Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. Etienne Emmrich

Wintersemester 2008/09

Differentialgleichungen I

2.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 03.11. bis zum 09.11.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Man kann eine partikuläre Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x)\,, \qquad x \in (a,b)\,,$$

mit der *Methode von Cauchy* bestimmen. Dazu bestimmt man für s aus dem zugrundeliegenden Intervall (a,b) die Koeffizienten c_1, c_2 aus der allgemeinen Lösung

$$u_{\text{hom}}(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

der homogenen Gleichung derart, daß $u_{\text{hom}}(s) = 0$ und $u'_{\text{hom}}(s) = -f(s)$ ist. Dann wird mit der so gewonnenen Lösung $u_{\text{hom}}(x;s)$ durch

$$u_p(x) := \int_{x_0}^{x} u_{\text{hom}}(x;s)ds$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung konstruiert.

Finde auf diesem Weg eine partikuläre Lösung für die Differentialgleichung

$$x^2(1-x)u'' + 2x(2-x)u' + 2(1+x)u = 1/(x-1), \qquad x \in (0,1).$$

Eine der Lösungen der homogenen Gleichung ist von der Form x^α, wobei α eine reelle Zahl ist, die aus der Differentialgleichung bestimmt werden kann. Eine weitere Lösung kann durch Reduktion der Ordnung nach d'Alembert gefunden werden.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Das folgende Anfangswertproblem modelliert den Verkehrsfluß auf einer Autobahn. (Zur Herleitung dieses Modells siehe Seite 3.)

$$\begin{cases} d_t + (1-2d)d_x = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,,\\ d(\cdot,0) = d_0\,. \end{cases}$$

Löse diese Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen

(i) $d_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \le 0\,, \\ x/2, & \text{falls } 0 < x \le 2\,, \\ 1, & \text{falls } 2 < x\,, \end{cases}$

(ii) $d_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \le 0\,, \\ 1 - x/2, & \text{falls } 0 < x \le 2\,, \\ 0, & \text{falls } 2 < x\,, \end{cases}$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode.
Skizziere hierbei die charakteristischen Kurven und mache klar, wo wir eine Lösung berechnen können.

Aufgabe 3: **2 Punkte**
Bestimme eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & 0 < x < 1\,,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \end{cases}$$

mit

(i) $u_0(x) = \min(x, 1-x)$,

(ii) $u_0(x) = x(1-x)$.

Aufgabe 4: **2 Punkte**
Beweise, daß für jede (genügend glatte) Lösung u der Wärmeleitgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen, also

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{für } 0 < x < 1\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{für } t > 0\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

die Abschätzung

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \le \int_0^1 u_0^2(x)dx \qquad \text{für } t \ge 0$$

gilt.

Hinweis: Betrachte die Ableitung des Energiefunktionals $E(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)dx$.

Aufgabe 5: **2 Punkte**
Löse die Wärmeleitgleichung für homogene Neumann-Randbedingungen, d. h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Zeige, daß der Mittelwert der Lösung für $t > 0$ konstant bleibt und daß für jedes $x \in (0,1)$ die Lösung $u = u(x,t)$ gegen den Mittelwert konvergiert für $t \to \infty$.
Wie paßt dies zur physikalischen Interpretation?

Herleitung der Flußgleichung aus Aufgabe 2 [1]

Wir nehmen an, daß die Bewegung der Autos den gleichen Gesetzen gehorcht wie der Fluß eines Fluids. Zur Modellierung beschreibe die x-Achse die Autobahn und der Verkehr fließe in positiver x-Richtung. Mit $\rho = \rho(x,t)$ bezeichnen wir die Verkehrsdichte (also Autos pro Längeneinheit) am Punkt x und zur Zeit t, und mit $q = q(x,t)$ die Flußrate (also Autos pro Zeiteinheit), mit der Autos den Punkt x zur Zeit t passieren. Wir nehmen ferner an, daß Autos weder die Autobahn verlassen noch neue hinzukommen und daß die Funktionen ρ und q stetig differenzierbar seien.

