Identitätssatz dann also auch auf  $\operatorname{Re}(z) > 0$  mit  $\Gamma$  übereinstimmt. Vgl. *Fischer/Lieb: Funktionentheorie* p. 186.

## 12.4 Satz von Mittag-Leffler

- Man kann die Polstellen einer meromorphen Funktion und die Hauptteile in diesen Polen weitgehend willkürlich vorschreiben.
- Als Konsequenz erhält man eine Partialbruchzerlegung für meromorphe Funktionen, die die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen verallgemeinert.

Zur Erinnerung: Eine Folge (in  $\mathbb{C}$ ) hat keinen Häufungspunkt genau dann, wenn sie keine konvergente Teilfolge besitzt.

**Satz 173 (Mittag-Leffler).** Gegeben seien eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise verschiedener Punkte in  $\mathbb{C}$  ohne Häufungspunkt und eine Folge von Polynomen  $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  mit konstantem Term  $= 0$ . Dann gibt es eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $f$ , deren Pole gerade die  $a_n$  und deren entsprechende Hauptteile gerade die  $h_n(z) = P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$  sind. Genauer gibt es eine Folge von Polynomen  $(p_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (h_n(z) - p_n(z)) \quad (79)$$

auf dem Komplement der Folge  $(a_n)$  kompakt konvergent gegen eine solche meromorphe Funktion  $f$  ist. Die  $p_n(z)$  nennt man auch konvergenz-erzeugende Summanden.

Bemerkung. In dem Satz läßt sich  $\mathbb{C}$  durch ein beliebiges Gebiet ersetzen, der Beweis wird dann aber schwieriger, vgl. Behnke/Sommer.

*Beweis.* Hätte man nur endlich viele  $a_n$ , so würde  $\sum h_n$  das Gewünschte leisten. Oder auch  $\sum (h_n - p_n)$  mit beliebigen Polynomen  $p_n$ . Im Fall einer unendlichen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird die Reihe im allgemeinen nicht konvergieren, aber wir können die  $p_n(z)$  so geschickt wählen, dass das passiert:

Die  $h_n$  sind holomorph für  $|z| < |a_n|$ . Daher können wir zu jedem  $a_n \neq 0$  ein Taylorpolynom  $p_n$  von  $h_n$  um 0 so wählen, dass  $|h_n(z) - p_n(z)| < \frac{1}{2^n}$  für  $|z| \leq |a_n|/2$ .

Wir wählen ein  $r > 0$  und bezeichnen mit  $D_r := \{z \mid |z| \leq r\}$  die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius  $r$ . Weil die  $a_n$  keinen Häufungspunkt haben, ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ , und es gibt ein  $n_0$  mit  $|a_n|/2 \geq r$  für alle  $n \geq n_0$ .

Dann ist aber die Reihe  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  auf der Kreisscheibe  $D_r$  eine konvergente Majorante für  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} (h_n(z) - p_n(z))$ , und die letztere Reihe konvergiert dort gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion. Aber dann definiert

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (h_n(z) - p_n(z))$$

eine auf  $D_r$  meromorphe Funktion. Sie hat in  $D_r$  die endlich vielen Pole  $a_n$  mit  $|a_n| \leq r$  und den Hauptteilen  $h_n$ . Das gilt nun aber für jedes  $r > 0$ , und deshalb ist (79) eine auf ganz  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion mit den richtigen Polen und Hauptteilen.  $\square$

**Korollar 174.** Jede auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $f$  mit den paarweise verschiedenen Polen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und entsprechenden Hauptteilen  $h_n$  gestattet eine "Partialbruchzerlegung" der Form

$$f(z) := g(z) + \sum_{n=0}^{\infty} (h_n(z) - p_n(z))$$

mit Polynomen  $p_n(z)$  und einer ganzen Funktion  $g(z)$ .

*Beweis.* Die Pole einer auf  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktion sind isoliert, und in jedem Kompaktum liegen nur endlich viele. Also können wir sie durchnummerieren als eine Folge ohne Häufungspunkt. Nach dem Satz gibt es also eine meromorphe Funktion  $\tilde{f}$  mit denselben Polen und Hauptteilen wie  $f$  in der Form (79). Aber  $f - \tilde{f}$  hat dann in den  $a_n$  hebbare Singularitäten und definiert eine ganze Funktion  $g$ .  $\square$

## 12.5 Weierstraßscher Produktsatz

- Man kann die Nullstellen einer holomorphen Funktion samt ihren Ordnungen weitgehend willkürlich vorschreiben.
- Als Konsequenz erhält man eine Verallgemeinerung der Linearfaktorzerlegung von Polynomen auf holomorphe Funktionen.
- Als Anwendung bestimmen wir den Körper der auf  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktionen.

**Satz 175 (Weierstraß).** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  ohne Häufungspunkt. Dann gibt es eine ganze Funktion  $f$ , die genau an den Stellen  $a_n$  verschwindet, und zwar sooft, wie  $a_n$  in der Folge vorkommt.

Genauer läßt sich eine solche Funktion darstellen in der Form

$$f(z) = z^m \prod_{a_n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z/a_n)} \quad (80)$$

mit  $m := \#\{n \mid a_n = 0\}$  und mit Polynomen  $p_n(z)$  der Form

$$p_n(z) = \sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k}. \quad (81)$$

Die  $e^{p_n(z/a_n)}$  heißen auch konvergenz-erzeugende Faktoren.

Bemerkung. In dem Satz läßt sich  $\mathbb{C}$  durch ein beliebiges Gebiet ersetzen, der Beweis wird dann aber schwieriger, vgl. *Behnke/Sommer*.

*Beweis.* Die Logarithmus-Hauptwertfunktion  $\log$  ist auf  $\{z \mid |z-1| < 1\}$  holomorph und  $\log(1-z)$  daher auf der kompakten Kreisscheibe  $\{z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$  gleichmäßig durch seine Taylorreihe  $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$  approximierbar. Wir wählen eine Folge  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  natürlicher Zahlen, so dass

$$\left| \log(1-z) + \sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k} \right| < \frac{1}{2^n} \quad \text{für } |z| < \frac{1}{2}$$

und definieren  $p_n$  durch (81).

Wir wählen ein  $r > 0$ . Weil die Folge  $(a_n)$  keinen Häufungspunkt hat, gibt es ein  $n_0$  mit  $|a_n| \geq 2r$  für alle  $n \geq n_0$ .

