

Differentialgleichungen I

9. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 05.01. bis 11.01.

Aufgabe 1: **ausnahmsweise 7 Punkte**

In der Vorlesung wurde der **Einzigkeitssatz** von Osgood angegeben. Dieser hat seinen Ursprung in der beigefügten Arbeit von Osgood aus dem Jahre 1898¹. Formuliere den **Einzigkeitssatz** aus dieser Arbeit und skizziere den Beweis in unserer Sprache. (Wenn Begriffe benutzt werden, die nicht in der Vorlesung definiert wurden, so müssen diese erklärt werden.)

Der Artikel umfaßt 15 Seiten. Bei Bedarf kann der Artikel hier ausgedruckt werden.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Wählt man im Satz von Osgood für die Funktion $\omega = \omega(z)$ z. B. die Funktionen

$$Lz, Lz \left| \ln \frac{1}{z} \right|, Lz \left| \ln \frac{1}{z} \right| \ln \left| \ln \frac{1}{z} \right|, \dots,$$

so erhält man immer schwächere Einschränkungen an die rechte Seite $f = f(t, u)$. Zeige, daß es keinen „am meisten verschärften“ Satz dieser Art gibt. Zeige also, daß es zu einer den Voraussetzungen des Satzes genügenden Funktion ω immer eine Funktion ω_1 gibt, die ebenfalls den Voraussetzungen des Satzes genügt und

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\omega(z)}{\omega_1(z)} = 0$$

erfüllt.

¹W. F. Osgood: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung. *Monatsh. Math.* 9 (1898), 331–345.



William Fogg Osgood
1864-1943

Frohe Weihnachten!