Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. Etienne Emmrich

Wintersemester 2008/09

Differentialgleichungen I

10. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 12.01. bis 18.01.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Wir wollen den folgenden Satz von Leray und Schauder beweisen.[1]

> Es sei X ein Banachraum und $A : X \to X$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Gleichung
>
> $$u = Au, \quad u \in X \tag{1}$$
>
> eine Lösung, falls folgende *A-priori-Abschätzung* gilt:
>
> > Es gibt ein $r > 0$ derart, daß
> >
> > $$\|u\| \leq r$$
> >
> > für jede Lösung u der Gleichung
> >
> > $$u = tAu, \quad u \in X, \quad 0 \leq t < 1$$
> >
> > gilt.[2]

Hierzu definieren wir die Menge $M := \{u \in X : \|u\| \leq 2r\}$ und die Abbildung

$$Bu := \begin{cases} Au & \text{für } \|Au\| \leq 2r, \\ \frac{2rAu}{\|Au\|} & \text{für } \|Au\| > 2r. \end{cases}$$

Zeige, daß B eine kompakte Abbildung der Menge M in sich ist. Folgere, daß es einen Fixpunkt für B geben muß und schließlich, daß dann auch eine Lösung von (1) existiert.

Benutze den Satz, um die Lösbarkeit des Problems

$$u(x) = \alpha \int_a^b \sin u(y) dy + f(x)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a, b])$ im Raum $\mathcal{C}([a, b])$ zu zeigen.

---

[1] Dies ist ein Beispiel des wichtigen Prinzips *A-priori-Abschätzung gibt Existenz.*

[2] Bemerkung: Die Lösbarkeit der Gleichung $u = tAu$ wird nicht behauptet!

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Bestimme einen geeigneten Folgenraum[3] X, in dem das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u^0 \in X \end{cases}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

lösbar ist und löse es.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Wir betrachten für $J = [0, \infty)$, $D = (0, \infty)$ das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in J, \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

mit $f : J \times D \to \mathbb{R}$, $f(t, v) := -\frac{t}{v} \exp(t^2)$.

Bestimme eine maximal fortgesetzte Lösung dieses AWP. Ist diese eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Wir wissen, daß jede Lipschitz-stetige Funktion absolut stetig und jede absolut stetige Funktion stetig ist. Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht. Dies zu zeigen ist Sinn dieser Aufgabe.

(i) Zeige, daß $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $0 \neq t \mapsto g(t) := t \cos \frac{\pi}{2t}$, $g(0) = 0$, zwar stetig, nicht jedoch absolut stetig ist.

(ii) Finde eine Funktion, die absolut stetig, nicht jedoch Lipschitz-stetig ist.

[3] Typische Folgenräume sind z.B. l^p mit $1 \leq p \leq \infty$, c_0 (Raum der Nullfolgen), c (Raum der konvergenten Folgen) etc., jeweils ausgestattet mit passenden Normen.