Dann ist die Reihe  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  auf  $U_r(0)$  eine konvergente Majorante für

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left( \log \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + p_n \left(\frac{z}{a_n}\right) \right),$$

und die letztere Reihe konvergiert gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion. Nach dem Logarithmuskriterium konvergiert deshalb das Produkt

$$\prod_{n=n_0+1}^{\infty} e^{(\log(1-\frac{z}{a_n})+p_n(\frac{z}{a_n}))} = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(\frac{z}{a_n})}$$

auf  $U_r(0)$  gleichmäßig gegen eine nirgends verschwindende holomorphe Funktion. Aber dann definiert

$$z^m \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n \left(\frac{z}{a_n}\right)}$$

auf  $U_r(0)$  eine holomorphe Funktion, die genau in den  $a_n \in U_r(0)$  verschwindet und zwar mit den richtigen Vielfachheiten. Weil  $r > 0$  beliebig war, folgt daraus die Behauptung.  $\square$

**Korollar 176.** *Ist  $g$  eine ganze Funktion mit den mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen  $a_n$ , und ist  $a_n$  eine unendliche Folge, so besitzt  $g$  eine Darstellung der Form  $g = fe^h$  mit  $f$  wie in (80) und einer ganzen Funktion  $h$ .*

*Beweis.* Nach dem Identitätssatz haben die Nullstellen keinen Häufungspunkt. Und weil nach Korollar 62 jede ganze Funktion ohne Nullstellen von der Form  $e^h$  mit ganzem  $h$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 177.** *Jede auf ganz  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion ist der Quotient zweier ganzer Funktionen, d.h. der Körper der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  ist der Quotientenkörper des Ringes der ganzen Funktionen.*

*Beweis.* Ist  $f$  meromorph auf  $\mathbb{C}$  mit den Polen  $b_n$  der Ordnung  $m_n$ , so wählen wir eine ganze Funktion  $h$  mit den Nullstellen  $b_n$  der Vielfachheit  $m_n$ . Dann lassen sich die Singularitäten von  $fh$  heben, also ist  $g = fh$  eine ganze Funktion und  $f = g/h$ .  $\square$

## 13 Riemannscher Abbildungssatz

- Wann sind zwei Gebiete biholomorph äquivalent? Ein Satz, der nach Felix Klein “zu den tiefsten und größten Erkenntnissen zu zählen ist, die in der Mathematik je erwachsen sind”, gibt für eine wichtige Klasse von Gebieten darüber Auskunft.

**Definition 178.** Zwei Gebiete der komplexen Ebene heißen *biholomorph äquivalent* oder *konform äquivalent*, wenn es zwischen ihnen eine holomorphe bijektive Abbildung gibt. Beachten Sie: Ist  $f$  holomorph um  $z_0$  und  $f'(z_0) = 0$ , so hat  $f(z) - f(z_0)$  in  $z_0$  eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung. Deshalb ist  $f$  nach dem Nullstellensatz 67 auf keiner Umgebung von  $z_0$  injektiv. Anders als im Reellen ist also die Inverse einer bijektiven holomorphen Abbildung stets wieder holomorph.

**Beispiel 179.** Die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  und die obere Halbebene sind biholomorph äquivalent, zum Beispiel unter der Möbiustransformation  $\frac{z+i}{iz+1}$ . Hingegen sind  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{D}$  nicht biholomorph äquivalent, denn jede holomorphe Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  ist nach dem Satz von Liouville 58 konstant. □

**Satz 180 (Riemannscher Abbildungssatz).** Jedes nicht-leere einfach zusammenhängende Gebiet  $G \neq \mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$  ist biholomorph äquivalent zur Kreisscheibe  $\mathbb{D}$ .

*Beweis:*

0. Schritt Wir zeigen: Ist  $G$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $0 \notin G$ , so gibt es auf  $G$  eine *Quadratwurzelfunktion*, d.h. eine holomorphe Funktion  $w : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $w(z)^2 = z$  für alle  $z \in G$ . Diese ist sogar biholomorph.

Wir wählen dazu ein  $z_0 \in G$ , ein  $w_0 \in \mathbb{C}$  mit  $e^{w_0} = z_0$  und bei  $z_0$  eine lokale Stammfunktion  $\lambda$  von  $\frac{1}{z}$  mit  $\lambda(z_0) = w_0$ , also einen lokalen Logarithmus. Dessen Keim läßt sich nach **Lemma 108** längs jeder Kurve in  $G$  analytisch fortsetzen, und weil  $G$  einfach zusammenhängend ist, ist die Fortsetzung nach dem **Monodromiesatz 121** wegunabhängig. Man erhält auf ganz  $G$  eine Logarithmusfunktion  $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Durch Differentiation von  $ze^{-\lambda(z)} = z$  weist man mit  $\lambda(z_0) = w_0$  nach, dass  $e^{\lambda(z)} = z$ . Die holomorphe Funktion

$$w(z) := e^{\frac{1}{2}\lambda(z)}$$

ist dann eine Quadratwurzel auf  $G$  und wegen  $w^2(z) = z$  injektiv. Insbesondere ist  $w$  eine biholomorphe Abbildung von  $G$  auf ein Gebiet  $w(G)$ .

1. Schritt Wir zeigen, dass  $G$  biholomorph äquivalent zu einem beschränkten Gebiet ist. (Wenn  $G$  schon beschränkt ist, kann man sich diesen Schritt sparen.)

Sei o.E.  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $w : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Quadratwurzel.

Sind  $z, \tilde{z} \in G$  mit  $w(\tilde{z}) = -w(z)$ , so folgt

$$z = w(z)^2 = (-w(z))^2 = w(\tilde{z})^2 = \tilde{z},$$

also  $w(z) = -w(z) = 0$  im Widerspruch zur Definition von  $w$ . Das Gebiet  $w(G)$  enthält also keine “Spiegelpunkte”. Hat man deshalb eine kompakte Kreisscheibe in  $w(G)$ , so enthält die an 0 gespiegelte Kreisscheibe  $K$  keine Punkte von  $w(G)$ , und die Inversion an  $\partial K$  bildet  $w(G)$  biholomorph in diese Kreisscheibe, also auf ein beschränktes Gebiet ab.

**2. Schritt** Wir zeigen ein Surjektivitätskriterium.

Sei  $G$  einfach zusammenhängend mit  $0 \in G \subset \mathbb{D}$  und sei

$$f \in \mathcal{F} := \{f : G \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ injektiv und holomorph mit } f(0) = 0\}.$$

Ist  $f(G) \neq \mathbb{D}$ , so gibt es  $F \in \mathcal{F}$  mit  $|F'(0)| > |f'(0)|$ .

Ist also  $|f'(0)|$  maximal in  $\mathcal{F}$ , so ist  $f$  surjektiv.

Sei also  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus f(G)$  und  $\phi_0$  ein Automorphismus von  $\mathbb{D}$  auf sich mit  $\phi_0(z_0) = 0$ , vgl. **Korollar 73**. Damit ist  $\phi_0 \circ f : G \rightarrow \mathbb{D}$  eine biholomorphe Abbildung von  $G$  auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $\tilde{G} = \phi_0(f(G)) \subset \mathbb{D}$ , welches  $0 = \phi_0(z_0)$  nicht enthält. Also gibt es nach dem 0. Schritt eine injektive Funktion  $w : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $w(z)^2 = z$ . Offenbar ist  $w(\tilde{G}) \subset \mathbb{D}$ . Sei nun  $\phi_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ein weiterer Automorphismus, der  $w(\phi_0(0))$  auf 0 abbildet. Damit definieren wir

$$F(z) := \phi_1 \circ w \circ \phi_0 \circ f.$$

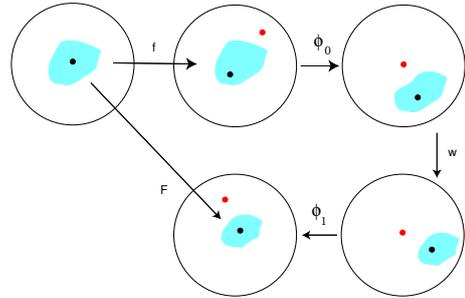
Offenbar ist  $F : G \rightarrow \mathbb{D}$  injektiv mit  $F(0) = 0$ . Für die holomorphe Abbildung  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit

$$h(z) := \phi_0^{-1}(\phi_1^{-1}(z)^2)$$

gilt  $h(0) = \phi_0^{-1}(z_1^2) = \phi_0^{-1}(w(\phi_0(0))^2) = \phi_0^{-1}(\phi_0(0)) = 0$  und  $h \circ F = f$ .

