Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. Etienne Emmrich

Wintersemester 2008/09

Differentialgleichungen I

7. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 08.12. bis 14.12.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Wir betrachten in $X = \mathcal{C}([0,1])$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ &u(0) = u_0 \in X, \end{aligned}$$

mit $(Av)(x) := \int_0^1 (\xi - x)v(\xi)d\xi$ für $v \in X$.
Zeige, daß der zugehörige Lösungsoperator durch

$$S(t) = e^{-tA} = I - \sqrt{12}\sin(\frac{t}{\sqrt{12}})A + 12\big(1 - \cos(\frac{t}{\sqrt{12}})\big)A^2\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

gegeben ist. (I bezeichne die Identität in X.)
Hinweis: Man kann A^3 berechnen.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Vorgelegt sei das Anfangswertproblem für die partielle Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + \int_a^b \exp(t^\alpha - (x-y)^2)u(y,t)dy + xt^\alpha u(x,t) = x^2 + t^\alpha,\ x \in (a,b),\ t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = v_0(x)\,,$$

wobei $\alpha \geq 0$ und $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ gegeben seien. Gib eine geeignete Formulierung als Anfangswertproblem für eine lineare Operator-Differentialgleichung an und untersuche dieses auf Lösbarkeit. Gib eine explizite Formel für die Lösung an, wenn $\alpha = 0$ ist.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Zeige, daß A genau dann schiefsymmetrisch ist, wenn für jede Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = 0$ die euklidische Norm $|u(t)|$ konstant ist für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Wir wollen die nichtlineare Fredholmsche Integralgleichung

$$u(x) = \lambda \int_a^b f(x, y, u(y))dy, \qquad x \in [a,b], \lambda \in \mathbb{R},$$

auf Lösbarkeit untersuchen. Für ein festes $r > 0$ sei

$$f : Q := \big\{(x, y, v) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x, y \in [a, b],\, |v| \le r\big\} \to \mathbb{R}$$

stetig und

$$M := \max_Q |f(x, y, v)|.$$

Zeige: Falls $|\lambda| \le r/(M(b-a))$, so gibt es mindestens eine Lösung $u \in \mathcal{C}([a, b])$ mit $\|u\|_\infty \le r$.