Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. Etienne Emmrich

Wintersemester 2008/09

Differentialgleichungen I

3.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 10.11. bis zum 16.11.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Gib mindestens drei Literaturquellen an, in denen der folgende Satz von Mazur bewiesen wird und formuliere einen Beweis in eigenen Worten:

> *Sei X ein* Banach*-Raum und $A \subset X$ eine relativ kompakte Menge. Dann ist auch die konvexe Hülle co(A) von A relativ kompakt.*

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Es sei $X \subset \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x) = 0$, versehen mit der Supremumnorm. Es sei $k \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$(Ku)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)u(y)dy, \qquad u \in X,\ x \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeige, daß alle Funktionen $u \in X$ gleichmäßig stetig und beschränkt sind.

(ii) Zeige, daß K eine Abbildung von X in sich, linear und beschränkt ist.

(iii) Es gelte $\int_{-\infty}^{\infty} |k(y)|dy < 1$. Zeige, daß es dann zu jedem $f \in X$ genau ein $u \in X$ gibt, so daß $u - Ku = f$ gilt.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Für $u \in \mathcal{C}([a,b];X)$ sei $\{u^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ die in der Vorlesung definierte Folge von Treppenfunktionen, also für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) &:= u\big(t_{k-1}^{(n)}\big) \qquad \text{für } t \in \big[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\big),\ k = 1,2,\dots,n,\\ u^{(n)}(b) &:= u\big(t_{n-1}^{(n)}\big), \end{aligned}$$

wobei $t_k^{(n)} = a + \frac{b-a}{n}k$ ist.

Zeige, daß $\{u^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen u konvergiert.