Weiter ist  $h$  keine Möbiustransformation, sonst wäre auch  $\phi_0 \circ h \circ \phi_1$ , also die Quadrat-Abbildung, eine solche. Insbesondere ist  $h$  keine Drehung um 0. Deshalb ist nach dem **Schwarzschen Lemma (Satz 71)**

$$|h'(0)| < 1 \text{ und } |f'(0)| = |h'(0)F'(0)| < |F'(0)|.$$



**3. Schritt** Nach dem ersten Schritt können wir  $G$  als beschränkt annehmen und nach Translation und Streckung sogar  $0 \in G \subset \mathbb{D}$ . Die Menge  $\mathcal{F}$  der injektiven holomorphen Funktionen  $\mathbb{D} \supset G \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $0 \in G$  als Fixpunkt enthält  $f(z) = z$ , ist also nicht leer. Wir konstruieren in dieser Menge ein Element mit maximalem Betrag der Ableitung in 0. Nach dem 2. Schritt ist diese Abbildung dann surjektiv auf  $\mathbb{D}$ .

Ist  $\epsilon > 0$  mit  $\overline{U_\epsilon(0)} \subset G$ , so gilt für alle  $f \in \mathcal{F}$  nach **Korollar 55 zur Cauchyschen Integralformel**

$$|f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{f(z)dz}{(z-0)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2} 2\pi\epsilon = \frac{1}{\epsilon}.$$

Also ist

$$s_0 := \sup \{|f'(0)| \mid f \in \mathcal{F}\} \leq \frac{1}{\epsilon} < \infty.$$

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{F}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(0)| = s_0$ . Die Folge ist durch 1 beschränkt, und deshalb gibt es nach dem **Satz 160 von Montel** eine kompakt konvergente Teilfolge. Deren Grenzfunktion  $f$  ist nach dem **Satz 154 über kompakte Konvergenz** holomorph mit  $|f'(0)| = s_0$  und natürlich  $f(0) = 0$ . Weil  $f'(0) \neq 0$ , ist  $f$  nicht konstant und deshalb nach **Korollar 156 zum Satz von Hurwitz** wie die  $f_n$  eine injektive Funktion. Schließlich ist  $f(G) \subset \mathbb{D}$  und nach dem **Satz 68 von der Gebietstreue** daher  $f(G) \subset \mathbb{D}$ . Nach dem 2. Schritt folgt  $f(G) = \mathbb{D}$ .  $\square$

## Bemerkungen zum Riemannsches Abbildungssatz.

1. Riemann verwendet im Beweis des Satzes in seiner Dissertation von 1851 ein Variationsprinzip, das sogenannte Dirichletprinzip, und setzt dabei die Existenz einer Extremalen als offensichtlich voraus - was sie aber nicht ist, wie später Weierstraß gezeigt hat. Aber auch Gauß als Gutachter der Dissertation hat die Lücke nicht moniert. Repariert wurde Riemanns Beweis 1901 von Hilbert. Damals begann eine lange Arbeit an dem Problem, an der sich vor allem Schwarz, Carathéodory, Koebe, Fejèr und Riesz mit immer neuen Beweisideen und Verbesserungen beteiligten, bis Carathéodory 1928 den hier vorgestellten ganz kurzen, wenn auch sehr gehaltvollen Beweis veröffentlichte. Zur Geschichte vergleiche das im Literaturverzeichnis angegebene Buch von *Felix Klein* und *R. Remmert: Funktionentheorie II*.
2. Hörer der Vorlesung im Sommer 2006 haben angemerkt: "Einem so schönen Beweis wie dem für den Riemannsches Abbildungssatz kann man doch mal ein Kästchen spendieren, oder?". Dem bin ich hier nachgekommen. Außerdem habe ich durch Fettdruck der Verweise deutlich gemacht, wieviele von den Ergebnissen dieses Semesters in den Beweis einfließen.
3. Der schöne Beweis ist allerdings nicht konstruktiv. Man möchte aber gern vor allem die Umkehrabbildung explizit haben, um zum Beispiel eine auf  $\mathbb{D}$  oder der dazu möbiusäquivalenten oberen Halbebene gegebene Textur winkeltreu auf ein Gebiet abzubilden. Wenn das Gebiet von Polygonzügen berandet ist, gibt es dafür ein nach Schwarz und Christoffel benanntes klassisches Verfahren, das allerdings wegen der dabei (oft nur schwer) auszuwertenden Kurvenintegrale mühsam anzuwenden war. Inzwischen liefert die diskrete Differentialgeometrie dafür aber sehr gute Methoden, wie man z.B. am Matheon-Bären vor dem Mathegebäude sehen kann.

Zu Abschluss betrachten wir eine biholomorphe Abbildung  $f$  vom Inneren eines achsenparalleles Rechtecks

$$R := \{x + iy \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

auf die obere Halbebene, wie sie nach dem Riemannsches Satz ja existiert. Wir wollen annehmen, dass sich  $f$  auf den Rand des Rechtecks zu einer stetigen Abbildung nach  $\hat{\mathbb{C}}$  fortsetzen läßt und diesen in die reelle Gerade abbildet, wobei zum Beispiel die Ecke  $(0, 0)$  im Punkt  $\infty$  landet. Die Funktion  $f : R \rightarrow \{z \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$  läßt sich dann mit Hilfe des Schwarzsches Spiegelungsprinzips (Satz 70) zu einer auf ganz  $\mathbb{C}$  definierten meromorphen Funktion fortsetzen, für die nach Konstruktion

$$f(z + 2ak + 2ibl) = f(z) \text{ für alle } k, l \in \mathbb{Z}$$

gilt. Die Funktion hat also Pole in allen Punkten  $2ak + 2ibl$  und die Perioden  $2a$  und  $2ib$ , sie ist eine sogenannte *doppelt-periodische Funktion*. Mit diesen werden wir uns im nächsten Abschnitte beschäftigen.

## 14 Elliptische Funktionen

In diesem Abschnitt folgen wir sehr eng dem Kapitel über elliptische Funktionen im Buch *Fischer/Lieb: Funktionentheorie, Vieweg, 4. Auflage 1985*. Die Theorie der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion findet man eingehender und sehr schön lesbar in *Freitag/Busam: Funktionentheorie, Springer, 2. Auflage*.

Wir betrachten meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}$  als Abbildungen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  in die Riemannsche Zahlenkugel, so dass sie also wirklich auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert sind. Viele Beispiele, die wir kennen, sind periodisch: Es gibt ein (nicht-triviales)  $\omega \in \mathbb{C}$  mit

$$f(z + \omega) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Gibt es meromorphe Funktionen mit mehreren Perioden? Natürlich: mit  $\omega$  ist auch jedes  $n\omega, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  eine Periode. Aber gibt es nicht-konstante Funktionen mit Perioden  $\omega_1, \omega_2$ , die über  $\mathbb{Z}$  linear unabhängig sind? Die Betrachtungen am Ende des letzten Kapitels enthielten ja eine unbewiesene Annahme über das Randverhalten der Abbildung.

