

## Differentialgleichungen I

### 12. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 26.01. bis 01.02.

#### Aufgabe 1:

3 Punkte

In der Vorlesung wurde das Lemma von Gronwall in der folgenden Form bewiesen:

Sei  $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ ,  $t_0 \in [0, T)$ ,  $a, b \in L^\infty(t_0, T)$  und  $\lambda \in L^1(t_0, T)$ ,  $\lambda(t) \geq 0$  fast überall in  $(t_0, T) \ni t$ . Dann folgt aus

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s)a(s)ds \quad \text{f. ü. in } (t_0, T)$$

für fast alle  $t \in (t_0, T)$

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} \lambda(s)b(s)ds,$$

wobei  $\Lambda(t) := \int_{t_0}^t \lambda(\tau)d\tau$ .

- (i) Die Voraussetzung  $\lambda(t) \geq 0$  f.ü. in  $(t_0, T)$  ist wesentlich. Konstruiere ein Gegenbeispiel zur Aussage des Gronwallschen Lemmas für den Fall, daß  $\lambda$  nicht der Vorzeichenbedingung genügt.
- (ii) Zeige eine dem Lemma von Gronwall entsprechende Aussage für den Fall, daß  $t < t_0$  ist.

#### Aufgabe 2:

3 Punkte

Wir erinnern uns an die folgende Version des Satzes von Picard-Lindelöf aus der Vorlesung:

Sei  $X$  ein Banachraum. Die Funktion  $f : [0, T] \times X \rightarrow X$  sei stetig und im zweiten Argument bzgl.  $t$  gleichmäßig Lipschitz-stetig, so daß es ein  $L > 0$  gibt und für alle  $t \in [0, T]$  und alle  $v, w \in X$

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L\|v - w\|$$

gilt. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T], \\ u(t_0) = u_0 \in X \end{cases} \quad (1)$$

auf dem gesamten Zeitintervall genau eine Lösung  $u \in C^1([0, T]; X)$ .

In dieser Aufgabe soll es um die Stabilitätseigenschaften eines solchen Problems gehen. Zeige die folgenden Behauptungen.

- (i) Unter den Voraussetzungen des zitierten Satzes sei  $u$  die globale Lösung von (1) zum Anfangswert  $u_0 \in X$ . Dann gibt es auch eine globale Lösung  $v$  zum beliebigen Anfangswert  $v_0 \in X$  und es gilt für alle  $t \in [0, T]$

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|u_0 - v_0\| \leq e^{LT} \|u_0 - v_0\|.$$

- (ii) Seien für die rechten Seiten  $f, g : [0, T] \times X \rightarrow X$  die Voraussetzungen des zitierten Satzes mit den Konstanten  $L_f$  und  $L_g$  erfüllt. Dann gibt es globale Lösungen  $u, v$  von (1) zu derselben Anfangsbedingung  $u(t_0) = v(t_0) = u_0 \in X$  und es gilt für alle  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq |t - t_0| e^{\min\{L_f, L_g\}|t-t_0|} \sup_{t \in [0, T], w \in X} \|f(t, w) - g(t, w)\| \\ &\leq T e^{\min\{L_f, L_g\}T} \sup_{t \in [0, T], w \in X} \|f(t, w) - g(t, w)\|. \end{aligned}$$

### Aufgabe 3:

**ausnahmsweise 5 Punkte**

Lies den Artikel von P. KORMAN [1] – der dritte Abschnitt ist für uns nicht wichtig – und bearbeite die folgenden Aufgaben:

- (i) Fasse den Inhalt des Artikels zusammen.
- (ii) Formuliere Lemma 2.1 und das folgende Korollar **oder** Theorem 2.1 als eigenständige Aussagen und beweise sie.

Der Artikel ist über <http://www.emis.de/journals/PM/> frei zugänglich, kann aber auch bei uns abgeholt werden.

### Literatur

- [1] P. Korman, Remarks on Nagumo's condition. Port. Math. **55** (1998) 1, 1–9.