

Differentialgleichungen I

5. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 24.11. bis zum 30.11.

Aufgabe 1:

2 Punkte

Bestimme mit Hilfe der Methode der Reduktion der Ordnung die allgemeine Lösung des Systems in $X = \mathbb{R}^2$

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0, \quad t > 0,$$

mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1/t & 1 \\ -1/t^2 & -2/t \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung ist $u_1(t) = (t^2, -t)^T$.

Wie lautet der zugehörige Propagator?

Aufgabe 2:

2 Punkte

Sei X ein BANACH-Raum und sei $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ stetig und genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung. Es gelte weiterhin

$$f(-t, u) = -f(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, u \in X.$$

Zeige: Ist u eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

auf einem Intervall $[-r, r]$, $r > 0$, so ist u gerade.

Aufgabe 3:

2 Punkte

Zeige, daß das Anfangswertproblem für die Integrodifferentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) = (Ku)(t), \quad t \in (0, T), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

mit $(Ku)(t) := \int_0^t k(t-s)u(s)ds$, $k \in L^1(\mathbb{R})$, für beliebiges $T > 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1([0, T])$ besitzt. Warum ist der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar?

Aufgabe 4:**3 Punkte**

- (a) Die *MSC (2000)* (Mathematics Subject Classification) ist ein System zur Klassifizierung der mathematischen Fachgebiete, wobei jedem Gebiet eine Kombination aus fünf Ziffern und Buchstaben zugeordnet wird. Anhand dieses Codes kann recht leicht herausgefunden werden, in welche Gebiete ein Artikel oder ein Buch einzuordnen ist. Bei einem Artikel ist die MSC-Angabe meist am Anfang, nach dem Abstract, im Buch auf einer der ersten Seiten angegeben.

Welchen *MSC (2000)*-Code haben die folgenden mathematischen Themenbereiche?

- (i) Theorie der Wellengleichungen
 - (ii) Nichtlineare Randwertprobleme
 - (iii) Theorie der BANACH-Räume stetiger Funktionen
 - (iv) Gewöhnliche Differentialgleichungen in BANACH-Räumen
- (b) Wo ist die auf dem 4. Übungsblatt in der Fußnote 5 erwähnte Arbeit von Enflo zu finden? Gib die vollständige Referenz an, d. h. Name des (der) Autors (Autoren), Titel der Arbeit, Name des Journals, Nummer des Bandes/Heftes, Jahrgang und Seitenzahlen.

Zum Abschluß noch ein Zitat des großen Funktionalanalytikers (seines Zeichens also ein echter „Theoretiker“) Paul Halmos aus dem Jahre 1985:

Mathematics is not a deductive science - that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial-and-error, experimentation, and guesswork.