Wir werden sehen, dass über  $\mathbb{Z}$  linear unabhängige Perioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sogar über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig sind. Funktionen, die mit solchen Perioden doppelt-periodisch sind, heißen *elliptische Funktionen*. Inspektion der uns bisher geläufigen meromorphen Funktionen liefert allerdings keine nicht-trivialen Beispiele. Elliptische Funktionen, die es, wie wir sehen werden, wirklich gibt, sind also eine ganz neue Klasse von Funktionen.

- Wir beginnen mit der Untersuchung möglicher Periodenmengen.
- Dann wollen wir die Eigenschaften elliptischer Funktionen studieren,
- insbesondere die der sogenannten Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion, die uns ein explizites Beispiel liefert.
- Dann werden wir zeigen, dass sich alle elliptischen Funktionen mit festen Perioden durch die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion ausdrücken lassen, womit diese Funktion ihre zentrale Rolle in der Theorie legitimiert.
- Zum Schluss werden wir den mysteriösen Namen *elliptische Funktionen* erklären und noch einmal auf die biholomorphe Äquivalenz zwischen Rechteck und oberer Halbebene zurückkommen.

### 14.1 Periodische Funktionen und Periodengitter

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  eine meromorphe Funktion. Dann nennen wir

$$\Lambda(f) := \{\omega \in \mathbb{C} \mid f(z + \omega) = f(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\}$$

die *Periodenmenge* von  $f$ .

**Satz 181.** Die Periodenmenge einer nicht-konstanten meromorphen Funktion  $f$  ist eine diskrete Untergruppe von  $(\mathbb{C}, +)$ .

*Beweis.* Es ist klar, dass

$$\omega_1, \omega_2 \in \Lambda(f) \implies n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \in \Lambda(f) \text{ für alle } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Also ist  $\Lambda(f)$  eine Untergruppe. Wäre  $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $a \in \mathbb{C}$  konvergente Folge in  $\Lambda(f) \setminus \{a\}$ , und  $f$  in  $z_0$  holomorph, so wäre  $f(z_0 + \omega_k) = f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_0 + \omega_k) = f(z_0 + a)$  und  $f$  nach dem Identitätssatz konstant.  $\square$

**Satz 182 (von Abel: Klassifikation diskreter Untergruppen von  $\mathbb{C}$ ).** *Es gibt drei Typen diskreter Untergruppen  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  und entsprechend drei Typen  $\Lambda$ -periodischer meromorpher Funktionen auf  $\mathbb{C}$ :*

(i)  $\Lambda = \{0\}$ .

(ii) Es gibt  $\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$\Lambda = \{n_1 \omega_1 \mid n_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

(iii) Es gibt  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$\Lambda = \{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$\omega_1 / \omega_2 \notin \mathbb{R}.$$

In diesem Fall heißt  $\Lambda$  ein Gitter.  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ . Sie heißen Erzeugende von  $\Lambda$  oder, wenn  $\Lambda = \Lambda(f)$  eine Periodengruppe ist, auch Hauptperioden. Sie sind durch  $\Lambda$  nicht eindeutig bestimmt.

Da wir den Satz im weiteren nicht benötigen, verzichten wir auf den Beweis. Vgl. Skriptum Bobenko.

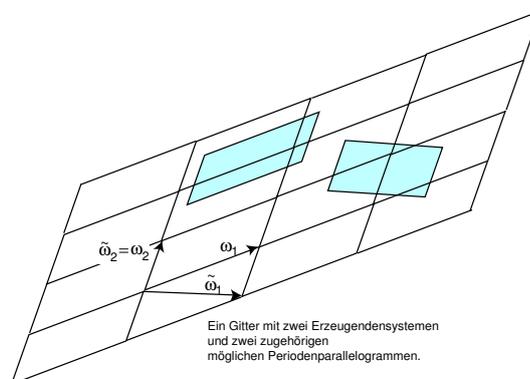
**Definition 183.** (i) Eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion, heißt *doppelt-periodisch* oder eine *elliptische Funktion*, wenn  $\Lambda(f)$  ein Gitter ist. Außerdem bezeichnen wir auch die konstanten Funktionen als *elliptisch*.

(ii) Eine *elliptische Funktion zu einem Gitter  $\Lambda$*  ist eine elliptische Funktion mit  $\Lambda \subset \Lambda(f)$ .

(iii) Ist  $f$  eine elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$  mit Erzeugenden  $\omega_1, \omega_2$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$ , so heißt

$$\{z_0 + s\omega_1 + t\omega_2 \mid 0 \leq s, t \leq 1\}$$

ein (*abgeschlossenes*) *Periodenparallelogramm* von  $f$ . Entsprechend definiert man offene oder halboffene Periodenparallelogramme. Wir werden das abgeschlossenen Periodenparallelogramm mit der offensichtlichen Parametrisierung auch als singuläres Quadrat auffassen.



**Bemerkung: Der Periodentorus.** Ist  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ein Gitter, so definiert

$$z \sim z' \iff z - z' \in \Lambda$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{C}$ . Die Restklassenmenge  $\mathbb{C}/\Lambda$  ist die Quotientengruppe von  $\mathbb{C}$  nach der Untergruppe  $\Lambda$ . Ein abgeschlossenes Periodenparallelogramm enthält Repräsentanten aus jeder Äquivalenzklasse, und nur die auf dem Rand gegenüberliegenden Punkte liegen in derselben Klasse. Daher kann man sich  $\mathbb{C}/\Lambda$  vorstellen als Periodenparallelogramm, bei dem die gegenüberliegenden Ränder identifiziert oder verklebt sind, also als einen Torus, den *Periodentorus*. Eine elliptische Funktion  $f$  mit  $\Lambda$  als Gitter definiert eine Abbildung  $\hat{f}: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Der Periodentorus trägt eine durch das Gitter gegebene kanonische komplexe Struktur, und elliptische Funktionen lassen sich deshalb interpretieren als holomorphe Abbildungen eines Torus in die Riemannsche Zahlenkugel. Wir werden die elliptische Funktion  $f$  in unserer Vorstellung meistens mit  $\hat{f}$  identifizieren. Das ist insbesondere hilfreich, wenn man zum Beispiel über die Anzahl der Pole einer elliptischen Funktion sprechen möchte. Die ist entweder 0 oder  $\infty$ , aber eigentlich möchte man wissen, wieviele inäquivalente Pole es gibt. Dann kann man sprechen über

- die Anzahl der Pole in einem halboffenen Periodenparallelogramm,
- die Anzahl der Pole auf dem Periodentorus oder
- die Anzahl der Pole modulo  $\Lambda$  oder, ganz kurz,
- die Anzahl der Pole von  $f$ ,

wobei man immer dieselbe Zahl meint. Wenn wir sagen

*Seien  $z_1, \dots, z_n$  die verschiedenen Pole von  $f$ ,*

so meinen wir, dass diese Punkte ein vollständiges Repräsentantensystem für die modulo  $\Lambda$  verschiedenen Pole bilden.

