Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. Etienne Emmrich

Wintersemester 2008/09

Differentialgleichungen I

6. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 01.12. bis 07.12.

Aufgabe 1: **ausnahmsweise 5 Punkte**

Es seien $X = \mathbb{R}^n$ und $A, B : X \to X$ lineare Abbildungen (unabhängig von t). Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Kommutieren A und B, so gilt $e^A\, e^B = e^{A+B} = e^B\, e^A$ und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. Ist zusätzlich B invertierbar, so gilt auch $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$.

(ii) Es gilt[1]

$$\lim_{n\to\infty} (I + \frac{1}{n}B)^n = e^B = \lim_{n\to\infty} (I - \frac{1}{n}B)^{-n}.$$

(iii) Es gilt

$$Bv = \lim_{t\searrow 0} \frac{e^{tB}v - v}{t}$$

für beliebige $v \in X$.

(iv) Angenommen, A lasse den Unterraum $E \subseteq X$ invariant, für alle $v \in E$ sei also auch $Av \in E$. Ist dann u eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \in E, \end{cases} \tag{1}$$

für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so ist $u(t) \in E$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(v) Sei A nilpotent. Was kann man dann über die Lösungen von (1) sagen?

(vi) Es habe A einen Eigenwert mit positivem Realteil. Dann gibt es mindestens eine Lösung u der Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = 0$, für die gilt

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0.$$

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Es sei $X = \mathbb{R}^n$, I ein Intervall, $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(X))$. Wir betrachten ein Fundamentalsystem $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(X))$ der Differentialgleichung

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0. \tag{2}$$

[1] Hinweis: Binomische Formel und Bernoullische Ungleichung.

Zeige, daß eine Abbildung $\mathcal{V} \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(X))$ genau dann ein Fundamentalsystem von (2) ist, wenn es eine invertierbare Abbildung $C \in \mathcal{L}(X)$ gibt mit

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{U}(t)C, \qquad t \in I.$$

Ist $C \in \mathcal{L}(X)$ invertierbar und kommutiert C mit allen $A(t)$, $t \in I$, so ist auch $C\mathcal{U}$ ein Fundamentalsystem von (2).

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Bestimme den Propagator der Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = 0$ $(t \in \mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Löse nun das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$