Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. Etienne Emmrich

Wintersemester 2008/09

Differentialgleichungen I

11. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 19.01. bis 25.01.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Wir betrachten wieder das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Die Funktion $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingung sowie eine Majorantenbedingung (es gebe also eine auf dem Intervall $[0, T]$ (L-)integrierbare Funktion $m = m(t)$ mit $|f(t, u)| \le m(t)$ auf $[0, T] \times \mathbb{R}$).
Sei nun $l : (0, T) \to [0, \infty)$ eine nichtnegative, (L-)integrierbare Funktion und $\omega : (0, T) \to \mathbb{R}$ eine (L-)meßbare Funktion mit $\int_0^\delta 1/\omega(r)dr = \infty$ für jedes $\delta > 0$.
Zeige: Gilt für hinreichend kleine t und $|v - w|$

$$|f(t, v) - f(t, w)| \le l(t)\omega(|v - w|),$$

so ist (in einer Umgebung von 0) die Lösung von (1) eindeutig bestimmt.[1]

Bemerkung: In der Theorie der Differentialgleichungen nach Carathéodory ersetzen die Carathéodory- und eine Majorantenbedingung die Forderung der Stetigkeit der rechten Seite im Satz von Peano. Weiterhin wird im Satz von Picard-Lindelöf in der Lipschitz-Bedingung die Lipschitzkonstante L durch eine integrierbare Funktion $l = l(t)$ ersetzt. Die Aussage in der Aufgabe ist also eine natürliche Verallgemeinerung des Satzes von Osgood.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Die Funktion $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ genüge der Carathéodory-Bedingung und es gebe ein $l \in L^1(0, T)$, so daß für alle $t \in [0, T]$, $v, w \in \mathbb{R}^d$

$$\|f(t, 0)\| \le l(t),$$
$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \le l(t)\|v - w\|.$$

Zeige: Dann gibt es für alle $(t_0, u_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ genau eine globale Lösung u auf $[0, T]$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

[1]Hinweis: Setzen wir $g(t, v) = l(t)\omega(v)$, dann zeige, daß $v \equiv 0$ einzige Lösung von $v'(t) = g(t, v(t))$, $v(0) = 0$ ist (in einer Umgebung von 0).

im Sinne von Carathéodory.
Zeige hierbei zuerst, daß der zugehörige Nemyzkij-Operator $L^\infty(0,T)$ in $L^1(0,T)$ abbildet und daß deshalb die übliche Integralformulierung des Anfangswertproblems wohldefiniert ist. (Hierbei bezeichne $L^\infty(0,T)$ den Raum der Äquivalenzklassen fast überall gleicher, (L-)meßbarer Funktionen, die bis auf eine Menge vom Maße Null beschränkt sind.)

Aufgabe 3: **3 ZUSATZ- Punkte**

Beweise das folgende Lemma von *Krasnosel'skij-Ladyzhenskij*:
Die Funktion $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingung. Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann gibt es eine (L-)meßbare Funktion $u : [0,1] \to [a,b]$, so daß für fast alle $t \in [0,1]$

$$\max_{v \in [a,b]} |f(t,v)| = |f(t,u(t))| = |(Fu)(t)|$$

gilt.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Die Funktion $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingung. Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Zeige[2][3]:

(i) Der durch f erzeugte Nemyzkij-Operator F bildet genau dann $L^\infty(0,1)$ in $L^p(0,1)$ ab, falls es für jedes $r > 0$ eine Funktion $a_r \in L^p(0,1)$ gibt mit

$$|f(t,v)| \leq a_r(t) \quad \text{für } |v| \leq r, t \in [0,1].$$

(ii) In diesem Fall ist F automatisch beschränkt und für $p \neq \infty$ auch stetig, für $p = \infty$ jedoch im allgemeinen unstetig.

---

[2] Hinweis: Das Lemma von *Krasnosel'skij-Ladyzhenskij* kann benutzt werden.

[3] Für $1 \leq p \leq \infty$ besteht der Raum $L^p(0,1)$ aus den meßbaren Funktionen f mit $\|f\|_p < \infty$. Für $p \neq \infty$ ist hier $\|f\|_p := (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{1/p}$, für $p = \infty$ ist $\|f\|_\infty$ das wesentliche Supremum von f, also das Infimum der Zahlen K mit

$$|f(t)| \leq K \quad \text{für fast alle } t \in [0,1].$$

($\|f\|_\infty$ ist also das „Supremum mit Ausnahme von Nullmengen")