**Satz 184.** *Die Menge  $K(\Lambda)$  der elliptischen Funktionen zu einem gegebenen Periodengitter  $\Lambda$  bildet einen Unterkörper vom Körper aller meromorpher Funktionen auf  $\mathbb{C}$ . Er enthält die Konstanten und ist abgeschlossen gegenüber Differentiation.*

*Beweis.* Klar, weil die Periodizität bei den algebraischen Operationen und bei Differentiation erhalten bleibt. □

Wir zeigen nun drei fundamentale Sätze über elliptische Funktionen, die Liouville 1847 in seinen Vorlesungen gezeigt hat. Den ersten kennen Sie in einer etwas anderen Variante schon unter diesem Namen:

**Satz 185 (Erster Liouvillescher Satz).** *Jede holomorphe elliptische Funktion ist konstant.*

*Beweis.* Eine solche Funktion nimmt auf einem kompakten Periodenparallelogramm alle ihre Werte an, ist also beschränkt und nach dem “alten” Satz von Liouville konstant. □

**Satz 186 (Zweiter Liouvillescher Satz: Residuensumme elliptischer Funktionen).**

Eine elliptische Funktion hat (modulo  $\Lambda$ ) höchstens endlich viele Pole. Sind  $z_1, \dots, z_n$  die verschiedenen Pole von  $f$ , so gilt

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) = 0.$$

Die Anzahl der mit Vielfachheiten gezählten Pole, also  $\sum_{k=1}^n |\operatorname{Ord}(f, z_k)|$ , heißt die Ordnung  $\operatorname{Ord}(f)$  der elliptischen Funktion.

*Beweis.* Die Pole einer meromorphen Funktion sind isoliert, also liegen in jedem kompakten Periodenparallelogramm höchstens endlich viele. Darum kann man auch das Parallelogramm so verschieben, dass kein Pol auf dem Rand liegt. Dann ist

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) &= \int_{\partial P} f(z) dz \\ &= \int_{1P} f(z) dz - \int_{1P} f(z) dz - \int_{2P} f(z) dz + \int_{2P} f(z) dz. \end{aligned}$$

Wegen der Periodizität hat  $f$  aber auf gegenüberliegenden Seiten des Periodenparallelogramms dieselben Werte und die rechte Integralsumme ist 0.  $\square$

Unter der Anzahl der  $w$ -Stellen einer meromorphen Funktion  $f(z)$  versteht man die Anzahl der Nullstellen der Funktion  $f(z) - w$ , jeweils gezählt mit der entsprechenden Ordnung.

**Korollar 187 (Dritter Liouvillescher Satz).** Die Anzahl der  $w$ -Stellen einer nicht-konstanten elliptischen Funktion  $f$  der Ordnung  $m := \operatorname{Ord}(f)$  ist für jedes  $w \in \hat{\mathbb{C}}$  gleich  $m$ , d.h.  $f$  nimmt auf dem Periodentorus jeden Wert von  $\hat{\mathbb{C}}$  genau  $m$ -mal an.

*Beweis.* Sei  $w \in \mathbb{C}$ . Die Funktion  $\frac{(f(z)-w)'}{f(z)-w}$  ist ebenfalls elliptisch zum Gitter  $\Lambda$ , also gilt für ein Periodenparallelogramm, dessen Rand keine ihrer Pole enthält, von  $f(z) - w$  enthält

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{z_k \text{ Pol in } \overset{\circ}{P}} \operatorname{Res} \left( \frac{(f(z)-w)'}{f(z)-w}, z_k \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{(f(z)-w)'}{f(z)-w} dz \\ &= \text{Anzahl der } w\text{-Stellen} - \text{Anzahl der Pole von } f \text{ in } \overset{\circ}{P}. \end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 188.** Es gibt keine elliptische Funktion mit genau einem einfachen Pol auf dem Periodentorus.

*Beweis.* Sonst wäre die Residuensumme nicht 0.  $\square$

## 14.2 Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion

Die “einfachsten” elliptischen Funktionen haben nach dem letzten Satz entweder einen Pol der Ordnung 2 mit verschwindendem Residuum oder zwei einfache Pole mit entgegengesetztem Residuum.

**Satz 189 (und Definition: Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion).** Sei  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ein Gitter. Wir setzen

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum' \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

wobei  $\sum'$  die Summation über alle Gitterpunkte  $\omega \in \Lambda \setminus \{0\}$  bedeutet.

Dann ist  $\wp$  eine elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$  mit genau einem Pol, und zwar von der Ordnung 2.

$\wp$  heißt die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion (zum Gitter  $\Lambda$ ).

*Beweis. Zur Konvergenz.* Die unendliche Reihe in der Definition ist keine ganz gewöhnliche, weil  $\Lambda$  zwar abzählbar, aber nicht kanonisch linear geordnet ist. Wir zeigen für eine bestimmte Abzählung die absolute und kompakte Konvergenz. Nach dem Umordnungssatz ist dann  $\sum'$  für jede gewählte Abzählung kompakt konvergent gegen dieselbe Grenzwertfunktion.

Zunächst ist für  $R > 0$ ,  $|z| \leq R$  und  $|\omega| \geq 2R$

$$|z - \omega| \geq |\omega| - |z| \geq \frac{|\omega|}{2},$$

und deshalb

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2} \right| \leq \frac{R \cdot 3|\omega|}{|\omega|^2 \frac{|\omega|^2}{4}} = \frac{12R}{|\omega|^3}.$$

Wenn wir also zeigen können, dass für eine und dann für jede Abzählung von  $\Lambda \setminus \{0\}$

$$\sum' \frac{1}{|\omega|^3} < \infty, \tag{82}$$

dann ist die Summe in der Definition von  $\wp$  kompakt konvergent auf  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  und  $\wp$  eine meromorphe Funktion mit Polen genau in den Punkten von  $\Lambda$ .

Beweis von (82). Wir betrachten zunächst den Spezialfall

$$\Lambda = \mathbb{Z}^2 = \{n_1 + in_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann ist

$$\sum' \frac{1}{|\omega|^3} = \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3}$$

Auf dem Rand des Quadrates  $Q_n$  mit den Ecken  $(\pm n, \pm n)$  liegen genau  $8n$  Gitterpunkte, und für jedes  $\omega$  davon ist  $|\omega| \geq n$ . Also ist

$$\sum_{\omega \in \Lambda \cap \partial Q_n} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{8n}{n^3}.$$

Aus der Konvergenz von  $\sum \frac{1}{n^2}$  folgt (82).

Ist nun

$$\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\},$$

ein beliebiges Gitter mit Erzeugenden  $\omega_1, \omega_2$ , so betrachten wir den  $\mathbb{R}$ -linearen Isomorphismus  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\phi(x + iy) := x\omega_1 + y\omega_2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dafür gilt

$$|x + iy| = |\phi^{-1}(x\omega_1 + y\omega_2)| \leq c|x\omega_1 + y\omega_2|,$$

wobei  $c := \|\phi^{-1}\|$  die Operatornorm von  $\phi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist. Also ist

$$\frac{1}{|n_1\omega_1 + n_2\omega_2|^3} \leq \frac{c^3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3}.$$

Damit ist (82) auch für beliebiges Gitter bewiesen.

Zur Periodizität. Aus der Definition ist klar, dass  $\wp$  eine gerade Funktion ist. Wegen der Abspaltung des  $(\omega = 0)$ -Terms ist die Periodizität hingegen nicht so offensichtlich. Die Ableitung von  $\wp$  ist

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3},$$

wobei die Summe jetzt über alle  $\omega \in \Lambda$  geht!  $\wp'$  ist daher offensichtlich  $\Lambda$ -periodisch, und wir wollen das auf  $\wp$  übertragen. Wegen

$$\frac{d}{dz}(\wp(z + \omega) - \wp(z)) = \wp'(z + \omega) - \wp'(z)$$

ist  $\wp(\omega + z) - \wp(z)$  konstant und (setze  $z = -\frac{\omega}{2}$ )

$$\wp(\omega + z) - \wp(z) = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega}{2}\right).$$

Weil aber  $\wp$  gerade ist, folgt  $\wp(\omega + z) = \wp(z)$ .

