Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. Etienne Emmrich

Wintersemester 2008/09

Differentialgleichungen I

8. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 15.12. bis 21.12.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Beweise die folgende Fassung des Satzes von Arzelà-Ascoli:
Sei Z ein Banachraum und sei $A \subseteq Z$ kompakt. Sei X ein weiterer Banachraum. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}(A; X)$ ist genau dann relativ kompakt in $\mathcal{C}(A; X)$, wenn sie gleichgradig stetig ist und für jedes $t \in A$ die Menge

$$\mathcal{M}(t) = \{v(t) \in X \,:\, v \in \mathcal{M}\}$$

relativ kompakt in X ist.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sei $(H, \|\cdot\|)$ ein unendlichdimensionaler, separabler Hilbertraum. Wir wollen zeigen, daß es eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B}(0,1)$ in sich gibt, welche keinen Fixpunkt besitzt. Kakutani hat 1943 eine solche konstruiert:

Sei hierzu $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H. Jedes Element $u \in H$ läßt sich dann darstellen als eine verallgemeinerte Fourierreihe[1]

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{R}\,.$$

Wir definieren eine Abbildung $S : H \to H$ durch

$$S(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_{n+1}.$$

(i) Zeige, daß S linear und beschränkt (also stetig) ist.

(ii) Wir definieren nun die Abbildung

$$T(u) := \frac{1}{2}(1 - \|u\|)e_0 + S(u), \quad u \in \overline{B}(0,1).$$

Zeige, daß T stetig ist und $\overline{B}(0,1)$ in sich abbildet, und weiter, daß T keinen Fixpunkt besitzt.

[1] Es gilt dann die *Parsevalsche Gleichung*: $\|u\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

In unendlichdimensionalen Räumen reicht die Stetigkeit der rechten Seite im allgemeinen nicht aus, um die (lokale) Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T], \\ u(t_0) = u_0, & t_0 \in [0, T], \end{cases}$$

zu gewährleisten. Das folgende Gegenbeispiel wurde in der Vorlesung angegeben.

Es sei $X = c_0$ der Raum der Nullfolgen, versehen mit der Supremumsnorm. Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), & t \in [0, T], \\ u(0) = u^0, \end{cases}$$

wobei die k-te Komponente von u^0 gegeben ist durch $u_k^0 = 1/k^2$ und die k-te Komponente von $f(u)$ durch

$$f(u)_k := 2\sqrt{|u_k|}$$

für $u \in c_0$. Obgleich $f : c_0 \to c_0$ stetig ist, besitzt das Anfangswertproblem auf beliebig kleinen Intervallen um $t_0 = 0$ keine Lösung.

Hier nun die Aufgaben:

(i) Wieso ist der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar? (Zeige, daß $f : c_0 \to c_0$ zwar stetig ist, aber keiner geeigneten Lipschitz-Bedingung genügt.)

(ii) Betrachte das Anfangswertproblem im Raum l^∞ der beschränkten Folgen. Ist nun der Satz von Picard-Lindelöf oder jener von Peano anwendbar?[2]

(iii) Betrachte das Anfangswertproblem nochmals im Raum l^∞ und bestimme unendlich viele Lösungen zur Anfangsbedingung $u^0 = (0, 0, \dots)$. Ist die Menge aller Lösungen kompakt?

Zusatzaufgabe (2 Punkte):

(a) Zeige, daß die Lösungsmenge die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Ist die Mächtigkeit der Lösungsmenge somit größer oder gleich $\aleph_1$?

(b) Benötigt man zur Bestimmung der Lösungsmenge das Auswahlaxiom?

[2] Hinweis: Zeige u.a., daß das Bild der beschränkten Menge der „Einheitsfolgen“ unter f nicht relativ kompakt ist.