Sei $[x_1, x_2]$ mit $x_2 > x_1$ ein beliebiges Stück der Autobahn. Die Gesamtanzahl der Autos in diesem Stück zur Zeit t ist dann gegeben durch

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx$$

und die zeitliche Änderung der Zahl der Autos in diesem Stück durch

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)dx.$$

Die Vertauschung der Ableitung mit dem Integral ist hier erlaubt, da wir ρ als genügend glatt angenommen haben.[2]
Diese zeitliche Änderung muß gleich der Rate der Autos sein, die in das betrachtete Stück Autobahn am Punkt x_1 hineinfahren abzüglich der Rate jener Autos, die das Stück am Punkt x_2 wieder verlassen, also

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)dx = q(x_1,t) - q(x_2,t),$$

oder

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)dx$$

und damit

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\Big]dx = 0.$$

Da der Integrand stetig ist und diese Gleichung für jedes Intervall $[x_1, x_2]$ gilt, muß der Integrand selber verschwinden, so daß

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Wir führen nun eine weitere Annahme ein (die man theoretisch und experimentell rechtfertigen kann), daß nämlich die Flußrate q von x und t nur über die Dichte ρ abhängt, also

$$q(x,t) = G(\rho(x,t)) \quad \text{oder einfach} \quad q = G(\rho).$$

[1] Nach Zachmanoglou/Thoe, Introduction to Partial Differential Equations with Applications, Dover, 1986.

[2] Zur Vertauschung von Integration und Differentiation bei Parameterintegralen kann man ziemlich jedes Lehrbuch der reellen Analysis zu Rate ziehen.

Dabei ist G vorerst irgendeine Funktion. Man kann dies z. B. dadurch plausibel machen, daß ja in der Tat die Verkehrsdichte um ein bestimmtes Auto dessen Geschwindigkeit beeinflußt.
Welche Form die Funktion G nun hat, also wie die Beziehung zwischen q und ρ genau aussieht, hängt von vielen Faktoren ab, z. B. Wetter, Straßenzustand, Geschwindigkeitsbegrenzungen usw. Wir benutzen hier die (experimentell bestimmte) Beziehung

$$q = c\rho(1 - \rho/\rho_1), \tag{2}$$

wobei ρ_1 die maximal mögliche Autodichte (also Autos pro Längeneinheit) der Straße und c die durchschnittliche freie Geschwindigkeit darstellt, also der Durchschnitt der Geschwindigkeiten, mit denen die einzelnen Autos auf einer leeren Autobahn fahren würden. Die einfachste Beziehung, daß nämlich q und ρ proportional zueinander sind, also $q = c\rho$, ist sicherlich für große Dichten ρ nicht zu rechtfertigen. Wie beim logistischen Wachstum fügen wir also den einfachsten Dämpfungsterm, nämlich $-c\rho^2/\rho_1$, hinzu und erhalten dann die Beziehung (2).
Wir setzen diese nun in Gleichung (1) ein und erhalten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\big(1 - 2\frac{\rho}{\rho_1}\big)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Wir vereinfachen diese Gleichung noch, indem wir die normalisierte Dichte $d = \rho/\rho_1$ einführen:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + c(1 - 2d)\frac{\partial d}{\partial x} = 0.$$

Hier messen wir also nicht die absolute Verkehrsdichte ρ zur Zeit t am Punkt x, sondern das Verhältnis dieser Verkehrsdichte zur maximal möglichen ρ_1.
Die Anfangsbedingung d_0 gibt das anfängliche Verhältnis (also zur Zeit $t = 0$) der Verkehrsdichte zur maximal möglichen Verkehrsdichte auf der Autobahn an.

Wenn das anfängliche Dichteverhältnis entlang der Fahrtrichtung abnimmt, sollte es zu keinen Schocks, also „Staus“ kommen; nimmt sie hingegen zu, so kann dies durchaus passieren. Dieses Verhalten sollte man bei der Lösung der Aufgabe erkennen können.

In ähnlicher Weise wie hier können aus physikalischen Prinzipien wie Massen-, Impuls- und Energieerhaltung z. B. die Differentialgleichungen der Fluiddynamik hergeleitet werden.