Zu den Polstellen. Wegen der  $\Lambda$ -Periodizität von  $\wp$  ist  $z = 0$  die einzige Polstelle modulo  $\Lambda$ . Diese ist offensichtlich von der Ordnung 2, und das Residuum ist 0 (was wir aber schon wußten).  $\square$

**Laurententwicklung um den Pol.** Für  $|z| < |\omega|$  ist (wegen  $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum kx^{k-1}$ )

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{z^{k-1}}{\omega^{k-1}}$$

und deshalb erhält man

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\omega^{k+1}} z^{k-1} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} k \left( \sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{k+1}} \right) z^{k-1}.$$

Die Summen  $\sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{k+1}}$  verschwinden für gerades  $k$ , weil mit  $\omega \in \Lambda$  auch  $-\omega \in \Lambda$ . Wir erhalten

**Satz 190.** Die Laurententwicklung von  $\wp$  in  $0 < |z| < \min\{|\omega| \mid \omega \in \Lambda \setminus \{0\}\}$  ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} z^{2k}$$

mit

$$G_{2k+2} = \sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{2k+2}}.$$

Die  $G_{2k+2}$  heißen Eisensteinreihen.

Gliedweise Differentiation liefert

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots$$

Berechnen wir nun die ersten Terme von Cauchyprodukten, so finden wir

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots \\ \wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + \dots \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots \end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Linearkombination dieser Funktionen, die so gemacht ist, dass sich die Hauptteile kompensieren und der konstante Term verschwindet:

$$f(z) := \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6.$$

Das ist dann eine elliptische Funktion mit 0 als einzigem möglichen Pol, in dem aber der Hauptteil verschwindet. Also ist 0 eine hebbare Singularität und  $f$  konstant mit  $f(0) = 0$ . Damit haben wir die erste Aussage im folgenden Satz bewiesen:

**Satz 191 (Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion).** *Es gilt*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \quad (83)$$

mit

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum' \frac{1}{\omega^6}.$$

Ist  $\tilde{\wp}$  eine Lösung der Differentialgleichung (83), so ist

$$\tilde{\wp}(z) = \wp(z - a)$$

für eine Konstante  $a$ . Damit bestimmen die Gitterinvarianten  $g_2$  und  $g_3$  die Funktion  $\wp$  bis auf Translation und das Gitter  $\Lambda$  eindeutig.

Bemerkung: Beachten Sie, dass wir bisher nicht wissen, ob zu vorgegebenen  $g_2, g_3$  ein Gitter mit diesen Invarianten und damit eine Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion als Lösung der Differentialgleichung  $(y')^2 = 4y^3 - g_2y - g_3 = 0$  existiert.

*Beweis der Eindeutigkeit.* Sei  $\wp^{-1}$  ein lokales Inverses von  $\wp$  um einen Punkt  $z_0$  mit  $\wp'(z_0) \neq 0$ . Dann gilt

$$(\wp^{-1} \circ \tilde{\wp}(z))' = \frac{\tilde{\wp}'(z)}{\wp'(\wp^{-1}(\tilde{\wp}(z)))}$$

und damit

$$\left( (\wp^{-1} \circ \tilde{\wp})' \right)^2 = \frac{4\tilde{\wp}^3 - g_2\tilde{\wp} - g_3}{4(\wp(\wp^{-1}(\tilde{\wp})))^3 - g_2\wp(\wp^{-1}(\tilde{\wp})) - g_3} = 1.$$

Es folgt

$$\left( (\wp^{-1} \circ \tilde{\wp})' - 1 \right) \left( (\wp^{-1} \circ \tilde{\wp})' + 1 \right) = 0.$$

Weil meromorphe Funktionen  $\neq 0$  isolierte Nullstellen haben, verschwindet einer der Faktoren lokal. Nehmen wir an, dass

$$(\wp^{-1} \circ \tilde{\wp})' = -1.$$

Dann gibt es  $a \in \mathbb{C}$  mit  $\wp^{-1} \circ \tilde{\wp} = a - z$ , und weil  $\wp$  gerade ist, folgt

$$\tilde{\wp} = \wp(a - z) = \wp(z - a).$$

Das gilt nach der vorstehenden Argumentation *lokal*. Also ist  $\tilde{\wp} - \wp(z - a) = 0$  auf einer nicht-leeren offenen Menge, dann aber nach dem Identitätssatz überhaupt  $= 0$ .  $\square$

**Eine weitere Herleitung der Differentialgleichung für  $\wp$ .** Da die Funktion  $\wp$  von der Ordnung 2 ist, nimmt sie jeden Wert genau zweimal an. Die Punkte, wo sie einen Wert mit Vielfachheit 2 annimmt, sind genau die Nullstellen der Funktion  $\wp'$ .

**Lemma 192.** *Ist  $f$  eine gerade elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$ , so gilt für alle  $\omega \in \Lambda$  und  $z \in \mathbb{C}$*

$$f\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = f\left(\frac{\omega}{2} - z\right).$$

*Ist  $\frac{\omega}{2}$  kein Pol von  $f$ , so gilt deshalb*

$$f'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0.$$

*Beweis.*

$$f\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = f\left(-\frac{\omega}{2} - z\right) = f\left(-\frac{\omega}{2} + \omega - z\right) = f\left(\frac{\omega}{2} - z\right).$$

$\square$

Weil  $\wp'$  modulo  $\Lambda$  nur in 0 einen Pol hat, und der die Ordnung 3 hat, hat  $\wp'$  modulo  $\Lambda$  genau drei Nullstellen. Ist  $\omega_1, \omega_2$  ein Erzeugendensystem, so sind das nach dem Lemma also

$$\frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2}.$$

Die entsprechenden doppelt angenommenen Werte von  $\wp$ , also

$$e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 := \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad e_3 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \quad (84)$$

heißen auch die *Halbwerte* von  $\wp$ . Sie sind paarweise verschieden, weil  $\wp$  ja keinen Wert viermal annimmt.

Die Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= \wp'(z)^2 - 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \\ &= \left(\frac{4}{z^6} + \dots\right) - 4\left(\frac{1}{z^6} - \frac{e_1 + e_2 + e_3}{z^4} + \dots\right) \end{aligned}$$

ist elliptisch. Sie hat höchstens in 0 einen Pol, und zwar von der Ordnung höchstens 4. Andererseits hat sie in  $\frac{\omega_1}{2}$ ,  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  und  $\frac{\omega_2}{2}$  jeweils eine mindestens doppelte Nullstelle, ist also nach dem Korollar 187 konstant, natürlich mit Wert 0. Daraus folgt

**Satz 193.** *Mit den Werten  $e_1, e_2, e_3$  aus (84) gilt*

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

Der Vergleich mit Satz 191 liefert für das für die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion charakteristische Polynom

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

folgende Identitäten:

$$\begin{aligned}e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) &= -g_2, \\4e_1e_2e_3 &= g_3.\end{aligned}$$

Daraus findet man durch elementares Rechnen

$$\begin{aligned}g_2^3 - 27g_3^2 &= 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \neq 0, \\ \frac{3}{2}g_2 &= (e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2.\end{aligned}$$

Die Frage, ob die sogenannte “Diskriminanten-Ungleichung”  $g_2^3 \neq 27g_3^2$  auch hinreichend dafür sei, dass es ein Gitter mit den Gitterinvarianten  $g_2, g_3$  und damit eine  $\wp$ -Funktion gibt, die die Differentialgleichung (83) löst, ist eine Variante des sogenannten *Jacobischen Problems*. Die Antwort ist “JA” (Hurwitz 1903), vgl. *K. Lamotke, Riemannsche Flächen, Springer 2005, Abschnitt 2.2.7*.

### 14.3 Der Körper der elliptischen Funktionen

Die Ableitung einer nicht-konstanten elliptischen Funktion der Ordnung  $m$  hat auf dem Periodentorus nur endlich viele Nullstellen, also werden fast alle Werte  $c \in \mathbb{C}$  an genau  $m$  verschiedenen Punkten angenommen. Sei  $c$  ein solcher Wert und  $f(a) = c$ . Wir setzen weiter zunächst voraus, dass

$$f \text{ gerade}$$

ist. Dann ist auch  $f(-a) = c$ . Wären  $a$  und  $-a$  äquivalent modulo  $\Lambda$ , so wäre  $2a \in \Lambda$  und  $f'(a) = 0$  nach Lemma 192. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von  $c$  und damit von  $a$ . Also sind  $a$  und  $-a$  nicht äquivalent modulo  $\Lambda$ . Daher wird der Wert  $c$  modulo  $\Lambda$  an genau  $m = 2n$  Punkten  $a_1, \dots, a_n$  und  $-a_1, \dots, -a_n$  angenommen. Sei nun  $d \in \mathbb{C}$  ein weiterer Wert, der an  $2n$  verschiedenen Stellen  $b_1, \dots, b_n$  und  $-b_1, \dots, -b_n$  angenommen wird. Dann ist

$$F(z) := \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

eine elliptische Funktion mit Nullstellen erster Ordnung in den  $a_k, -a_k$  und Polen erster Ordnung in den  $b_k, -b_k$ .

Andererseits hat die Funktion  $h_k(z) = \wp(z) - \wp(a_k)$  Nullstellen in  $a_k$  und  $-a_k$ , und weil  $\wp$  von der Ordnung 2 ist, sind das alle Nullstellen. Analoges gilt für die  $b_k$  und deshalb hat die elliptische Funktion

$$G(z) = \frac{(\wp(z) - \wp(a_1)) \dots (\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1)) \dots (\wp(z) - \wp(b_n))}$$

einfache Nullstellen in den  $a_k, -a_k$  und Pole erster Ordnung in den  $b_k, -b_k$ . Dann ist aber  $F/G$  eine holomorphe elliptische Funktion und damit konstant vom Wert  $A$ . Auflösen von

$$\frac{f(z) - c}{f(z) - d} = A \frac{(\wp(z) - \wp(a_1)) \dots (\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1)) \dots (\wp(z) - \wp(b_n))}$$

nach  $f(z)$  liefert: Jede gerade elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$  ist eine rationale Funktion in  $\wp$ .

**Satz 194.** (i) Jede elliptische Funktion ist eine rationale Funktion von  $\wp$  und  $\wp'$  zum selben Gitter.

(ii) Wir bezeichnen mit  $\mathbb{C}(s)$  den Körper der rationalen Funktionen in einer Variablen  $s$  über  $\mathbb{C}$  und mit  $\mathbb{C}(s)[t]$  den Polynomring über  $\mathbb{C}(s)$ . Sei  $K(\Lambda)$  der Körper der elliptischen Funktionen zum Gitter  $\Lambda$  und seien  $g_2, g_3$  dazu definiert wie im Satz 191. Dann gilt

$$K(\Lambda) \cong \mathbb{C}(s)[t]/(t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3).$$

*Beweis.* Zu (i). Das ist für gerade elliptische Funktionen oben bereits erledigt. Ist  $f$  eine ungerade elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$ , so ist  $f/\wp'$  eine gerade elliptische Funktion, also  $f(z) = R(\wp(z))\wp'(z)$  für eine rationale Funktion  $R$ . Und weil sich jede elliptische Funktion als Summe einer geraden und einer ungeraden schreiben läßt, folgt (i).

Zu (ii). Wir betrachten den Ringhomomorphismus

$$\phi : \mathbb{C}(s)[t] \rightarrow K(\Lambda)$$

mit

$$\phi(s) = \wp, \quad \phi(t) = \wp'.$$

Nach dem Beweis zu (i) ist  $\phi$  surjektiv und nach Satz 193 ist  $t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3$  im Kern. Offenbar ist das aber auch ein nicht-triviales Polynom kleinsten Grades im Kern  $\subset \mathbb{C}(s)[t]$ , weil  $\wp'$  ungerade und daher sicher kein Polynom in  $\wp$  ist. Weil Polynome über Körpern Hauptidealringe sind, ist der Kern das von  $t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3$  erzeugte Ideal, und die Behauptung folgt aus dem Homomorphiesatz.  $\square$

**Beispiel 195 ( Additionstheorem für  $\wp$  ).** Für  $a \in \mathbb{C}$  ist  $\tilde{\wp}(z) := \wp(z+a)$  eine elliptische Funktion, ist also entsprechend dem obigen Satz darstellbar als Polynom in  $\wp'$  mit rationalen Funktionen von  $\wp$  als Koeffizienten. Man kann zeigen, dass

$$\wp(z+a) = \frac{1}{4(\wp(z) - \wp(a))^2} (\wp'(z) - \wp'(a))^2 - (\wp(z) + \wp(a)),$$

vorausgesetzt  $z, a, z \pm a \notin \Lambda$ . Zum Beweis betrachtet man die Differenzfunktion der beiden Seiten und berechnet die Hauptteile derselben in ihren Polen 0 und  $\pm a$ . Die Hauptteile verschwinden, und damit die ganze elliptische Funktion.  $\square$

Im Körper der elliptischen Funktionen gibt es neben  $\wp$  viele andere schöne Exemplare, zum Beispiel eine ganze Kollektion von nach Jacobi benannten Funktionen. Auf diese stößt man bei anderen Zugängen zum Thema.

## 14.4 $\wp$ -Funktion und elliptische Integrale

Integrale der Form

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$$

mit einer rationalen Funktion  $R$  in zwei Variablen und einem Polynom  $P(x)$  vom Grad  $\leq 2$  lassen sich (nach Substitution) mit elementaren Funktionen lösen. Zum Beispiel ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \text{const.} \quad (85)$$

Wenn aber  $P$  vom Grad 3 oder 4 ohne doppelte Nullstellen ist, klappt das nicht mehr. Solche Integrale treten auf bei der Umfangsberechnung der Ellipse und haben daher den Namen *elliptische Integrale* bekommen:

$$\frac{1}{4}L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \stackrel{x=\tan(t/2)}{=} \int_0^1 \frac{\sqrt{4a^2 x^2 + b^2(1-x^2)^2}}{(1+x^2)^2} dx.$$

Die Stammfunktionen sind in diesem Fall "völlig neue" Funktionen, sie lassen sich nämlich, in schöner Analogie zur Gleichung (85), darstellen durch Umkehrfunktionen von (aufs Reelle eingeschränkten) elliptischen Funktionen.

Wir demonstrieren das an einem

**Beispiel 196.** Sei  $\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  ein achsenparalleles Rechteckgitter mit positivem reellen  $\omega_1$  und  $\wp$  die zugehörige Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion. Dann ist  $\Lambda$  invariant unter der Konjugation, und  $\wp$  ist auf  $\mathbb{R} \setminus \omega_1\mathbb{Z}$  reell. Ebenso sind die zugehörigen Werte  $g_2, g_3$  reell. Nach Lemma 192 ist  $\wp$  auf dem Intervall  $]0, \omega_1[$  symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes  $\frac{\omega_1}{2}$  und als Funktion der Ordnung 2 deshalb auf  $]0, \frac{\omega_1}{2}[$  injektiv. Weiter folgt aus der Definition von  $\wp$ , dass  $\lim_{x \searrow 0} \wp(x) = +\infty$ . Daher wird  $]0, \frac{\omega_1}{2}[$  streng monoton fallend auf  $[e_1, +\infty[$  abgebildet und  $\wp'$  hat keine Nullstelle im Intervall-Inneren. Die Umkehrfunktion

$$f : [e_1, \infty[ \rightarrow ]0, \rho]$$

ist differenzierbar auf  $]e_1, \infty[$ , und dort gilt nach Satz 191

$$f'(y) = \frac{1}{\wp'(f(y))} = \frac{1}{-\sqrt{4\wp(f(y))^3 - g_2\wp(f(y)) - g_3}} = \frac{-1}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}.$$

Beachten Sie dabei, dass  $4y^3 - g_2y - g_3 = (\wp'(f(y)))^2 > 0$  und wegen der Monotonie von  $\wp$  die Ableitung  $\wp'$  auf  $]e_1, \infty[$  negativ ist.

Die Umkehrfunktion  $f$  der Einschränkung von  $\wp$  ist also die eindeutig bestimmte Stammfunktion zu  $\frac{-1}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}$  mit  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 0$ .

Das elliptische Integral

$$\rho - \int_{e_1}^x \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}$$

ist die Umkehrfunktion der auf  $]0, \rho]$  eingeschränkten Weierstraßfunktion. □

Dieses Beispiel ist kein Zufall: Jedes elliptische Integral  $\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$  besitzt eine Umkehrfunktion, die sich zu einer elliptischen Funktion fortsetzen läßt. Vergleichen Sie dazu das erste Kapitel von *H.E. Rauch/A. Lebowitz: Elliptic Functions, Theta functions, and Riemann Surfaces*.

## 14.5 $\wp$ -Funktion und Abbildungssatz

Sei wieder wie im letzten Beispiel  $\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  ein achsenparalleles Rechteckgitter mit positivem reellen  $\omega_1$  und  $\wp$  die zugehörige Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion. Dann ist  $\Lambda$  invariant unter Konjugation und deshalb

$$\wp(\bar{z}) = \overline{\wp(z)}.$$

Weil  $\wp$  überdies gerade ist, folgt für reelles  $t$

$$\wp(it) = \overline{\wp(-it)} = \overline{\wp(it)},$$

so dass  $\wp$  auch auf der imaginären Achse reell ist.

Ebenso finden wir

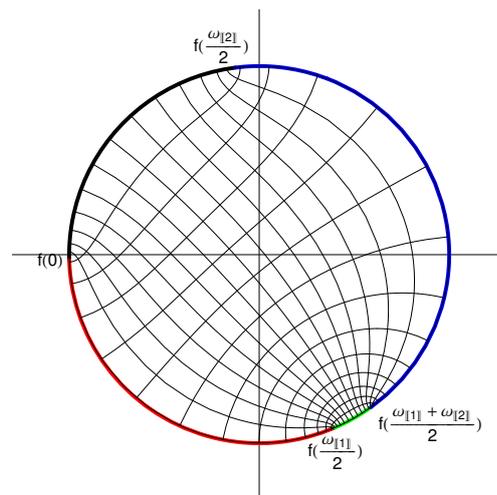
$$\overline{\wp\left(\frac{\omega_1}{2} + it\right)} = \wp\left(\frac{\omega_1}{2} - it\right) \stackrel{\text{Lemma 192}}{=} \wp\left(\frac{\omega_1}{2} + it\right)$$

Also ist  $\wp$  auch auf der “imaginären Halbachse” reell. Das zeigt man schließlich auch für die “reelle Halbachse”. Mit anderen Worten: Der Rand vom Viertelrechteck

$$R_0 := \left\{ x + iy \mid 0 \leq x \leq \frac{\omega_1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\omega_2}{2} \right\}$$

wird in die reelle Achse abgebildet. In den Ecken  $\neq 0$  des Viertelrechtecks liegen die (einfachen) Nullstellen von  $\wp'$ , so dass  $\wp$  dort lokal wie die Quadratabbildung aussieht. Der rechte Winkel in der Ecke wird also zu einem gestreckten. Läuft man einmal um den Rand von  $R_0$  herum, so durchläuft der Bildpunkt also die ganze reelle Achse von  $\infty$  bis  $-\infty$ . Nach Lemma 192 mit  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  nimmt  $\wp$  im linken halben Periodenrechteck dieselben Werte an wie im rechten, und weil  $\wp$  von der Ordnung 2 ist, nimmt es deshalb im halboffenen linken halben Periodenrechteck jeden Wert genau einmal an. Deshalb wird das Innere von  $R_0$  surjektiv auf eine Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , also auf eine offene Halbebene abgebildet, und zwar auf die untere, weil  $\wp|_{]0, \rho_1]}$  monoton fallend war.

Die Funktion  $-\wp$  liefert also die vom Riemannschen Abbildungssatz garantierte biholomorphe Abbildung eines Rechtecks auf die obere Halbebene. Mit einer nachfolgenden Möbiustransformation erhält man die Abbildung auf den Einheitskreis:





Ferner kann man zeigen (schwerer), dass

$$j(\mathbb{H}) = \mathbb{C}.$$

Sind also  $(g_2, g_3)$  mit  $\Delta \neq 0$  vorgegeben, so gibt es ein  $\tau \in \mathbb{H}$  mit  $j(\tau) = \frac{g_2^3}{\Delta}$ . Durch geschickte Wahl einer 12. Wurzel  $\zeta$  aus  $\Delta(\Lambda)/\Delta$  kann man dann erreichen, dass für  $\Lambda := \zeta\Lambda_\tau$  gilt

$$\Delta(\Lambda) = \Delta, g_2(\Lambda) = g_2, g_3(\Lambda) = g_3.$$

Die notwendige Bedingung  $\Delta \neq 0$  ist also auch hinreichend für die Existenz eines Gitters mit vorgegebenen Gitterkonstanten  $g_2, g_3$ .

Die absolute Invariante  $j : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine holomorphe Funktion. Sie erzeugt im Körper der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{H}$  einen Unterkörper, den Körper der sogenannten *Modulfunktionen*. Diese sind offenbar invariant unter der Operation der Modulgruppe:

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = f(\tau) \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Diese Funktionen und eine Verallgemeinerung, die sogenannte *Modulformen* sind die Objekte eines weiten Feldes der höheren komplexen Analysis mit bedeutenden Anwendungen zum Beispiel in der Zahlentheorie.

Aber hier ist das Semester zu Ende.